مقاله تحقیقی

مدل‌سازی روش تکامل طبیعی برای حل مسائلی در حساban فازی

غلام‌حسن شیردل*

دانشگاه قم، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی و علوم‌کامپیوتر، قم، ایران

***مسئول مکاتبات:** غلام‌حسن شیردل، دانشگاه قم، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، پست الکترونیکی: Shirdel81math@gmail.com

محل انجام تحقیق: گروه ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه قم

تاریخ دریافت: ۹۹/۶/۹ تاریخ پذیرش: ۹۹/۷/۸

چکیده

در این مقاله با داشتن مقادیر یک تابع وزن در n نقطه، یک اندازه فازی پارامتری تعریف می‌کنیم. با استفاده از خواص اندازه فازی یک معادله طراحی کرده که با حل آن پارامتر اندازه فازی بدست می‌آید. معادله طراحی شده را با یک الگوریتم ژنتیک حل کرده و بدینوسیله امکان حل انتگرال‌های فازی را ایجاد می‌کنیم.

کلمات کلیدی: اندازه فازی، انتگرال فازی، الگوریتم ژنتیک

مقدمه

در مواردی از یک تابع وزن برای رتبه‌بندی، مقایسه و انتخاب استفاده می‌شود (۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷). رتبه‌بندی، مقایسه و انتخاب می‌تواند به روش‌های متفاوتی انجام گیرد (۴،۵،۷،۸). داده‌ها در خیلی از سیستم‌هایی که باید در آن‌ها فرآیند رتبه‌بندی، مقایسه و انتخاب انجام شود، فازی هستند. به همین جهت لازم است روش‌هایی طراحی شوند که بتوان با اجرای آن‌ها روی داده‌های فازی انتخاب مناسبی انجام شود (۱،۲،۳).

یکی از این روش‌ها ساختن یک اندازه و انتگرال فازی است. در این مقاله یک اندازه فازی پارامتری تعریف کرده، سپس با استفاده از آن یک نوع از انتگرال‌های فازی را حل میشود (۹،۱۰،۱۱،۱۲،۱۳،۱۴). حل انتگرال‌های فازی فوق نیاز به داشتن مقدار پارامتر اندازه فازی دارد. برای بدست آوردن پارامتر فوق از خواص اندازه فازی استفاده کرده و یک معادله غیرخطی دو مجهولی بدست می‌آید. سپس برای حل معادله بدست آمده با مدل‌سازی روش تکامل طبیعی، یک الگوریتم ژنتیک طراحی کرده و با اجرای آن جواب‌های تقریبی مناسب حاصل می شود.

مفاهیم پایه‌ای

در این بخش، مفاهیم پایه‌ای مورد نیاز برای بخش‌های بعد را بیان می‌کنیم.

تعریف۱. اندازه فازی (15): فرض کنید X یک مجموعه و $P(X)$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های X باشد. تابع مجموعه‌ای $g:P(X)\to[0,1]$ یک اندازه فازی نامیده می‌شود هرگاه:

۱. $g(\phi)=0$

۲. $g(X)=1$

۳. برای هر $A,B \in P(X)$ ، اگر $A \subset B$ ، آنگاه $g(A) \le g(B)$

۴. در $P(X)$ ، اگر $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ ، آنگاه $\lim_{i\to\infty} g(A_i) = g(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$

۵. در $P(X)$ ، اگر $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ ، آنگاه $\lim_{i\to\infty} g(A_i) = g(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$.

