

## ۷-مراجع

- [1] Ramkumar K, Ganesan N. Vibration and damping studies on hollow sandwich box column with viscoelastic/electrorheological/magnetorheological fluid core layer by the method of finite element. *Int J Struct Stab Dyn* 46–531:(4)8;2008.
- [2] Maheri MR, Adams RD. Finite element prediction of modal response of damped layered composite panels. *Compos Sci Technol* 23–55:13;1995.
- [3] Yeh Jia-Yi, Chen Lien-Wen. Finite element dynamic analysis of orthotropic sandwich plates with an electrorheological fluid core layer. *Compos Struct* 76–368:(3)78;2007.
- [4] Araújo AL, Martins P, Mota Soares CM, Mota Soares CA, Herskovits J. Damping optimization of viscoelastic laminated sandwich composite structures. *Struct Multidisc Optim* –569:(6)39;2009 79.
- [5] McIntyre ME, Woodhouse J. On measuring the elastic and damping constants of orthotropic sheet materials. *Acta Metall* 416–1397:(6)36;1988.
- [6] Zou Y, Long L, Steven GP. Vibration-based model-dependent damage (delamination) identification and health monitoring for composite structures – a review. *J Sound Vibrat* 378–357:(2)230;2000.
- [7] H. Zheng, C. Cai, X.M. Tan, Optimization of partial constrained layer damping treatment for vibrational energy minimization vibrating beams, *Computers and Structures* 2507–2493 (2004) 82.
- [8] Moreira RAS, Dias Rodrigues J. A layerwise model for thin soft core sandwich plates. *Comput Struct* 63–1256:(20–19)84;2006.
- [9] Plagianakos TS, Saravanos DA. High-order layerwise finite element for the damped free-vibration response of thick composite and sandwich composite plates. *Int J Numer Meth Eng* 626–1593:(11)77;2009.
- [10] Moreira RAS, Dias Rodrigues J, Ferreira AJM. A generalized layerwise finite element for multi-layer damping treatments. *Comput Mech* 44–426:(5)37;2006.
- [11] Pietrzakowski Marek. Active damping of beams by piezoelectric system: effects of bonding layer properties. *Int J Solids Struct* 38;2001 97–7885:(45–44).
- [12] Vishnu Narayana G, Ganesan N. Critical comparison of viscoelastic damping and electrorheological fluid core damping in composite sandwich skew plates. *Compos Struct* 33–221:(2)80;2007.
- [13] Ni RG, Adams RD. The damping and dynamic moduli of symmetric laminated composite beams. Theoretical and experimental results. *Compos Sci Technol* 21–18:104;1984.
- [14] Woodhouse J. Linear damping models for structural vibration. *J Sound Vibrat* 69–547:(3)215;1998.
- [15] Hibbitt, Karlsson and Sorencen, Inc., ABAQUS/Standard User's Manual vol. I, II, III; 2001.
- [16] De Lima AMG, Faria AW, Rade DA. Sensitivity analysis of frequency response functions of composite sandwich plates containing viscoelastic layers. *Compos Struct* 76–364:(2)92;2010.
- [17] Sulmoni M, Gmür T, Cugnoni J, Matter M. Modal validation of sandwich shell finite elements based on a p-order shear deformation theory including zigzag terms. *Int J Numer Meth Eng* 19–1301:(11)75;2008.
- [18] Lin DX, Ni R, Adams RD. Prediction and measurement of the vibrational parameters of carbon and glass-fibre reinforced plastic plates. *J Compos Mater* 52–18:132;1984.
- [19] Cupial P, Niziol J. Vibration and damping analysis of a three-layered composite plate with a viscoelastic mid-layer. *J Sound Vib* –99:(1)183;1995 114.
- [20] Gibson RF. Modal vibration response measurements for characterization of composite materials and structures. *Compos Sci Technol* 80–60:2769;2000.
- [21] D.K. Rao, Frequency and loss factors of sandwich beams under various boundary conditions, *IMEchE Journal of Mechanical Engineering Science* 282–271 (1978) (5) 20.
- [22] M.D. Rao, Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes, *Journal of Sound and Vibration* 474–457 (2003) (3) 262.
- [23] Tang B. Combined dynamic stiffness matrix and precise time integration method for transient forced vibration response analysis of beams. *J Sound Vibrat* 76–309:868;2008.

