ارائه مدلی جدید به منظور پیش بینی عملکرد واحدهای تصمیم گیرنده براساس تحلیل پوششی داده های تصادفی فازی

علی یعقوبی[۱،*]، الهام قبادی[۲]

[۱] استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه رجاء، قزوین، ایران (عهده دار مکاتبات)

[۲] کارشناسی ارشد، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه رجاء، قزوین، ایران

تاریخ دریافت: فروردین ماه ۱۳۹۷، اصلاحیه: تیر ماه ۱۳۹۷، پذیرش: شهریور ماه ۱۳۹۷

چکیده

از مهم ترین ابزارها جهت محاسبه کارایی واحدهای تصمیم گیرنده، تکنیک تحلیل پوششی داده ها (DEA) است که برای محاسبه کارایی از ورودی ها و خروجی های گذشته واحدها استفاده می کند. عدم امکان تخمین کارایی، استفاده از ورودی و خروجیهای قطعی و توزیع غیرواقعی اوزان به ورودی ها و خروجی‌ها از نقاط ضعف DEA می باشد. بنابراین در این مقاله در راستای رفع مشکلات مذکور، مدلی جدید با لحاظ عدم قطعیت در تحلیل پوششی داده های تصادفی (SDEA) ارائه گردیده که با درنظرگرفتن همزمان ورودی ها و خروجی های واحدها بصورت متغیرهای تصادفی نرمال همراه با اوزان فازی برای آن ها، سعی در پیش بینی کارایی واحدهای تصمیم گیرنده دارد. نهایتاً در راستای تایید اثربخشی مدل پیشنهادی، یک مطالعه کاربردی در صنعت بانکداری صورت گرفته و کارایی های پیش بینی شده شعب با کارایی واقعی آنها مقایسه می گردد. همبستگی بالای بین نتایج، نشان از دقت و صحت مدل پیشنهادی دارد.

واژه‌های اصلی: عملکرد، واحد تصمیم گیرنده، تحلیل پوششی داده های تصادفی، فازی.

۱- مقدمه

در طول دوران گذشته همواره ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم گیرنده مورد توجه بوده است. بیشتر نهادها به دنبال آن هستند تا شعب خود را با شاخص های معین با یکدیگر مقایسه کنند تا بتوانند مسیرحرکت و پیشرفت آنها را هموار سازند. مدل تحلیل پوششی داده ها یکی از راه های ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم گیرنده است که با استفاده از داده های قطعی به ارزیابی کارایی آنها می پردازد و واحدهای کارا و ناکارا با ورودی و خروجی مشابه را تعیین می کند. ورودی ها و خروجی های مدل با داده های قطعی مربوط به گذشته، باعث عدم امکان پیش بینی واحدهای کارا و ناکارا برای آینده می شود، آینده ای که خیلی فضاهای پیشرفت و رقابت را ایجاد خواهد کرد. به دلیل ماهیت تصادفی و تأثیر گذار عوامل محیطی لزوم یک برنامه ریزی منطقی جهت خنثی کردن این تأثیرات کاملاً ضروری است. لذا منطقی می باشد که مدیریت جهت افزایش کارایی هر یک از واحدهای تصمیم گیرنده با استفاده از کارایی پیش بینی شده جهت ارتقاء سطح کارائی قبل از وقوع ناکارائی اقدام کند. به همین دلیل محققین جهت رفع این نقص، مدل های جدیدی تحت عنوان تحلیل پوششی داده های تصادفی مطرح نمودند. لذا در این مقاله برای پیش بینی کارایی واحدهای تصمیم گیرنده مدل جدیدی ارائه شده که با در نظر داشتن مزایای استفاده از تکنیک تحلیل پوششی داده ها (DEA) سعی در رفع مهم‌ترین مشکلات آن (عدم امکان تخمین کارایی، توزیع غیرواقعی اوزان به ورودی‌ها و خروجی‌های مدل و تعدد شعب کارا) دارد.

در این مقاله مدلی جدید با لحاظ عدم قطعیت در مدل تحلیل پوششی داده های تصادفی (SDEA) ارائه گردیده که با درنظرگرفتن همزمان ورودی ها و خروجی های واحدها بصورت متغیرهای نرمال همراه با اوزان فازی برای آن ها، سعی در پیش بینی کارایی واحدهای تصمیم گیرنده دارد. سازماندهی مطالب این مقاله عبارت است از: بخش دوم به بررسی ادبیات موضوع و تحقیقات صورت گرفته در این زمینه می پردازد. در بخش سوم نیز تعاریف و اصطلاحات مورد استفاده در تحقیق و در بخش چهارم تعریف مسئله ارائه شده است. بخش پنجم مدل پیشنهادی معرفی شده و در بخش های ششم و هفتم به ترتیب به مطالعه موردی، نتیجه گیری و پیشنهادات پرداخته خواهد شد.

۲- مرور ادبیات

در سال ۱۹۵۹ چارنز و کوپر[1] برنامه ریزی با محدودیت های تصادفی را

[1] Charnes & Cooper

* Phd_Yaghoubi@Yahoo.com

برای اولین بار در زمینه ی «تحقیق در عملیات» وارد کردند. آنها به همراه رودز بحث تحلیل پوششی داده ها را در سال ۱۹۷۸ برای محاسبه کارایی بیان کردند[۶].

برنامه ریزی محدود شده به قیود تصادفی یک روش بسیار مهم و مفید در برنامه ریزی تصادفی است که در سال ۱۹۵۹ توسط چارنز و کوپر به منظور در نظر گرفتن مفاهیم آماری از جمله متغیرهای تصادفی و خطاهای اندازه گیری آنها در برنامه ریزی خطی مطرح شد [۵].

در سال ۱۹۸۲ سنگوپتا و همکارانش[۲] مدل های DEA تصادفی را مطرح کردند[۲۴]. به عبارت دیگر، این محققان برای نخستین بار مدل تحلیل پوششی داده ها را با برنامه ریزی با محدودیت های تصادفی (CCP) تلفیق و از مدل های تصادفی بدست آمده برای تخمین کارایی و در نظر گرفتن خطای اندازه گیری متغیرهای ورودی و خروجی استفاده کردند.

تحقیقات انجام شده در ارتباط با اوزان ورودی ها و خروجی ها در DEA محدود بوده و از مهم ترین آن ها می توان به مقالات دایسون[۳] [۸] در سال ۱۹۸۸، چارنز و همکارانش[۵] در سال ۱۹۸۹، رول و گولونی[۴] [۲۱] در سال ۱۹۹۳، و جهانشاهلو و همکاران [۱۵] در سال ۱۹۹۷ اشاره کرد. در روش های ارائه شده در بررسی های فوق از داده های قطعی و معین استفاده شده است، در حالی که در دنیای واقعی با داده های غیر قطعی و تصادفی مواجه هستیم.

در سال ۱۹۹۳ لند و همکارانش[۵] مدل مشهور LLT را مطرح کردند[۱۷]. آنها در این مدل هر دو محدودیت فرم پوششی مدل CCR را به عنوان متغیرهایی تصادفی در نظر گرفتند. پس از مطرح شدن مدل LLT، کوپر و همکارانش در سال ۱۹۹۶، با بکارگیری رضایت بخشی سایمون مدلی جدید مطرح کردند. این مدل جدید تلفیق مفهوم تصمیم گیری رضایت بخشی با مدل های تحلیل پوششی داده ها با محدودیت های تصادفی (CCDEA) است[۸].

فتی و جکسون[۶] (۲۰۰۱) با استفاده از تحلیل پوششی داده های تصادفی به تخمین کارایی در بازار آزاد پرداختند[۱۲].

کوپر و همکارانش[۷] در سال ۲۰۰۲ با استفاده از رویکرد برنامه ریزی محدودیت های تصادفی به تجزیه و تحلیل کارایی تکنیکی پرداختند[۷].

ساعتی و همکارانش (۲۰۰۳) برای بدست آوردن مجموعه ای مشترک از وزن نهاده ها و ستاده های فازی روشی ارائه کرده اند. آنها ابتدا مدل خود را برای داده های قطعی پیشنهاد و سپس آن را برای داده های فازی توسعه دادند[۲۲].

هوانگ و همکارانش[۸] در سال ۲۰۰۴ نیز مدل ترکیبی تحلیل پوششی داده های تصادفی و برنامه ریزی محدودیت تصادفی را مطرح کردند[۱۴]. در سال ۲۰۰۶ نیز مدل دیگری توسط کوپر و همکاران در زمینه SDEA ارائه شد. در این مدل با به کارگیری مفاهیم مطرح شده در مدل BCC و فرض تصادفی بودن ورودی ها و خروجی ها و توزیع نرمال برای آنها، مدل تصادفی BCC خروجی گرا مطرح شد[۹].