اکنون اندازه فازی پارامتری را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

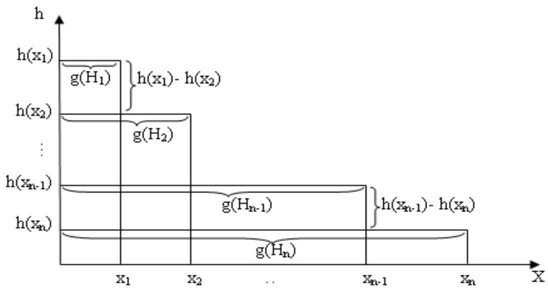
تعریف۲ (۱۵): تابع مجموعه‌ای $g_\lambda : P(X) \to [0,1]$ یک λ-اندازه فازی نامیده می‌شود اگر وتنها اگر وجود داشته باشد پارامتر λ بطوریکه $\lambda \in (-1,\infty)$ و

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A) g_\lambda(B) \quad (۱)$$

که $A,B \in P(X)$ و $A \cap B = \phi$.

انتگرال فازی: فرض کنید که $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ و g یک اندازه فازی روی X باشد. انتگرال تابع $h : X \to [0,1]$ نسبت به g بصورت $\int h dg := \sum_{i=1}^{n} (h(x_i) - h(x_{i+1})) g(H_i)$ تعریف می‌شود که در مجموع فوق $H_i = \{x_1, x_2, \ldots, x_i\}$ ، $h(x_{n+1})=۰$ و پس از یک تجدید ارایش مناسب می توان بدون کاسته شدن از کلیت مساله فرض کرد که $0 \le h(x_n) \le h(x_{n-1}) \le \ldots \le h(x_1) \le 1$.

شکل۱ درک مفهوم تعریف انتگرال فازی فوق را ساده می‌کند (۱۴).



شکل۱: مفهوم پایه‌ای انتگرال فازی

لم۱. فرض کنید $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ، در این صورت برای هر اندازه فازی g روی X و برای هر تابع $h : X \to [0,1]$ داریم:

$$\int h dg := \sum_{i=1}^{n} h_i dg_i$$

اثبات: برطبق تعریف انتگرال فازی داریم:

$$\int h dg := \sum_{i=1}^{n} (h(x_i) - h(x_{i+1})) g(H_i)$$

حال از آن جا که $h(x_{n+1}) = 0$ ، $g_0 = g(\phi) = 0$ و $g(X) = g(H_n) = 1$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}(h_i-h_{i+1})g_i=\sum_{i=1}^{n}h_ig_i-\sum_{i=1}^{n}h_{i+1}g_i$$
$$=\sum_{i=1}^{n}h_ig_i-\sum_{i=2}^{n+1}h_ig_{i-1}$$
$$=h_1g_1+\sum_{i=2}^{n}h_ig_i-\sum_{i=2}^{n}h_ig_{i-1}-h_{n+1}g_n$$
$$=h_1g_1-h_1g_0+\sum_{i=2}^{n}h_i(g_i-g_{i-1})$$
$$=\sum_{i=1}^{n}h_i(g_i-g_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}h_idg_i\,.$$

محاسبه انتگرال فازی

برای محاسبه انتگرال فازی باید پارامتر اندازه فازی را تعیین کنیم. برای این منظور با فرض اینکه برای w_i ،$i=1,2,\ldots,n$ مقدار n یک تابع وزن باشد، قرار می‌دهیم:

$$g_i=g(\{x_i\})=cw_i\,,\qquad i=1,2,\ldots,n \tag{۲}$$

که c یک عدد حقیقی ثابتی می‌باشد. اکنون با توجه به فرض $g(X)=1$ و روابط (۱) و (۲) داریم:

$$c\sum_{\alpha_1=1}^{n}w_{\alpha_1}+c^2\lambda\sum_{\substack{\alpha_1=1,\alpha_2=1\\ \alpha_1\neq\alpha_2,\alpha_1<\alpha_2}}^{n}w_{\alpha_1}w_{\alpha 2}$$
$$+c^3\lambda^2\sum_{\substack{\alpha_1=1,\alpha_2=1,\alpha_3=1\\ \alpha_1\neq\alpha_2\neq\alpha_3,\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3}}^{n}w_{\alpha_1}w_{\alpha 2}w_{\alpha 3}+\ldots+$$
$$c^n\lambda^{n-1}\prod_{\alpha_i=1}^{n}w_{\alpha_i}-1=0 \tag{۳}$$