## مدل سازی ۲۱ درجه آزادی و تحلیل دینامیکی واگن مسافری ایران

• حمید توکلی<sup>۱</sup>• جواد علیزاده کاکلر<sup>۲</sup>

Email: J\_alizadeh@dena.kntu.ac.ir

## چکیده

واگن قطار در حرکت بر روی ریل دچار ارتعاشاتی می شود که مهم ترین آن ها ارتعاشات عرضی است. ارتعاشات عرضی واگن در سرعت های بالا موجب نوعی ناپایداری با نام هانتینگ می شود. در این مقاله، مدل ریاضی یک واگن مسافری سرعت بالا ایجاد و در یک مسیر مستقیم تحلیل دینامیکی شده است. برای استخراج معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر حرکت واگن، از تئوری خزش غیر خطی هئوریستیک استفاده شده است. ۲۱ درجه آزادی برای وسیله نقلیه ریلی در نظر گرفته شده که عبارتند از: جابجایی جانبی و تغییر زاویه یابو برای هر چرخ و محور، جابجایی جانبی، جابجایی عمودی، تغییر زاویه رول و تغییر زاویه یابو برای قاب بوژی ها، جابجایی جانبی، جابجایی عمودی، تغییر زاویه رول، تغییر زاویه پیچ و تغییر زاویه یابو برای بدنه واگن. معادلات حاکم توسط نرم افزار توانمند ریاضی Matlab حل شده اند.