شانموگام و جانسون[۹] (۲۰۰۷) با استفاده از تجزیه و تحلیل مولفه ها (PCA) یک تکنیک جدید برای ارزیابی واحدهای تصمیم براساس مدیریت متغیرهای کمکی ارائه کردند [۲۵]. در کنار رویکردهای موجود، پودینووسکی و تاناسولیس[۱۰] (۲۰۰۷) به ارائه یک رویکرد پیچیده برای ارزیابی کارایی واحدها پرداختند که با افزایش تعداد واحدهای تصمیم گیرنده و کاهش متغیرهای ورودی و خروجی از طریق تجمیع آن ها همراه می باشد [۱۹].

آدلر و یاژمسک[۱۱] (۲۰۱۰) طی مقاله ای اثبات نمودند که رویکرد هیبردی PCA-DEA فازی نسبت به روشی که جنکینز و همکارش (۲۰۰۳) در مقاله خود ارائه نمودند برتری داشته و منجر به نتایج بهتری برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم گیرنده می شود بخصوص هنگامی که با مجموعه های کوچکی از داده ها مواجه باشیم[۱].

نیرانجان و همکاران[۱۲] (۲۰۱۱) در مقاله خود چهار رویکرد اساسی بمنظور کاهش ابعاد داده ها و کاهش متغیرها در DEA ارائه نمودند که عبارتند از: اندازه گیری سهم کارایی (ECM[۱۳])، آزمون رگرسیون و انتخاب متغیر به کمک شبیه سازی مونت کارلو. همچنین آن ها در این مقاله به بیان مزایای هریک از این تکنیک ها پرداختند [۱۸].

احمدوند و همکاران (۲۰۱۱) مدل جدیدی براساس مدل تحلیل پوششی داده ها و روش های آماری چندمتغیره بمنظور حذف ورودی ها و خروجی های نامطلوب ارائه نمودند [۲].

واژایل و بالاسوبرامانیان[۱۴] در سال ۲۰۱۳ با استفاده از تحلیل پوششی داده های تصادفی محدود به وزن با بکارگیری DEA بر روی استراتژی گروه کارایی تقاضامحور، هر دو نوع قطعی و تصادفی را تحلیل و نتایج را از لحاظ مدل های وزنی محدود و نامحدود را مقایسه کردند[۲۰].

عمرانی و همکاران (۲۰۱۵) یک رویکرد یکپارچه بمنظور ارزیابی کارایی شرکت های توزیع برق با درنظر گرفتن اساس کاهش داده ها را معرفی نمودند. آنها با تلفیق تکنیک های تئوری بازی ها و تحلیل پوششی داده ها به استخراج نتایج پرداختند[۲۶].

---

2 Sengupta et al
3 Dyson
4 Roll & Golany
5 Land et al
6 Fetti & Jackson
7 Cooper et al
8 Huang et al
9 Shanmugam and Johnson
10 Podinovski and Thanassoulis
11 Adler and Yazhemsk
12 Niranjan et al
13 Efficiency Contribution Measure
14 Vazhail & Balasoubramanian

باسما و همکاران[15] سال ۲۰۱۶ طی توسعه مدل برنامه ریزی محدود شده به قیود تصادفی (CCP) یکی از مدل های کلاسیک ورودی محور تحلیل پوششی داده ها را به شکل تحلیل پوششی داده های تصادفی توسعه دادند[۲۶].

یعقوبی و همکاران (۲۰۱۷) به ارائه مدلی در راستای پیش بینی کارایی واحدهای تصمیم گیرنده براساس تحلیل پوششی داده های تصادفی در محیط پویا پرداختند و با استفاده از الگوریتم ژنتیک به حل و تحلیل آن پرداختند[۲۸].

کائو و همکاران[16] (۲۰۱۸) با استفاده از تحلیل پوششی داده های شبکه ای و نیز با ورودی و خروجی های تصادفی وابسته به ارائه مدلی جهت تخمین کارایی واحدها پرداختند.

اهرگات و همکاران[17] (۲۰۱۸) با ورود عدم قطعیت در تحلیل پوششی داده های گروهی به ارائه مدل جدیدی با ورودی و خروجی های غیرقطعی بیضوی در راستای تخمین کارایی واحدهای تصمیم گیرنده پرداختند [۱۶].

۳- تعاریف و اصطلاحات

۳-۱ مفاهیم پایه در تحلیل پوششی داده ها

تحلیل پوششی داده ها: روشی غیر پارامتری است که کارایی نسبی واحدها را در مقایسه با یکدیگر ارزیابی می کند[۳].

واحد تصمیم گیرنده: هر واحد اقتصادی که به تولید کالا و یا خدمات اشتغال داشته باشد به عنوان واحد تصمیم گیرنده شناخته می شود[۳].

ورودی: منابعی هستند که برای رسیدن به نتیجه مطلوب مورد استفاده واحد مورد بررسی قرار می گیرند[۳].

خروجی: حاصل کار و نتیجه عمل واحد مورد بررسی بر روی متغیرهای ورودی هستند[۳].

تحلیل پوششی داده های تصادفی: با واردسازی تأثیرات تصادفی عوامل محیطی بر ورودی ها و خروجی های واحدهای تحت بررسی، مدل نهایی تحلیل پوششی داده های تصادفی را ایجاد می نماید[۲۰].

ورودی (خروجی) تصادفی: در بسیاری از مسائل کاربردی مقدار دقیق ورودی ها و خروجی های واحدهای تصمیم گیرنده کاملاً در دسترس نیست و در مسائل روزمره اکثر داده ها نادقیق و تصادفی می باشند[۲۷].

مدل CCR:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad z_k = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} \\
&st: \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1 \\
&\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1 \quad j = 1,...,n \\
&u_r \ge 0 \quad r = 1,...,s \\
&v_i \ge 0 \quad i = 1,...,m
\end{aligned}
\qquad (۱)
$$

در مدل (۱)، j بیانگر تعداد واحدهای تحت ارزیابی، i تعداد ورودی ها و r تعداد خروجی های واحدها می باشد. همچنین نمادهای v_i و u_r بیانگر وزن هایی است که به هر یک از ورودی i ام و خروجی r ام اختصاص می یابد. x_{ik} و y_{rk} نیز به ترتیب بیانگر iامین ورودی و rامین خروجی مربوط به واحد تصمیم گیرنده kام است. همچنین Z_k بیانگر کارایی واحد kام یعنی واحد تحت بررسی و محدودیت های مطرح شده بیانگر نسبت خروجی های مجازی به ورودی های مجازی است؛ این نسبت برای هر واحد تصمیم گیرنده نباید بیشتر از ۱ شود[۶].

۳-۲ مروری برنظریه اعداد فازی

۳-۲-۱ برش α مجموعه فازی A

برش α مجموعه فازی A عبارت است از مجموعه ی قطعی A_α، که عناصری از مجموعه ی جهانی X را شامل می شود؛ عناصر این مجموعه دارای درجه عضویتی بزرگتر یا مساوی مقدار مشخص α هستند. در واقع:

$$A_\alpha = \{x \,|\, \mu(x) \ge \alpha, x \in x\}$$

مجموعه ی فازی A را محدب گویند، اگر و تنها اگر هر یک از برش های α آن یک مجموعه ی محدب باشد [۴].

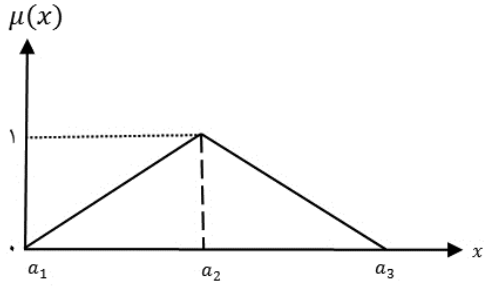
$$\mu(\lambda r + (1-\lambda)s) \ge \min[\mu(r), \mu(s)]$$
$$\lambda \in [0,1], r, s \in R^n$$

۳-۲-۲ عدد فازی مثلثی

یک عدد فازی مثلثی را به وسیله ی سه تایی مرتب مانند $A = (a_1, a_2, a_3)$ می توان نشان داد که تابع عضویت آن به صورت شکل (۱) می باشد[۲۳].

15 Basma et al
16 Kao et al
17 Ehrgott et al

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0 & x<a_1\\ (x-a_1)/(a_2-a_1) & a_1\le x\le a_2\\ (a_3-x)/(a_3-a_2) & a_2\le x\le a_3\\ 0 & x>a_3\end{cases}$$



شکل ۱: عدد فازی مثلثی $A=(a_1,a_2,a_3)$

۳-۳ تصمیم گیری گروهی

گاهی ممکن است در یک تصمیم گیری بخواهیم به جای یک تصمیم گیرنده، نظرات چندین تصمیم گیرنده را اعمال نماییم. در این مورد از تصمیم گیری گروهی، می توان از میانگین هندسی نظرات برای عناصر ماتریس مقایسات زوجی (D) چندین تصمیم گیرنده استفاده کرد. عناصر ماتریس D یعنی (a'_{ij}) مطابق رابطه (۲) محاسبه می شوند:

$$a'_{ij}=(\prod_{k=1}^{n}a_{ijk})^{\frac{1}{n}} \qquad k=1,..,n \quad i\neq j \qquad (۲)$$

که در آن n تعداد تصمیم گیرنده گان، k شماره تصمیم گیرنده kام و a_{ijk} نشان دهنده ی ترجیح عنصر iام به عنصر jام است که توسط تصمیم گیرندهٔ kام ارزش گذاری شده است [۴].