رابطه (۳) یک معادله غیرخطی دو مجهولی می‌باشد. آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$F(c,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}a_ic^i\lambda^{i-1}-1=0 \tag{۴}$$

که $a_1=\sum_{\alpha_1=1}^{n}w_{\alpha_1}$ ، $a_2=\sum_{\substack{\alpha_1=1,\alpha_2=1\\ \alpha_1\neq\alpha_2,\alpha_1<\alpha_2}}^{n}w_{\alpha_1}w_{\alpha 2}$ ، $a_3=\sum_{\substack{\alpha_1=1,\alpha_2=1,\alpha_3=1\\ \alpha_1\neq\alpha_2\neq\alpha_3,\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3}}^{n}w_{\alpha_1}w_{\alpha 2}w_{\alpha 3}$ ، ... ، $a_n=\prod_{\alpha_i=1}^{n}w_{\alpha_i}$.

برای معادله (۴) یک الگوریتم ژنتیک طراحی می‌کنیم تا مقادیر λ و c را با دقت از پیش تعیین شده‌ای تقریب بزند.

الگوریتم $c-\lambda$-ژنتیک

```
begin
Best_c = 0;
Best_lamda = 0;
alfa = Producealfa(n,w);
for i = 1 : k
c(i) = i/k ;
end
t = k/3 ;
```

```
For i = 1 : t
lamda(i) = -i/t ;
lamda(i+t) = i/t ;
lamda(i) = i+2*t = i^2+1 ;
end
Term = 0;
nk = 3*k;
Gen = 1;
while Term ~= 1 && Gen <= 100
for i = 1 : k
X = rand i(k,1,2,);
l = X(1);
f = X(2);
c(k+i) = (c(l)+c(f))/2 ;
c(2*k+i) = c(l)*c(f) ;
lamda(k+i) = (lamda(l)+lamda(f))/2 ;
lamda(2*k+i) = abs(c(l)*c(f)) ;
end
Fit = Fitness_FCL(n,nk,alfa,c,lamda);
for i = 1 : nk
for j = 1 : nk
if abs(Fit(i,j)) <= (10^(-Ep))
        Term = 1;
        Best_c = c(i);
        Best_lamda = lamda(j);
          end
      end
end
i = nk;
while i > k
         (SX,SY] = size(Fit);
         Max = Max(Max(abs(Fit) ));
         (X,Y] = find(abs(Fit) = Max);
         X = X(1);
         Y = Y(1);
         c(X) = c(SX);
         lamda(Y) = lamda(SY);
         Fit(X,:) = Fit(SX,:);
         Fit(:,Y) = Fit(:,SY);
         Fit = Fit(1 : SX-1,1 : SY-1);
end
Gen = Gen + 1;
function Fitness = Fitness_FCL(n,k,alfa,lamda)
for X = 1 : k
      for Y = 1 : k
```

```
            Fitness(X,Y) = 0;
            for i = 1 : n
Fitness(X,Y)=Fitness(X,Y)+ alfa*(c(x)^i)*(lamda(Y)^(i-1));
            end
            Fitness(X,Y) = Fitness(X,Y) – 1;
       end
end
function alfa = Producealfa(n,w)
alfa(1 : n) = 0;
for X = 1 : n
      start_index(1 : X) = 1 : X;
      stop_index(1 : X) = n - X + 1 : n;
      while start_index(1) <= stop_index(1)
        c = 0;
        P = 1;
        for z = 1 : X;
              P = P*W(start_index(z));
        end
        alfa(X) = alfa(X) + P;
        z = 1;
        while z <= X && c = 0
                  if start_index(z) = stop_index(z)
if z = 1 && isempty(find(start_index = stop_index) = 0))
                    start_index(z)=start_index(z)+1;
                    c = 1;
                   else
                    start_index(z-1)=start_index(z-1)                                   + 1;
                    start_index(z:x)=start_index(z-1)                  + 1 : start_index(z-1) + X
– z + 1;
                   c = 1;
         end
          end
          z = z + 1;
    end
    z = z -1;
    if z=X && start_index(z)<stop_index(z) && c=0
       start_index(z) = start_index(z) + 1;
    end
end
end
```