**کلمات کلیدی:** مدل سازی دینامیکی، هانتینگ، تئوری تماس غیرخطی.

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد

۲. دانشجوی دکتری دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

فهرست علائم

$a$	نصف فاصله مسیر ریل	$I_{cy}$	ممان اینرسی پیچ بدنه واگن
$b_1$	نصف فاصله میان فنر یاو اولیه و دمپر یاو اولیه	$I_{cz}$	ممان اینرسی یاو بدنه واگن
$b_2$	نصف فاصله میان فنر طولی ثانویه و فنر عمودی ثانویه	$I_{cx}$	ممان اینرسی رول بدنه قاب بوژی
$b_3$	نصف فاصله میان دمپر طولی ثانویه و دمپر عمودی ثانویه	$I_{cz}$	ممان اینرسی یاو بدنه قاب بوژی
$C_{px}$	دمپینگ یاو سیستم تعلیق اولیه	$I_{wx}$	ممان اینرسی رول چرخ و محور
$C_{py}$	دمپینگ جانبی سیستم تعلیق اولیه	$I_{wy}$	ممان اینرسی چرخشی چرخ و محور
$C_{pz}$	دمپینگ عمودی سیستم تعلیق اولیه	$I_{wz}$	ممان اینرسی یاو چرخ و محور
$C_{sx}$	دمپینگ یاو سیستم تعلیق ثانویه	$j=1,2$	به ترتیب معرف چرخ و محور جلویی و عقبی
$C_{sy}$	دمپینگ جانبی سیستم تعلیق ثانویه	$K_{px}$	سختی طولی سیستم تعلیق اولیه
$C_{sz}$	دمپینگ عمودی سیستم تعلیق ثانویه	$K_{py}$	سختی جانبی سیستم تعلیق اولیه
$f_{11}$	ضریب نیروی خزشی جانبی	$K_{pz}$	سختی عمودی سیستم تعلیق اولیه
$f_{12}$	ضریب نیروی خزشی جانبی/ چرخشی	$K_{sx}$	سختی طولی سیستم تعلیق ثانویه
$f_{22}$	ضریب نیروی خزشی جانبی چرخشی	$K_{sy}$	سختی جانبی سیستم تعلیق ثانویه
$f_{23}$	ضریب نیروی خزشی طولی	$K_{sz}$	سختی عمودی سیستم تعلیق ثانویه
$F_{kxij}$	نیروی خطی خزش در جهت طولی اعمالی بر چرخ چپ و راست	$L_1$	نصف بازو فنر جانبی سیستم تعلیق اولیه
$F_{kxij}^*$	نیروی خطی خزش در جهت طولی اعمالی بر چرخ چپ و راست با	$L_2$	نصف بازو دمپر جانبی سیستم تعلیق اولیه
$F_{kxij}^n$	نیروی غیر خطی خزش در جهت طولی اعمالی بر چرخ چپ و راست	$m_c$	جرم بدنه واگن
$F_{kyij}$	نیروی خطی خزش در جهت جانبی اعمالی بر چرخ چپ و راست	$m_t$	جرم قاب بوژی
$F_{kyij}^*$	نیروی خطی خزش در جهت جانبی اعمالی بر چرخ چپ و راست با	$m_w$	جرم چرخ و محور
$F_{kyij}^n$	نیروی غیر خطی خزش در جهت جانبی اعمالی بر چرخ چپ و راست	$M_{kzij}$	ممان خطی خزش در جهت عمودی اعمالی بر چرخ چپ و راست
$F_{syij}$	نیروی سیستم تعلیق اعمالی بر بدنه واگن در جهت جانبی	$M_{kzij}^*$	ممان خطی خزش در جهت عمودی اعمالی بر چرخ چپ و راست با
$F_{syij}^n$	نیروی سیستم تعلیق اعمالی بر بدنه بوژی در جهت جانبی	$M_{kzij}^n$	ممان غیر خطی خزش در جهت عمودی اعمالی بر چرخ چپ و راست
$\bar{F}_{szij}$	نیروی سیستم تعلیق اعمالی بر بدنه بوژی در جهت عمودی	$M_{sxc}$	ممان ناشی از سیستم تعلیق اعمالی بر بدنه واگن در جهت طولی
$h$	فاصله عمودی محل اعمال نیروی خارجی تا مرکز ثقل چرخ و محور	$M_{sxti}$	ممان ناشی از سیستم تعلیق اعمالی بر بدنه بوژی در جهت طولی
$h_c$	فاصله عمودی مرکز چرخ و محور تا مرکز ثقل بدنه واگن	$M_{syic}$	ممان ناشی از سیستم تعلیق اعمالی بر بدنه واگن در جهت جانبی
$h_T$	فاصله عمودی مرکز چرخ و محور تا مرکز ثقل سیستم تعلیق ثانویه	$M_{szij}$	ممان ناشی از سیستم تعلیق اعمالی بر چرخ و محور در جهت عمودی
$i=1,2$	به ترتیب معرف بوژی جلویی و عقبی	$M_{szti}$	ممان ناشی از سیستم تعلیق اعمالی بر بدنه بوژی در جهت عمودی
$I_{cx}$	ممان اینرسی رول بدنه واگن	$N$	نیروی نرمال اعمالی بر چرخ و محور در حالت تعادل
$N_{Lyij}$	نیروی نرمال اعمالی بر چرخ چپ در جهت جانبی	$V$	سرعت حرکت واگن
$N_{Lzij}$	نیروی نرمال اعمالی بر چرخ چپ در جهت عمودی	$W_{ext}$	نیروی خارجی
$N_{Ryij}$	نیروی نرمال اعمالی بر چرخ راست در جهت جانبی	$y_c$	جابجایی جانبی بدنه واگن
$N_{Rzij}$	نیروی نرمال اعمالی بر چرخ راست در جهت عمودی	$y_{ti}$	جابجایی جانبی بدنه بوژی جلویی و عقبی
$r_L$	شعاع غلتش چرخ چپ	$y_{wij}$	جابجایی جانبی بدنه چرخ و محور جلویی و عقبی
$r_R$	شعاع غلتش چرخ راست	$z_c$	جابجایی عمودی بدنه واگن
$r.$	شعاع غلتش نامی چرخ و محور	$z_{ti}$	جابجایی عمودی بدنه بوژی جلویی و عقبی
$R_{Lxij}$	مولفه X بردار موقعیت چرخ چپ از چرخ و محور جلویی و عقبی	$\alpha_{ij}$	ثابت اشباع در مدل نیروی خزش غیرخطی برای چرخ و محور
$R_{Lyij}$	مولفه Y بردار موقعیت چرخ چپ از چرخ و محور جلویی و عقبی	$\beta_{ij}$	ثابت غیرخطی در مدل نیروی خزش غیرخطی برای چرخ و محور
$R_{Rxij}$	مولفه X بردار موقعیت چرخ راست از چرخ و محور جلویی و عقبی	$\beta_{kij}$	ثابت غیرخطی در مدل نیروی خزش غیرخطی چرخ چپ و راست
$R_{Ryij}$	مولفه Y بردار موقعیت چرخ راست از چرخ و محور جلویی و عقبی	$\delta_L$	زاویه تماس چرخ چپ
$\theta_c$	زاویه پیچشی پیچ بدنه واگن	$\delta_R$	زاویه تماس چرخ راست
$\varphi_c$	زاویه پیچشی رول بدنه واگن	$\psi_{wij}$	زاویه پیچشی یاو چرخ و محور
$\varphi_{ti}$	زاویه پیچشی رول بدنه بوژی	$\psi_{ti}$	زاویه پیچشی یاو بدنه بوژی
$\varphi_{ii}$	زاویه پیچشی رول بدنه بوژی	$\psi_c$	زاویه پیچشی یاو بدنه واگن