۴- تعریف مسئله

بسیاری از مطالعات در زمینهٔ تحلیل پوششی داده ها با فرض قطعی بودن داده ها، مرز کارایی مشخصی را تعیین و بر اساس آن سطح کارایی را می سنجند. این اندازه گیری ها به خطاهای داده ها و نمونه ها توجهی ندارند و یا در حالت کلی به ساختارهای آماری و احتمالی بی توجه هستند حال آن که در بسیاری از مسائل کاربردی مدیران واحدها با داده هایی تصادفی روبرو می باشند و آنها برای ارزیابی واحدهای تحت نظارت خود به روشی نیاز دارند که بتواند این گونه واحدها را ارزیابی کنند.

ارزیابی واحدها گذشته از شیوه اجرا، تنها بر پایه خروجی های تصادفی انجام گرفته است و ورودی های تصادفی یا همان منابع مورد استفاده تأثیری در آن نداشته که نوعی چشم پوشی نسبت به هزینه های واحدها بوده است. در نتیجه موضوع از بین رفتن منابع از نظر دور می ماند. در این مقاله مدلی جدید با لحاظ عدم قطعیت در مدل تحلیل پوششی داده های تصادفی (SDEA) ارائه گردیده که با درنظرگرفتن همزمان ورودی ها و خروجی های واحدها بصورت متغیرهای تصادفی نرمال همراه با اوزان فازی برای آن ها، سعی در پیش بینی کارایی واحدهای تصمیم گیرنده دارد تا سازمان اقتصادی مورد بررسی بتواند با زود آگاهی از واحدهای ناکارای خود درصدد رفع نواقص پرداخته و به نوعی از وقوع قطعی ناکارایی پیشگیری کند. در ضمن با اعمال میزان ارجحیت کارشناسان بصورت تصمیم گیری گروهی نسبت به هر یک از ورودی ها وخروجی ها، موجبات کاهش تعدد شعب کارا و در نتیجه افزایش قدرت تفکیک پذیری بین واحدهای کارا در مدل پیشنهادی فراهم شده است.

۵- مدل پیشنهادی

۵-۱ مدل تحلیل پوششی داده های تصادفی

برای تشریح مدل پیشنهادی در این پژوهش فرض کنید که تعداد n واحد تصمیم گیرنده (DMU[18]) وجود دارد که کل مجموعه آن با حرف j نشان داده می شود. کارایی هر DMU، براساس فرآیند تولید یعنی بکارگیری m ورودی برای تولید s خروجی و در مقایسه با سایر DMUها دارای بردارهای ورودی و خروجی هستند و تمام اجزای این بردارها مثبت میباشند. نکته قابل توجه اینکه مقادیر ورودی ها و خروجی های مدل وابسته به عوامل خارجی همچون شرایط کلان اقتصادی، سیاستگذاری ها و قوانین جدید دولت و سایر عوامل محیطی است، که مقدار ورودی ها و خروجی ها را تحت تأثیر قرار می دهد. به این ترتیب ورودی ها و خروجی ها به عنوان متغیرهای تصادفی در نظر گرفته می شوند.

مدل تحلیل پوششی داده های تصادفی اولیه بصورت مدل (۳) می باشد:

$$\begin{aligned}&Max \quad E(\sum_{r=1}^{s}u_r\hat{y}_{rk})\\ &st:\\ &pr[E(\sum_{i=1}^{m}v_i\hat{x}_{ik})=1]\ge(1-\alpha_k)\\ &pr[\frac{\sum_{r=1}^{s}u_r\hat{y}_{rj}}{\sum_{i=1}^{m}v_i\hat{x}_{ij}}\le\beta_j]\ge(1-\alpha_j) \quad j=1,...,n\\ &u_r\ge 0, r=1,...,s \quad , \quad v_i\ge 0, i=1,...,m\end{aligned} \qquad (۳)$$

در رابطه (۳) داریم:

$\hat{x}_{ij}$ و $\hat{y}_{rj}$ به ترتیب بیانگر ورودی i ام و خروجی r ام از واحد تصمیم گیرنده j ام می باشند که بصورت متغیرهای تصادفی با توزیع نرمال در نظر گرفته شده اند. علامت " ^ " که در بالای x_{ij} و y_{rj} گذاشته شده مشخص می گردد که $\hat{x}_{ij}$ و $\hat{y}_{rj}$ متغیرهای تصادفی هستند و از روابط زیر بدست می آیند:

[18] Decision Making Unit

$$\hat{y}_{rj} = \overline{y}_{rj} \pm b_{rj}\zeta \quad r = 1,...,s \quad , j = 1,...,n$$
$$\hat{x}_{ij} = \overline{x}_{ij} \pm a_{ij}\delta \quad i = 1,...,m \quad , j = 1,...,n \qquad (۴)$$

$\overline{y}_{rj}$ و b_{rj} به ترتیب بیانگر میانگین و انحراف معیار متغیر خروجی تصادفی DMU_j می باشد. همچنین ζ در قالب یک متغیر تصادفی توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 فرض شده است.

$\overline{x}_{ij}$ و a_{ij} به ترتیب بیانگر میانگین و انحراف معیار متغیر ورودی تصادفی DMU_j می باشد. همچنین δ در قالب یک متغیر تصادفی توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ'^2 فرض شده است.

P_r بیانگر احتمال و β_j نیز یک مقدار تجویزی از طیف مقادیر ۰ تا ۱۰۰٪ است که بیانگر سطح کارائی مورد انتظار DMU_j می باشد که از سوی خبرگان تعیین می شود.

مقدار α_j به عنوان ریسک پذیری DMU_j در نظر گرفته می شود؛ به عبارت دیگر $(1-\alpha_j)$ بیانگر احتمال دستیابی به سطح مطلوب β_j می باشد.

می توان به یقین بیان داشت که رابطه (۳) مربوط به مدل پیشنهادی برای ایجاد سهولت در محاسبات مدل، نیازمند فرمول بندی مجدد است. لذا محدودیت دوم رابطه (۳) به صورت رابطه (۵) بازنویسی می کنیم:

$$pr[\sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rj} \le \beta_j \sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{ij}] \ge (1-\alpha_j) \qquad (۵)$$

بمنظور نرمالایز نامعادله (۵) خواهیم داشت:

$$pr\left(\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r(\hat{y}_{rj} - \overline{y}_{rj}) - \beta_j \sum_{i=1}^{m} v_i(\hat{x}_{ij} - \overline{x}_{ij})}{w_j} \le \right.$$
$$\left. \frac{(\beta_j \sum_{i=1}^{m} v_i \overline{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r \overline{y}_{rj}}{w_j}\right) \ge (1-\alpha_j) \qquad (۶)$$

که در آن ها $\overline{y}_{rj}$ و $\overline{x}_{ij}$ مقادیر مورد انتظار $\hat{y}_{rj}$ و $\hat{x}_{ij}$ و w_j بیانگر واریانس تفاضل $\hat{y}_{rj}$ و $\hat{x}_{ij}$ مربوط به DMU_j می باشند.

$$E(\sum u_r \hat{y}_{rj}) = \sum u_r \overline{y}_{rj}$$
$$E(\sum v_i \hat{x}_{ij}) = \sum v_i \overline{x}_{ij}$$
$$w_j = \sqrt{\mathrm{var}(\hat{y}_{rj}) + \mathrm{var}(\hat{x}_{ij}) - 2\,\mathrm{cov}(\hat{y}_{rj}, \hat{x}_{ij})} \qquad (۷)$$

در صورت قبول فرض نرمال برای توزیع احتمال متغیرهای تصادفی $\hat{y}_{rj}$ و $\hat{x}_{ij}$ می توان چنین استنباط کرد که متغیر $\hat{z}_j$ از توزیع نرمال استاندارد با میانگین یک و واریانس صفر تبعیت می کند.

$$\hat{Z}_j = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r(\hat{y}_{rj} - \overline{y}_{rj}) - \beta_j \sum_{i=1}^{m} v_i(\hat{x}_{ij} - \overline{x}_{ij})}{w_j} \qquad (۸)$$

با جایگذاری رابطه (۸)در رابطه (۶) رابطه کلی (۹) بدست می آید:

$$pr\left\{\hat{Z}_j \le \frac{(\beta_j \sum_{i=1}^{m} v_i \overline{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r \overline{y}_{rj}}{w_j}\right\} \ge (1-\alpha_j) \qquad (۹)$$

در اینجا نیز $\hat{z}_j$ از توزیع نرمال استاندارد پیروی می کند. معکوس شده رابطه (۹) به صورت رابطه زیر خواهد بود:

$$\frac{(\beta_j \sum_{i=1}^{m} v_i \overline{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r \overline{y}_{rj})}{w_j} \ge F^{-1}(1-\alpha_j) \qquad (۱۰)$$

در اینجا F بیانگر تابع توزیع جمعی توزیع نرمال و F^{-1} نشانگر تابع معکوس F می باشد.