مثال: در نظر بگیرید $X=\{1,2,3\}$، $g_\lambda : P(X)\rightarrow[0,1]$ و $h: X\rightarrow[0,1]$ که $h(x)=e^{-x}$ و $w_1=w_2=w_3=\frac{1}{3}$. بنابراین داریم:

$$w_1+w_2+w_3=1 \text{،} w_1w_2+w_1w_3+w_2w_3=\frac{1}{3} \text{،} w_1w_2w_3=\frac{1}{27}$$

اکنون با توجه به مقادیر فوق معادله غیرخطی دو مجهولی به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$c+\frac{1}{3}c^2\lambda+\frac{1}{27}c^3\lambda^2-1=0$$

این معادله را با اجرای الگوریتم $c-\lambda$-ژنتیک ارائه شده حل کرده و مقادیر تقریبی برای λ و c بصورت زیر بدست می‌آوریم:

$$c=\frac{1}{2} \text{ و } \lambda=5$$

با استفاده از مقادیر تقریبی بدست آمده برای λ و c داریم:

$$g_1=\frac{1}{6}, g_2=\frac{1}{6}, g_3=\frac{1}{6}, g(\{x_1,x_2\})=\frac{17}{36},$$

$$g\{x_1,x_2,x_3\}=\frac{223}{216},$$

$$\int hdg =$$

$$\sum_{i=1}^{3}(h(x_i)-h(x_{i+1}))g(H_i)=0.128.$$

تقدیر و تشکر

از زحمات و راهنمایی‌های بی‌شائبه داوران گرامی و مدیر مسئول محترم تشکر و قدردانی می نمایم.

منابع مورد استفاده

۱. C. M. Feng, P. G. Wu and K. C. Chia, European Journal Operational Research 192, 451-464 (2009).

۲. M. Grabisch, European Journal of Operational Research 89 (3), 445-456 (1996).

۳. M. Grabisch, Fuzzy Sets and Systems 69, 279-298 (1995).

۴. D. Liginlal and T. T. Ow, Fuzzy Sets and Systems 157, 3040-3054 (2006).

۵. Y. Narukawa and V. Torra, Information Sciences 177, 4686-4695 (2007).

۶. G. H. Tzeng, Y. P. Q. Yang, C. T. lin and C. B. Chen, Information Sciences 169, 409-426 (2005).

۷. S. T. Wierzchon, Fuzzy Sets and Systems 9, 69-78(1983)

۸. T. Onisawa, M. Sugeno, M. Y. Nishiwaki, H. Kawai and Y. Harima, Fuzzy Sets and Systems 20, 259-289 (1986).

۹. A. Basile, Fuzzy Sets and Systems 21, 243-247 (1987).

۱۰. M. T. Chu, Z. Shyu, J. and G. H. Tzeng, IEEE Transactions on Engineering Management 54 (2), 237-339 (2007).

۱۱. L. Galand, P. Perny, O. Spanjaard, European Journal of Operational Research 204 (2), 303-315(2010).

۱۲. Y. C. Hu, Neurocomputing 72, 331-340 (2008).

۱۳. K. Leszczynski, P. Penczek and W. Grochuliski, Fuzzy Sets and Systems 15, 147-158(1985).

۱۴. T. Murofushi and M. Sugeno, Fuzzy Sets and systems 29, 201-227 (1989).

۱۵. M. Grabisch, Fuzzy measures and integrals, Springer Verlag (2000).