۱- مقدمه

دانستن رفتار دینامیکی وسیله نقلیه ریلی نه تنها برای طراح ضروری است، بلکه می‌تواند معرف عملکرد وسیله نقلیه ریلی و نیروهای اعمالی به ریل باشد. با ظهور قطارهای مسافری سرعت بالا در جهان، تعیین محدوده کاری آن‌ها در سرعت بالا و به دور از ناپایداری هانتینگ به عنوان یکی از مسائل مهم مطرح شده است. پدیده هانتینگ زمانی اتفاق می‌افتد که وسیله نقلیه ریلی در سرعت بالا حرکت می‌کند و به صورت یک حرکت نوسانی کوپله بین جابجایی جانبی و یاو چرخ و محور نمایان می‌شود [۱].

مقالات متعددی در بررسی پایداری دینامیکی وسیله نقلیه ریلی ارائه شده است. یکی از مطالعات پایه‌ای در این زمینه توسط Law and Cooper [۲] انجام شده است. اغلب مطالعات، با در نظر گرفتن چهار یا شش درجه آزادی شامل درجه آزادی جانبی و یاو برای چرخ و محور و قاب بوژی صورت گرفته است [۱]. Wickens [۳] در مطالعه خود اثر دمپینگ را بر سرعت بحرانی وسیله نقلیه ریلی مورد بررسی قرار داد. NO and Hedrick [۴] تاثیر سختی جانبی و طولی سیستم تعلیق اولیه بر سرعت بحرانی هانتینگ را نشان دادند. Ahmadian and Shaopu [۵] به بررسی پارامترهای غیر خطی سیستم تعلیق بر سرعت بحرانی پرداختند. اکثر محققان از مدل خطی خزش در مدل سازی خود استفاده نموده‌اند. اخیراً Lee and Cheng [۶] با در نظر گرفتن ۲۱ درجه آزادی به مدل سازی و تحلیل پایداری هانتینگ وسیله نقلیه ریلی با در نظر گرفتن خزش غیرخطی پرداخته‌اند.