بنابراین با جایگزین کردن روابط (۷) و (۱۰) در مدل تحلیل پوششی داده های تصادفی (۳) خواهیم داشت:

$$Max \quad E(\sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rk})$$
$$st:$$
$$E(\sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{ik}) - w_k F^{-1}(1-\alpha_k) = 1$$
$$(\beta_j \sum_{i=1}^{m} v_i \overline{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r \overline{y}_{rj}) - w_j F^{-1}(1-\alpha_j) \ge 0$$
$$j = 1,...,n$$
$$u_r \ge 0, r = 1,...,s \quad , \quad v_i \ge 0, i = 1,...,m \qquad (۱۱)$$

برای اینکه مدل (۱۱) فرم CCR مضربی داشته باشد با کمی جابجایی در محدودیت دوم رابطه (۱۱) داریم:

$$Max \quad E(\sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rk})$$
$$st:$$
$$E(\sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{ik}) - w_k F^{-1}(1-\alpha_k) = 1$$
$$(\sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{rj} - \beta_j \sum_{i=1}^{m} v_i \bar{x}_{ij}) + w_j F^{-1}(1-\alpha_j) \le 0$$
$$j = 1,...,n$$
$$u_r \ge 0, r = 1,...,s \quad , \quad v_i \ge 0, i = 1,...,m \qquad (۱۲)$$

با این حال رابطه (۱۲) همچنان دو مشکل محاسباتی دارد:

الف) تابع هدف توسط امید ریاضی از مقدار $\sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rk}$ بیان می شود.

ب) محدودیت هایی که شامل w_j و w_k است به وسیله ی یک عبارت درجه دوم فرموله می گردند.

برای استخراج یک رابطه ی خطی از رابطه (۱۲)، تحت مفروضات رابطه (۳) مقدار واریانس های $\hat{y}_{rj}$ و $\hat{x}_{ij}$ مطابق زیر محاسبه می شوند:

$$\text{var}(\hat{y}_{rj}) = \text{var}(\bar{y}_{rj} \pm b_{rj}\zeta) = b_{rj}^2\sigma^2 \quad \zeta \sim N(0,1)$$
$$\text{var}(\hat{x}_{ij}) = \text{var}(\bar{x}_{ij} \pm a_{ij}\delta) = a_{ij}^2\sigma'^2 \quad \delta \sim N(0,1)$$
$$\text{var}(\sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rj}) = (\sum_{r=1}^{s} u_r b_{rj}\sigma)^2$$
$$\text{var}(\sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{ij}) = (\sum_{i=1}^{m} v_i a_{ij}\sigma')^2 \qquad (۱۳)$$

از تفاضل دو تابع تجمعی تصادفی $\sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rj}$ و $\sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{ij}$ با توزیع نرمال خواهیم داشت:

$$(\sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{ij}) \sim N(\sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i \bar{x}_{ij},$$
$$\sum_{r=1}^{s} u_r^2 b_{rj}^2 \sigma^2 + \sum_{i=1}^{m} v_i^2 a_{ij}^2 \sigma'^2 - 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{s} u_r v_i \text{ cov}(\hat{y}_{rj}, \hat{x}_{ij})) \qquad (۱۴)$$

که در آن w_j بصورت زیر محاسبه می شود:

$$w_j = \sqrt{\sum_{r=1}^{s} u_r^2 b_{rj}^2 \sigma^2 + \sum_{i=1}^{m} v_i^2 a_{ij}^2 \sigma'^2 - 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{s} u_r v_i \text{ cov}(\hat{y}_{rj}, \hat{x}_{ij})} \qquad (۱۵)$$

برای محاسبه کواریانس بکار رفته در رابطه (۱۵) خواهیم داشت:

$$\text{cov}(\hat{y}_{rj}, \hat{x}_{ij}) = E[\hat{y}_{rj}\hat{x}_{ij}] - E[\hat{y}_{rj}]E[\hat{x}_{ij}] \qquad (۱۶)$$

که در آن:

$$E[\hat{y}_{rj}] = \bar{y}_{rj} \qquad E[\hat{x}_{ij}] = \bar{x}_{ij}$$
$$E[\hat{y}_{rj}\hat{x}_{ij}] = E[(\bar{y}_{rj} \pm b_{rj}\zeta).(\bar{x}_{ij} \pm a_{ij}\delta)] =$$
$$E[\bar{y}_{rj}\bar{x}_{ij} \pm \bar{y}_{rj}a_{ij}\delta \pm \bar{x}_{ij}b_{rj}\zeta \pm a_{ij}b_{rj}\delta\zeta]$$
$$\zeta \sim N(0,1) \quad , \quad \delta \sim N(0,1)$$
$$E[\hat{y}_{rj}\hat{x}_{ij}] = \bar{y}_{rj}\bar{x}_{ij}$$
$$\Rightarrow \quad \text{cov}(\hat{y}_{rj}, \hat{x}_{ij}) = \bar{y}_{rj}\bar{x}_{ij} - \bar{y}_{rj}\bar{x}_{ij} = 0 \qquad (۱۷)$$

بنابراین در نهایت w_j بصورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$w_j = \sqrt{\sum_{r=1}^{s} u_r^2 b_{rj}^2 \sigma^2 + \sum_{i=1}^{m} v_i^2 a_{ij}^2 \sigma'^2} \qquad (۱۸)$$

چنان که قبلاً اشاره شد، $\hat{y}_{rj} = \bar{y}_{rj} \pm b_{rj}\zeta$ و $\hat{x}_{ij} = \bar{x}_{ij} \pm a_{ij}\delta$ بنابراین تابع هدف رابطه (۱۲) بصورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$Max \quad E(\sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rk}) = E(\sum_{r=1}^{s} u_r (\bar{y}_{rk} \pm b_{rk}\zeta)) =$$
$$E(\sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{rk} \pm \sum_{r=1}^{s} u_r b_{rk}\zeta) = \sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{rk} \qquad (۱۹)$$

با توجه به اینکه ζ متغیری تصادفی با میانگین صفر و واریانس σ^2 می باشد، در نتیجه خواهیم داشت:

$$E(\sum_{r=1}^{s} u_r b_{rk}\zeta) = 0$$

و همینطور برای ارزش مورد انتظار $\sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{ik}$ خواهیم داشت:

$$E(\sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{ik}) = E(\sum_{i=1}^{m} v_i (\bar{x}_{ik} \pm a_{ik}\delta)) =$$
$$E(\sum_{i=1}^{m} v_i \bar{x}_{ik} \pm \sum_{i=1}^{m} v_i a_{ik}\delta) = \sum_{i=1}^{m} v_i \bar{x}_{ik} \qquad (۲۰)$$

در این قسمت نیز مشابه قبل با توجه به اینکه δ متغیری تصادفی با میانگین صفر و واریانس σ'^2 است، در نتیجه خواهیم داشت:

$$E(\sum_{i=1}^{m} v_i a_{ik}\delta) = 0$$

در نهایت با اعمال تغییرات فوق در مدل (۱۲)، مدل پیشنهادی اولیه بصورت مدل (۲۱) خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{rk} \\
&st: \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i \bar{x}_{ik} - w_k F^{-1}(1-\alpha_k) = 1 \\
&\sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{rj} - \beta_j \sum_{i=1}^{m} v_i \bar{x}_{ij} + w_j F^{-1}(1-\alpha_j) \le 0 \\
&j = 1,...,n \\
&u_r \ge 0 \quad , \quad r = 1,...,s \\
&v_i \ge 0 \quad , \quad i = 1,...,m \\
&w_k = \sqrt{\sum_{r=1}^{s} u_r^2 b_{rk}^2 \sigma^2 + \sum_{i=1}^{m} v_i^2 a_{ik}^2 \sigma'^2} \\
&w_j = \sqrt{\sum_{r=1}^{s} u_r^2 b_{rj}^2 \sigma^2 + \sum_{i=1}^{m} v_i^2 a_{ij}^2 \sigma'^2}
\end{aligned}
\qquad (۲۱)
$$

۵-۱-۱ پیش بینی ورودی ها و خروجی ها در مدل پیشنهادی

تکنیکی که در این پژوهش برای پیش بینی میانگین و انحراف معیار متغیرهای تصادفی ورودی و خروجی واحدهای تصمیم گیرنده مورد استفاده قرار گرفته است، تکنیک پیش بینی کیفی PERT/CPM است که غالباً در مباحث برنامه ریزی و کنترل پروژه مورد استفاده قرار می گیرد[۲۶]. به عبارت دیگر بمنظور محاسبه مقادیر مورد انتظار ورودیها و خروجیها ($\bar{x}_{ij}$ و $\bar{y}_{rj}$) و واریانس مربوط به آنها (a_{ij}^2 و b_{rj}^2) به ازای تمام واحدهای تصمیم گیرنده، در این پژوهش براساس تکنیک PERT/CPM سه حالت برای تخمین ورودیها و خروجی ها بکار گرفته شده است که بر این اساس پرسشنامه هایی مشتمل بر پیش بینی به تفکیک مقادیر ورودی ها و خروجی ها تنظیم و بین تصمیم گیرندگان توزیع و در نهایت با محاسبه میانگین نظرات ارائه شده در قالب سه حالت خوش بینانه(OP_{rj})، محتمل (ML_{rj}) و بدبینانه (PE_{rj}) به صورت مقادیری مشخص و واحد تهیه می شوند[۲۳] که در آن:

OP_{rj}: مقدار ورودی یا خروجی ممکن اما با احتمال وقوع کم تحت شرایطی است که همه چیز خوب پیش برود. بنابراین، این حالت به عنوان تخمینی از حد بالا توزیع احتمال مورد بررسی قرار می گیرد.