۲- مدل سازی ۲۱ درجه آزادی

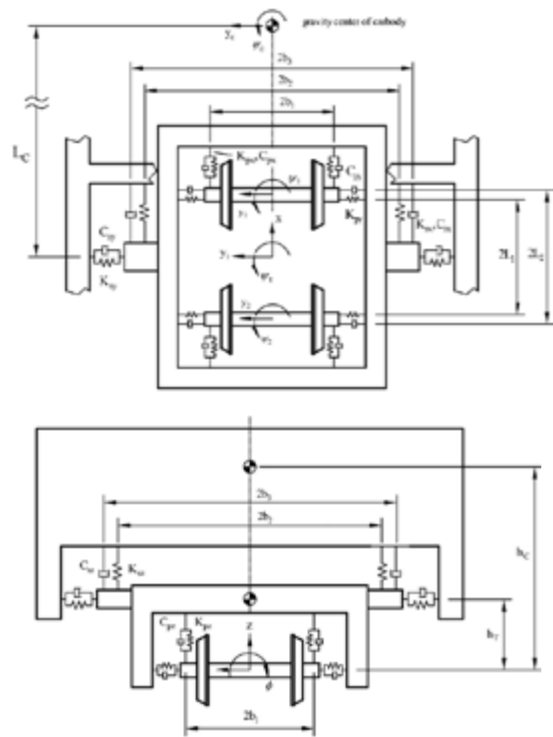
در این بخش مدل سازی ریاضی بوژی، چرخ و محور و بدنه واگن مسافری ارائه شده است. این قطعات توسط عناصر سیستم تعلیق و المان‌های نیرویی با یکدیگر اتصال دارند. تمام قطعات صلب و دارای درجات آزادی مشخص فرض شده‌اند. برای هر یک از قطعات، ابتدا معادلات حرکت مطابق با درجات آزادی هر قطعه استخراج گردیده است. پس از استخراج معادلات، با استفاده از آن نیروها و ممان‌های اعمالی از سیستم تعلیق بر این قطعات تعیین شده‌اند. معادلات حرکت استخراج شده شامل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم کوپل می‌باشند. معادلات حرکت هر قطعه نسبت به مرکز جرم آن نوشته شده است. محور X در امتداد طول ریل و حرکت رو به جلوی واگن، محور Z در جهت عمود بر صفحه ریل و به سمت بالا و محور Y در جهت جانبی می‌باشد (شکل ۱).

۲-۱- معادلات حرکت چرخ و محور

برای مدل سازی ریاضی چرخ و محور ابتدا باید درجات آزادی آن را مشخص نمود. برای هر چرخ و محور با فرض سرعت زاویه‌ای ثابت ۲ درجه آزادی، جابجایی در جهت Y، جابجایی

در چرخش حول محور Z (حرکت یاو) در نظر گرفته شده است، بنابراین معادلات حاکم بر چرخ و محور به صورت زیر خواهد بود:

$$m_w \ddot{y}_{wij} = F_{Lyij}^n + F_{Ryij}^n + N_{Lyij} + N_{Ryij} + F_{syij} \quad (1)$$



شکل ۱: مدل چرخ و محور، بوژی و واگن [۶].

$$(2)$$

$$I_w \ddot{\psi}_{wij} = -I_w \frac{V}{r_o} \dot{\phi}_{wij} + R_{Rxij} F_{Ryij}^n - R_{Ryij} F_{Rxij}^n + R_{Lxij} F_{Lyij}^n - R_{Lyij} F_{Lxij}^n + R_{Ryij} N_{Ryij} + R_{Lxij} N_{Lyij} + M_{Lzij}^n + M_{Rzij}^n + M_{szij}^n$$