ML_{rj}: عبارت است از نزدیکترین تخمین مقدار $\hat{x}_{ij}$ و $\hat{y}_{rj}$ به واقعیت.

PE_{rj}: مقدار ورودی یا خروجی ممکن اما با احتمال وقوع کم تحت شرایطی است که همه چیز بد پیش برود. بنابراین، این حالت به عنوان تخمینی از حد پایین توزیع احتمال مورد بررسی قرار می گیرد. ارزش مورد انتظار ورودی ها و خروجی ها در این روش رابطه (۲۲) می باشد:

$$
\bar{x}_{ij} = \frac{(OP_{ij} + 4ML_{ij} + PE_{ij})}{6}
$$

,

$$
\bar{y}_{rj} = \frac{(OP_{rj} + 4ML_{rj} + PE_{rj})}{6} \qquad (۲۲)
$$

واریانس درونی $\hat{x}_{ij}$ و $\hat{y}_{rj}$ نیز از رابطه (۲۳) محاسبه خواهد شد:

$$
a_{ij}^2 = \frac{(OP_{ij} - PE_{ij})^2}{36} \quad , \quad b_{rj}^2 = \frac{(OP_{rj} - PE_{rj})^2}{36} \qquad (۲۳)
$$

۵-۲- مدل پیشنهادی با اوزان فازی

در این مرحله، جهت رفع مشکل توزیع غیر واقعی اوزان به ورودی ها و خروجی ها، پرسشنامه مقایسات زوجی جهت اعمال نظر تصمیم گیری گروهی مدیران تهیه می گردد. حال اگر اوزان ورودی ها و خروجی ها که با توجه به پرسشنامه مقایسات زوجی و نهایتاً از میانگین هندسی نظرات بدست می آید (رابطه (۲)) را در مدل (۲۱) قرار دهیم، درنهایت میزان کارایی محاسبه شده هر شعبه با در نظر گرفتن نظر خبرگان بدست می آید. اما از آنجا که با قرار دادن این اوزان در مدل (۲۱)، مسئله به هنگام حل ممکن است منجر به جواب های غیرموجه شود، بنابراین برای اوزان بدست آمده می بایستی یک منطقه اطمینان لحاظ شود. بدین منظور در این تحقیق یک منطقه اطمینان فازی با وارد کردن متغیر فازی α (که مقداری بین صفر و یک است) در مدل برای اوزان ورودی ها و خروجی ها طراحی می گردد. در این تحقیق فرض بر آن است که حداقل وزن تخصیص داده شده به هریک از ورودی ها و خروجی ها برابر صفر و حداکثر برابر سه برابر اوزان هر یک از پارامترها می باشد. بنابراین با استفاده از برش α برای اوزان خواهیم داشت:

$$
f_i - f_i(1-a) \le v_i \le f_i + 2f_i(1-a)
$$

$$
f_r' - f_r'(1-a) \le u_r \le f_r' + 2f_r'(1-a) \qquad (۲۴)
$$

با ساده کردن هر کدام از محدودیت های کراندار رابطه (۲۴) می توان آن ها را بصورت دو محدودیت زیر نوشت:

$$
\begin{aligned}
&v_i \ge f_i a \\
&v_i \le 3f_i - 2f_i a \\
&\text{و} \\
&u_r \ge f_r' a \\
&u_r \le 3f_r' - 2f_r' a
\end{aligned}
\qquad (۲۵)
$$

در نهایت با اضافه کردن محدودیت های (۲۵) به رابطه (۲۱) مدل پیشنهادی با اوزان فازی به شکل زیر خواهد بود:

$$Max \quad \sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{rk}$$

$$st:$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \bar{x}_{ik} - \sqrt{\sum_{r=1}^{s} u_r^2 b_{rk}^2 \sigma^2 + \sum_{i=1}^{m} v_i^2 a_{ik}^2 \sigma'^2}\, F^{-1}(1-a_k) = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{rj} - \beta_j \sum_{i=1}^{m} v_i \bar{x}_{ij} +$$

$$\sqrt{\sum_{r=1}^{s} u_r^2 b_{rj}^2 \sigma^2 + \sum_{i=1}^{m} v_i^2 a_{ij}^2 \sigma'^2}\, F^{-1}(1-\alpha) \le 0$$

$$j = 1,\ldots,n$$

$$v_i \ge f_i a \qquad (۲۶)$$

$$v_i \le 3f_i - 2f_i a$$

$$u_r \ge f_r' a$$

$$u_r \le 3f_r' - 2f_r' a$$

$$u_r \ge 0 \quad , \quad r = 1,\ldots,s \quad , \quad v_i \ge 0 \quad , \quad i = 1,\ldots,m$$

هرچه مقدار α، به یک نزدیک تر باشد کارایی محاسبه شده مدل قطعی تر و منجر به اعمال دقیقتر نظر خبرگان می شود و هر چه مقدار α به صفر نزدیک تر باشد، کارایی محاسبه شده مدل فازی بوده و نظر خبرگان در بازه وسیع تری از اوزان لحاظ می شود. با توجه به مرجع [۲۷] برای بدست آوردن مقدار α می بایست ابتدا آن را برابر یک قرار داده و اقدام به حل مدل (۲۶) گردد. اگر نمره کارایی بدست آمده شعب بانک ناموجه گردند مقدار α را تقلیل داده و مجدداً مدل حل خواهد شد که با این کار دامنه انتخاب اوزان پارامترها افزایش می یابد و از احتمال غیر موجه شدن مدل کاسته می شود، ولی ضعف آن، این است که با توجه به اینکه α از سعی و خطا بدست می آید نظر کارشناسان بطور دقیق اعمال نمی شود. در این تحقیق برای رفع ضعف مذکور در مرجع [۲۷] ، برش α محدودیت های فازی در راستای ماکزیمم سازی بمنظور اعمال هر چه دقیق تر نظرات کارشناسان در ارتباط با اوزان ورودی ها و خروجی ها وارد تابع هدف شده و مدل دو هدفه (۲۷) تشکیل خواهد شد:

$$Max \quad \sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{rk}$$

$$Max \quad a$$

$$st:$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \bar{x}_{ik} - \sqrt{\sum_{r=1}^{s} u_r^2 b_{rk}^2 \sigma^2 + \sum_{i=1}^{m} v_i^2 a_{ik}^2 \sigma'^2}\, F^{-1}(1-\alpha_k) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{s} u_r \bar{y}_{rj} - \beta \sum_{i=1}^{m} v_i \bar{x}_{ij} +$$

$$\sqrt{\sum_{r=1}^{s} u_r^2 b_{rj}^2 \sigma^2 + \sum_{i=1}^{m} v_i^2 a_{ij}^2 \sigma'^2}\, F^{-1}(1-\alpha_j) \le 0$$

$$j = 1,\ldots,n$$

$$v_i \ge f_i a \qquad (۲۷)$$

$$v_i \le 3f_i - 2f_i a$$

$$u_r \ge f_r' a$$

$$u_r \le 3f_r' - 2f_r' a$$

$$u_r \ge 0 \quad , \quad r = 1,\ldots,s \quad , \quad v_i \ge 0 \quad , \quad i = 1,\ldots,m$$

در نهایت بمنظور سهولت محاسبات با تبدیل مدل دو هدفه (۲۷) به مدل تک هدفه، مدل پیشنهادی نهایی بمنظور پیش بینی کارایی واحدهای تصمیم گیرنده با اوزان فازی بصورت مدل (۲۸) خواهد بود.

۶- تحلیل داده ها و یافته های پژوهش

مدیریت یک بانک به دنبال پیش بینی عملکرد ۱۰ شعبه (DMU) خود برای دوره مالی آتی بمنظور برنامه ریزی و انجام اقدامات اصلاحی پیشاپیش در راستای افزایش بهره وری آنها می باشد. وی سه متغیر ورودی و دو متغیر خروجی را برای این شعب درنظر گرفته است ورودی ها عبارتند از: هزینه اداری (x_1)، هزینه پرسنلی (x_2) و هزینه اجاره (x_3) و خروجی ها عبارتند از: تسهیلات اعطایی (y_1) و خدمات بین بانکی (y_2) که کلیه پارامترها بر حسب هزار میلیون ریال می باشند.

مقادیر ورودی ها و خروجی های شعب بر مبنای تکنیک PERT/CPM از سوی سرپرستی بانک در قالب خوش بینانه ترین (OP)، محتملترین (ML) و بدبینانه ترین حالت (PE) برآورد گردیده که نتایج به شرح جدول (۱) است.

مدیریت قصد دارد با تخمین کارایی هر شعبه برای دوره مالی آینده، پیشاپیش اقدامات اصلاحی را در راستای بهبود کارایی مجموعه تحت مدیریت خود انجام دهد. کارایی مورد انتظار (β) برای تمامی شعب از سوی سرپرستی بانک برابر ۱ در نظر گرفته شده است

$$
\begin{aligned}
&Max \quad G_1 + G_2 \\
&st: \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i \bar{x}_{ik} - \sqrt{\sum_{r=1}^{s} u_r^2 b_{rk}^2 \sigma^2 + \sum_{i=1}^{m} v_i^2 a_{ik}^2 \sigma'^2} F^{-1}(1-\alpha_k) = 1 \\
&\sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{rj} - \beta_j \sum_{i=1}^{m} v_i \bar{x}_{ij} + \\
&\sqrt{\sum_{r=1}^{s} u_r^2 b_{rj}^2 \sigma^2 + \sum_{i=1}^{m} v_i^2 a_{ij}^2 \sigma'^2} F^{-1}(1-\alpha_j) \le 0 \\
&\sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{rk} \ge G_1 \\
&a \ge G_2 \\
&j = 1, \ldots, n \\
&v_i \ge f_i a \\
&v_i \le 3 f_i - 2 f_i a \\
&u_r \ge f_r' a \\
&u_r \le 3 f_r' - 2 f_r' a \\
&u_r \ge 0 \quad , \quad r = 1, \ldots, s \quad , \quad v_i \ge 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
\qquad (۲۸)
$$

با توجه به اینکه ورودی های مدل ماهیت منفی (هزینه) و خروجی های آن ماهیت مثبت (درآمد) دارند، لذا برای استفاده از مدل پیشنهادی ابتدا باید تمامی ورودی ها و خروجی ها را بی مقیاس کرد. بدین منظور از بی مقیاس سازی خطی زیر استفاده شده است:

$$
\begin{aligned}
&r_{ij} = \frac{MIN\,(X_{ij})}{X_{ij}} \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,\ldots,10; \quad \forall i \\
&r_{rj} = \frac{Y_{rj}}{MAX\,(Y_{rj})} \quad r = 1,2 \quad j = 1,2,\ldots 10; \quad \forall r
\end{aligned}
\qquad (۲۹)
$$

X_{ij} : ورودی iام از شعبه jام Y_{rj} : خروجی rام از شعبه jام

به دلیل ماهیت تصادفی و تأثیرگذار عوامل محیطی با درنظر گرفتن ورودی و خروجی تصادفی با توزیع نرمال ارزش مورد انتظار ورودی ها ($\bar{x}_{ij}$) و واریانس آنها (a_{ij}^2)، همچنین ارزش مورد انتظار خروجی ها ($\bar{y}_{rj}$) و واریانس آنها (b_{rj}^2) با استفاده از روابط (۲۲) و (۲۳) به شرح جدول (۲) می باشد.

جدول (۱): مقادیر ورودی ها و خروجی های نظر سنجی شده شعب

کد شعبه	ورودی ها									خروجی ها					
	هزینه اداری (X_{1j})			هزینه پرسنلی (X_{2j})			هزینه اجاره (X_{3j})			تسهیلات اعطایی (Y_{1j})			خدمات بین بانکی(Y_{2j})		
	OP	ml	PE	OP	ml	PE	OP	ml	PE	OP	ml	PE	OP	ml	PE
۱	۲۸/۷۵	۴۰/۴۱	۴۹/۸۰	۲۲۰/۸۰	۲۷۷/۷۳	۳۳۴/۶۵	۶۳/۶۰	۹۳/۶۰	۱۲۱/۵۰	۱۰۴۴۳	۹۹۶.۵۰	۹۸۵.۳۰	۱۸۳/۵۰	۱۴۱/۲۰	۱۰۷/۴۱
۲	۱۷/۵۸	۲۸/۱۲	۴۱/۱۰	۲۹۶/۷۰	۳۳۰/۶۰	۴۱۴	۱۵۱/۵۰	۲۰۴/۳۰	۲۴۱	۱۰۳۴۲	۹۹۳۴	۹۷۵۶	۲۷۹/۲۰	۲۲۵/۶۵	۱۹۶/۹۲
۳	۱۳/۵۵	۳۰/۸۳	۴۳/۶۵	۲۷۳	۳۴۷	۴۳۰	۹۲	۱۵۴	۲۰۰	۲۹۹۸۶	۲۹۴۹۵	۲۹۰۰۹	۳۵۴/۵۵	۲۸۹/۲۰	۲۲۲/۱۱
۴	۱۱/۶۰	۱۸/۸۰	۳۰/۸۵	۲۵۸/۷۵	۳۱۵/۳۳	۳۷۲/۶۰	۱۲۵	۱۵۹/۳۰	۲۰۲	۱۰۰۳۸	۹۵۹۷	۹۱۴۱	۱۴۴/۲۹	۱۰۹/۱۲	۷۳/۱۳
۵	۱۸/۰۲	۲۷/۸۵	۳۶/۱۲	۲۱۰/۴۵	۲۱۷/۷۰	۲۸۹/۸۰	۱۰۸	۱۵۱/۵۰	۱۸۱/۸۰	۱۸۰۰۴	۱۷۴۲۲	۱۷۲۲۷	۲۳۶/۵۰	۱۹۲/۰۲	۱۴۳/۵۱
۶	۲۳/۵۰	۳۲/۱۹	۴۲/۳۵	۳۶۰/۷۵	۳۸۱/۸۷	۴۱۷/۴۵	۱۴۴	۱۶۶/۳۲	۲۲۳/۳۰	۱۲۵۷۰	۱۲۳۰۵	۱۱۹۲۳	۱۵۳/۶۳	۱۳۰/۹۱	۸۱/۴۰
۷	۱۷/۳۰	۲۶/۲۰	۳۶/۵۰	۲۹۳/۲۵	۳۵۹/۸۰	۴۰۲/۲۵	۱۵۷/۳۰	۱۷۴/۵۵	۲۳۸/۶۵	۲۳۰۴۷	۲۲۷۷۴	۲۲۱۴۲	۲۳۷/۱۰	۱۹۴/۲۲	۱۶۰/۹۳
۸	۱۱/۳۰	۱۸/۴۴	۲۴/۱۴	۱۹۶/۶۵	۲۶۲/۵۵	۳۰۹/۷۵	۱۲۶	۱۹۰/۵۰	۲۱۰/۵۰	۹۷۶۴	۹۰۰۸	۸۹۰۳	۱۹۰	۱۵۰/۷۳	۱۱۲/۰۱
۹	۱۱/۵۶	۲۱/۷۴	۳۱/۸۱	۲۶۲/۲۰	۳۰۳/۹۵	۳۷۶/۰۵	۱۷۷	۲۲۶/۵۰	۲۷۰	۱۳۰۷۰	۱۲۹۶۰	۱۲۳۲۶	۱۷۴/۸۱	۱۳۸/۴۳	۱۰۱/۲۲
۱۰	۱۱/۵۵	۱۸/۳۲	۲۴/۸۵	۳۱۳/۹۵	۳۷۶/۹	۴۳۰/۴۵	۲۶۰/۱۰	۳۲۷	۳۷۰/۰۵	۳۳۶۰۵	۳۳۰۳۰	۳۲۵۰۵	۳۲۵/۲۳	۳۰۱/۴۲	۲۱۸/۴۳

جدول (۲): ارزش های انتظاری و واریانس های ورودی ها و خروجی های شعب

کد شعبه	$\bar{X}_{1j}$	a^2_{1j}	$\bar{X}_{2j}$	a^2_{2j}	$\bar{X}_{3j}$	a^2_{3j}	$\bar{Y}_{1j}$	b^2_{1j}	$\bar{Y}_{2j}$	b^2_{2j}
۱	۴۰/۰۳	۱۲/۳۱	۲۷۷/۷۳	۳۶۰/۰۵	۹۳/۲۵	۹۳/۱۲	۱۰۰۲۷/۳۸	۹۵۹۴/۲۰	۱۴۲/۶۲	۱۶۰/۸۲
۲	۲۸/۵۳	۱۵/۳۷	۳۳۸/۸۵	۳۸۲/۲۰	۲۰۱/۶۲	۲۲۲/۵۱	۹۹۷۲/۳۲	۹۵۴۲/۰۳	۲۲۹/۷۹	۱۸۸/۰۶
۳	۳۰/۰۹	۲۵/۱۷	۳۴۸/۲۶	۶۸۹/۵۰	۱۵۱/۰۷	۳۲۴	۲۹۴۹۵/۸۳	۲۶۵۱۴/۶۹	۲۸۸/۹۱	۴۸۷/۲۴
۴	۱۹/۶۱	۱۰/۲۹	۳۱۵/۴۵	۳۶۰/۰۵	۱۶۰/۷۰	۱۶۴/۶۹	۹۵۹۴/۴۸	۲۲۳۵۵/۲۳	۱۰۸/۹۸	۱۴۰/۶۶
۵	۲۷/۵۹	۹/۱۰	۲۲۸/۵۱	۱۷۴/۹۰	۱۴۹/۳۰	۱۵۱/۲۹	۱۷۴۸۶/۵۰	۱۶۷۷۰/۲۵	۱۹۱/۳۵	۲۴۰/۱۹
۶	۳۲/۴۴	۹/۸۷	۳۷۵/۲۸	۳۴۰/۴۰	۱۷۲/۱۰	۱۷۴/۶۸	۱۲۲۸۵/۵۰	۱۱۶۲۸/۰۳	۱۲۶/۴۴	۱۴۴/۹۰
۷	۲۶/۴۳	۱۰/۲۴	۳۵۵/۷۸	۳۳۰/۰۱	۱۸۲/۳۶	۱۸۳/۸۳	۲۲۷۱۴/۱۷	۲۲۷۵۰/۴۴	۱۹۵/۸۲	۱۶۱/۱۷
۸	۱۸/۲۰	۴/۵۸	۲۵۹/۴۳	۳۵۵/۳۴	۱۸۳/۰۸	۱۹۸/۳۴	۹۱۱۶/۵۰	۲۰۵۹۲/۲۵	۱۵۰/۸۲	۱۶۸/۹۷
۹	۲۱/۷۲	۱۱/۳۹	۳۰۹/۰۱	۳۶۰/۰۵	۲۲۵/۵۰	۲۴۰/۲۵	۱۲۸۷۲/۶۷	۱۵۳۷۶	۱۳۸/۲۹	۱۵۰/۴۵
۱۰	۱۸/۲۸	۴/۹۱	۳۷۵/۳۴	۳۷۶/۹۷	۳۲۳/۰۳	۳۳۵/۸۱	۳۳۰۳۸/۳۳	۳۳۶۱۱/۱۱	۲۹۱/۵۵	۳۱۶/۸۳

به منظور اطلاع از ترجیحات ذهنی کارشناسان در خصوص اوزان ورودی ها و خروجی ها، پرسش نامه مقایسات زوجی برای ورودی ها و خروجی ها بصورت جداگانه تهیه و میان سه نفر از معاونین هم رده سرپرستی بانک توزیع گردید که در نهایت وزن ترجیحی هر یک از ورودی ها و خروجی ها با استفاده از تکنیک تصمیم گیری گروهی (رابطه (۲)) به صورت جدول (۳) بدست آمده است.

جدول (۳): اوزان مربوط به ورودی ها و خروجی ها

خروجی ها		ورودی ها		
خدمات بین بانکی	تسهیلات اعطایی	هزینه اجاره	هزینه پرسنلی	هزینه اداری
۰/۳۱	۰/۶۹	۰/۴۳	۰/۲۳	۰/۳۴

با استفاده از مدل پیشنهادی (۲۸)، مقادیر کارایی های پیش بینی شده شعب برای دوره مالی آتی به ازای α های متفاوت و سطح کارایی مورد انتظار (β) برابر یک محاسبه گردید که نتایج به شرح جدول (۴) بدست آمده و کلیه محاسبات توسط کامپیوتر شخصی تحت سیستم عامل ویندوز ۷ و نرم افزار بهینه سازی Lingo 11.0 حاصل شده است.

جدول (۴): مقادیر کارایی پیش بینی شده براساس مدل پیشنهادی

کد شعبه	β=۱								
	α=۰/۹۵	α=۰/۹	α=۰/۸	α=۰/۷	α=۰/۶	α=۰/۵	α=۰/۴	α=۰/۳	میانگین
۱	۰/۳۲	۰/۴۴	۰/۴۱	۰/۳۵	۰/۳۳	۰/۲۹	۰/۲۶	۰/۲۸	۰/۳۳
۲	۰/۵۰	۰/۵۴	۰/۶۰	۰/۵۲	۰/۵۵	۰/۵۸	۰/۶۳	۰/۷۲	۰/۵۸
۳	۰/۵۵	۰/۶۷	۰/۹۴	۰/۹۵	۰/۹۳	۰/۹۱	۰/۸۸	۰/۸	۰/۸۳
۴	۰/۲۶	۰/۳۲	۰/۳۲	۰/۳	۰/۲۸	۰/۲۶	۰/۲۵	۰/۲۴	۰/۲۸
۵	۰/۴۲	۰/۵۷	۰/۶۰	۰/۵۵	۰/۵۱	۰/۴۷	۰/۴۶	۰/۴۷	۰/۵۱
۶	۰/۳۲	۰/۳۹	۰/۴۳	۰/۴۴	۰/۴۴	۰/۴۳	۰/۴۳	۰/۳۶	۰/۴۱
۷	۰/۵۷	۰/۶۶	۰/۷۶	۰/۷۴	۰/۷	۰/۶۸	۰/۶۶	۰/۶۵	۰/۶۸
۸	۰/۳۴	۰/۴۲	۰/۳۹	۰/۳۳	۰/۳۱	۰/۲۸	۰/۲۷	۰/۲۸	۰/۳۳
۹	۰/۳۵	۰/۴۲	۰/۴۲	۰/۴۳	۰/۴۳	۰/۴۱	۰/۳۹	۰/۳۸	۰/۴۰
۱۰	۰/۶۸	۰/۸۹	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰/۹۵

به منظور بررسی اعتبار و صحت کارایی های پیش بینی شده حاصل از مدل پیشنهادی، می بایست این نتایج با کارایی های واقعی شعب مورد مقایسه قرار گیرند. بدین منظور پس از سپری شده دوره مالی مورد پیش بینی، مقادیر کارایی های واقعی شعب به کمک ورودی ها و خروجی های واقعی آنها (جدول ۵) و نیز مدل متعارف تحلیل پوششی داده ها (CCR) محاسبه شده و با کارایی های پیش بینی شده مورد مقایسه قرار گرفتند (جدول۶). نرخ همبستگی پیرسون بالای بین نتایج کارایی پیش بینی شده و کارایی واقعی (برابر ۰/۹۸۸) بیانگر اعتبار و صحت مدل ارائه شده و توانایی بالای آن در تفکیک واحدهای کارا می باشد.

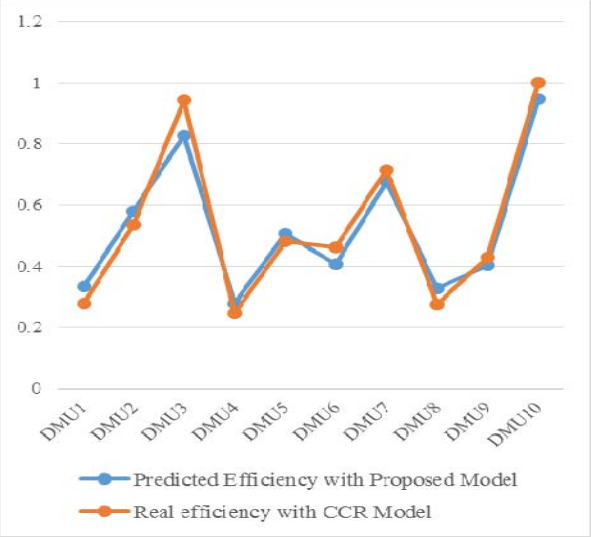
جدول (۵): مقادیر واقعی ورودی ها وخروجی ها در پایان دوره

کد شعبه	ورودی ها			خروجی ها	
	هزینه اداری	هزینه پرسنلی	هزینه اجاره	تسهیلات اعطایی	خدمات بین بانکی
۱	۴۰/۴۱	۲۷۶	۹۰/۳۰	۹۶۷۵	۱۵۸/۷۵
۲	۳۱/۲۱	۳۲۷/۷۵	۱۹۰/۵۰	۹۱۶۰	۲۱۵/۰۴
۳	۳۴/۴۶	۳۴۵	۱۴۷	۲۹۵۹۷	۳۱۰/۶۸
۴	۱۶/۶۷	۳۱۷/۴۰	۱۶۱	۹۱۴۰	۱۱۵/۷۲
۵	۲۹/۱۰	۲۱۷/۳۵	۱۵۵/۸۵	۱۷۲۹۳	۱۹۶/۹۳
۶	۳۵/۸۵	۳۷۹/۵۰	۱۶۳/۶۲	۱۲۴۳۲	۱۴۶/۱۸
۷	۲۷/۵۸	۳۵۹/۱۰	۱۷۰/۱۳	۲۳۱۸۸	۲۱۰/۲۲
۸	۱۴/۲۱	۲۶۲/۲۰	۱۹۲/۹۵	۱۰۱۲۴	۱۵۲/۶۵
۹	۲۳/۸۰	۳۰۳/۶۰	۲۵۹	۱۲۵۱۰	۱۳۵/۵۱
۱۰	۱۶/۳۰	۳۷۶/۹۱	۳۲۳	۳۲۱۴۴	۳۲۲/۱۹

جدول (۶): مقایسه کارایی های واقعی با کارایی پیش بینی شده و ضریب همبستگی بین آنها

کد شعبه	رتبه بندی واقعی	رتبه بندی تخمینی	کارایی واقعی	کارایی پیش بینی شده
۱	۸	۸	۰/۲۷۹۷	۰/۳۳۳۳
۲	۴	۴	۰/۵۳۵۳	۰/۵۸۰۶
۳	۲	۲	۰/۹۴۱۸	۰/۸۲۸۳
۴	۱۰	۱۰	۰/۲۴۵۷	۰/۲۷۹۶
۵	۵	۵	۰/۴۸۱۵	۰/۵۰۶۴
۶	۶	۶	۰/۴۶۱۰	۰/۴۰۶۶
۷	۳	۳	۰/۷۱۵۹	۰/۶۷۸۴
۸	۹	۹	۰/۲۷۶۹	۰/۳۲۶۹
۹	۷	۷	۰/۴۳۰۶	۰/۴۰۳۹
۱۰	۱	۱	۱	۰/۹۴۵۹
ضریب همبستگی بین کارایی واقعی و کارایی پیش بینی شده			۰/۹۸۸	

همچنین شکل (۲) مقایسه ای بین نتایج کارایی های پیش بینی شده توسط مدل پیشنهادی با کارایی های واقعی شعب به تصویر کشیده است. همانطور که قابل مشاهده است کارایی های پیش بینی شده به کارایی های واقعی نزدیک و دقت بالایی دارد .



شکل (۲): مقایسه کارایی های پیش بینی شده شعب توسط مدل پیشنهادی با کارایی های واقعی آن ها

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله در راستای اهمیت پیش بینی کارایی واحدهای تصمیم گیرنده بمنظور برنامه ریزی و انجام اقدامات اصلاحی پیشاپیش در راستای افزایش بهره وری آنها، مدلی جدید با لحاظ عدم قطعیت در تحلیل پوششی داده‌های تصادفی (SDEA) ارائه گردید که با درنظرگرفتن همزمان ورودی ها و خروجی های واحدها بصورت متغیرهای تصادفی نرمال همراه با اوزان فازی برای آن ها طراحی گردید. با در نظر گرفتن تأثیر تصادفی عوامل محیطی بر ورودی ها و خروجیها، مدل ارائه شده در این تحقیق در جهت رفع مهمترین نقاط ضعف مدل های DEA یعنی عدم امکان پیش بینی کارایی، تعدد واحدهای کارا در نتایج و توزیع غیر واقعی اوزان به ورودی ها و خروجی های واحدها ارائه گردید و با کاهش تعدد شعب کارا در نتایج، توان افتراق بالایی دارد. در انتها به منظور اعتبارسنجی و اثربخشی مدل پیشنهادی، به ارائه یک مطالعه کاربردی در صنعت بانکداری پرداخته شد، که در آن کارایی های شعب برای دوره مالی آتی آنها توسط مدل پیشنهادی پیش بینی گردید و کاراییهای واقعی شعب مورد مقایسه قرار گرفت. همبستگی بالای بین نتایج حاکی از عملکرد و دقت بالای مدل پیشنهادی دارد. در نهایت پیشنهاد می شود محققین به توسعه مدل پیشنهادی با فرض توزیعات آماری غیرنرمال برای ورودی ها و خروجی ها واحدهای تصمیم گیرنده بپردازند. همچنین پیشنهاد می شود در تحقیقات آتی برای حل مدل

چندهدفه و تبدیل آن به یک مدل تک هدفه از تابع عضویت خطی و مفهوم تصمیم گیری فازی استفاده گردد و نتایج آن با نتایج این تحقیق مورد مقایسه قرار گیرند. در این مقاله از مدل CCR برای طراحی مدل پیشنهادی استفاده گردید که برای تحقیقات آتی پیشنهاد می شود از مدل هایی نظیر BCC، BCC-CCR، CCR-BCC، راسل، SBM و دیگر مدل های کلاسیک تحلیل پوششی داده ها استفاده شود.

منابع و مأخذ

[1] Adler, N., Yazhemsk, E., (2010), **Improving Discrimination in Data Envelopment Analysis: PCA-DEA or Variable Reduction**, European Journal of Operational Research, 202(1), 273-284.

[2] Ahmadvand, A., Abtahy, Z., Bashiri, M., (2011), **Considering Undesirable Variables in PCA-DEA Method: A Case of Road Safety Evaluation in Iran**, Journal of Industrial Engineering, 7(15), 43-50.

[3] Amiri, M., (1395), **Multi-Criteria Decision Making**.

[4] Azar, A., Rajabzadeh, A., (1381), **Applied Decision Making with MADM Approach**, first edition, Tehran: Publisher: Negahe danesh.

[5] Charnes, A., Cooper, W.W., Wei, Q.L., Huang, Z.M., (1989), **Cone-Ratio Data Envelopment Analysis and Multi Objective Programming**, Int. J. Syst. Sci., 20, pp. 1099-1118.

[6] Charns, C., Rouds, K., (1978), **Data Envelopment Analysis**, References and DEA solver software, Kluwer Academic Press.

[7] Cooper, W.W., Deng, H., Huang, Z., Li, SX., (2002), **Chance Constrained Programming Approach to Technical Efficiencies**, Journal of the Operational Research Society, No 53, PP 1347-1354.

[8] Cooper, W.W., Huang, Z.M., Li, S.X., (1996), **Satisfying DEA Models under Chance Constraints**, Annual of operation research, 66, pp. 541-544.

[9] Cooper, W.W., Huang, Z.M., Lelas, V., Li, S.X., Olesen, O.B., (2006), **Chance Constrained Programming Formulations for Stochastic Characterizations of Efficiency and Dominance in DEA**, Journal of productivity analysis, 9, pp. 53-79.

[10] Dyson R.G., Thanassoulis, E., (1988), **Reducing Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis**, Journal of Operational Research Society, 39, pp. 563-576.

[11] Ehrgott, M., Holder, A., Nohadani, O., (2018), **Uncertain Data Envelopment Analysis"**. European Journal of Operational Research, 268(1), 231-242.

[12] Fetti, M., Jackson, P., Jones, W., (2001), **European Airlines: A Stochastic DEA Study of Efficiency with Market Liberalization**, European workshop of efficiency and productivity analysis.

[13] Haneh, A., (2016), **Provide a Computation Model for Randomized Data Envelopment Analysis for a Two-Stage Network**, The 2nd International Conference on New Research in Science, Engineering and Technology, Istanbul, Turkey, Faraz University of Science and Technology International.

[14] Huang, Z.M., SX, Li., (2004), **Chance Constrained Programming and Stochastic DEA Models**, Proceeding of the Decision Sciences Institute, pp. 447-449.

[15] Jahanshahloo G., Alirezaee, M., Saati, S., Mehrabian, S., (1997), **The Role of Bounds on Multipliers in DEA; with an Empirical Study**, Journal of Sciences, Islamic Azad University, 19, pp. 331-347.

[16] Kao, C., Liu, S.T., (2018), **Stochastic Efficiency Measures for Production Units with Correlated Data**, European Journal of Operational Research, 425(1), 124-135.

[17] Land, K., Lovell, C.A.K., Thore, S., (1993), **Chance Constrained Data Envelopment Analysis**, Managerial and decisional economics, No14, PP541-544.

[18] Niranjan, R., Nataraja, L., Andrew, J., (2011), **Guidelines for Using Variable Selection Techniques in DEA**, European Journal of Operational Research, 215, 662-669.

[19] Podinovski, V., Thanassoulis, E., (2007), **Improving Discrimination in Data Envelopment Analysis**, Journal of Productivity Analysis, 28, 117-126.

[20] POP. H.S., (2004), **Data Analysis with Fuzzy Sets: a Short Survey**, Studio University babes-bolyai, informatics, x1cx(2).

[21] Roll Y., Golany, B., (1993), **Alternate Methods of Treating Factor Weights in DEA**, Omega, 21, pp. 99-109.

[22] Saati S., Memariani, A., Jahanshahloo, G.R., (2003), **A Procedure for Finding a Common Set of Weight in Fuzzy DEA**, Fuzzy Sets and Systems, forthcoming.

[23] Sabzeparvar, M., (1381), **Project Control**, first edition, Tehran: Publisher: Khaniran.

[24] Sengupta, JK., (1982), **Stochastic Programming**, International journal of system science, 7, pp. 822-835.

[25] Shanmugam, R., Johnson, Ch., (2007), **At a Crossroad of Data Envelopment and Principal Component Analyses**, Omega, 35(4), 351-364.

[26] Shavandi, H., (2016), **Fuzzy Set Theory Application in Industrial Engineering and Management**, first edition, Tehran: Publisher: Gostares olome paye.

[27] Yaghoubi, A., Amiri, M., (2009), **Presentation of a Model for Estimating Efficiency Based on the Technique of Data Envelopment Analysis of Random Data with Fuzzy Weights**, Sharif Scientific and Research Journal, 49, pp.47-55.

[28] Yaghoubi, A., Amiri, M., Safi samghabadi, A., (2017)., **A New Dynamic Random Fuzzy DEA Model to Predict Performance of Decision Making Units**, Journal of Optimization in Industrial Engineering, 20. 75-90.