نیروهای خزشی اثر عمده‌ای بر رفتار دینامیکی چرخ می‌گذارند. با توجه به غیرخطی بودن پدیده خزش در تماس چرخ و ریل و بیشتر بودن دقت مدل‌های غیرخطی، جهت مدل کردن پدیده خزش از مدل خزش غیرخطی هئوریستیک استفاده شده است. این مدل در حقیقت ترکیب تئوری خطی خزش کالکر با نیروی خزشی اشباع است. ارتباط بین نیرو و ممان خزشی خطی کالکر و غیرخطی هئوریستیک به صورت زیر بیان می‌شود:

$$F_{Kxij}^n = \alpha_{ij} F_{Kxij} \quad (3)$$

$$F_{Kyij}^n = \alpha_{ij} F_{Kyij} \quad (4)$$

$$M_{Kzij}^n = \alpha_{ij} M_{Kzij} \quad (5)$$

در این مطالعه فرض شده است که زوایای رول و یاو چرخ و محور کوچک و قابل صرف نظر کردن می باشد، بنابراین نیرو و ممان خزشی برای چرخ چپ و راست برابر خواهد بود با:

$$F_{Lxij} = F_{Lxij}^* - F_{Lyij}^* \cos(\delta_L + \phi_{wij}) \psi_{wij} \quad (۷)$$

$$F_{Lyij} = F_{Lxij}^* \psi_{wij} + F_{Lyij}^* \cos(\delta_L + \phi_{wij}) \quad (۸)$$

$$M_{Lzij} = M_{Lzij}^* \cos(\delta_L + \phi_{wij}) \quad (۹)$$

$$F_{Rxi} = F_{Rxi}^* - F_{Ryi}^* \cos(\delta_R - \phi_{wij}) \psi_{wij} \quad (۱۰)$$

$$F_{Ryi} = F_{Rxi}^* \psi_{wij} + F_{Ryi}^* \cos(\delta_R - \phi_{wij}) \quad (۱۱)$$

$$F_{Rzj} = -F_{Ryj}^* \cdot \sin(\delta_R - \phi_{wij}) \quad (۱۲)$$

$$M_{Rzj} = M_{Rzj}^* \cos(\delta_R - \phi_{wij})$$

مولفه نیروها و ممانهای خزش به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$F_{Kxij}^* = -f_3 \zeta'_{xK} \quad (۱۴)$$

$$F_{Kyij}^* = -f_{11} \zeta'_{yK} - f_{12} \zeta'_{spK} \quad (۱۵)$$

$$M_{Kzj}^* = f_{12} \zeta'_{yK} - f_{22} \zeta'_{spK}$$

که  $X'sp$  و  $X'x$ ،  $X'y$  ترمهای بدون بعد خزش می باشند. روابط مولفه نیروها و ممانهای خزش به صورت زیر خواهند بود:

$$F_{Lxij}^* = -\left(\frac{f_3}{V}\right) \left\{ V \left[ 1 - \left(\frac{r_L}{r_o}\right) \right] - a \psi_{wij} \right\} \quad (۱۷)$$

$$F_{Lyij}^* = -\left(\frac{f_1}{V}\right) \dot{y}_{wij} + r_L \phi_{wij} - V \psi_{wij} \cos(\delta_L + \phi_{wij}) - \left(\frac{f_2}{V}\right) \dot{\psi}_{wij} \cos(\delta_L + \phi_{wij}) - \frac{V}{r_o} \sin \delta_L \quad (۱۸)$$

$$M_{Lzj}^* = \left(\frac{f_2}{V}\right) \dot{y}_{wij} + r_L \phi_{wij} - V \psi_{wij} \cos(\delta_L + \phi_{wij}) - \left(\frac{f_1}{V}\right) \dot{\psi}_{wij} \cos(\delta_L + \phi_{wij}) - \frac{V}{r_o} \sin \delta_L \quad (۱۹)$$

$$F_{Rxi}^* = -\left(\frac{f_3}{V}\right) \left\{ V \left[ 1 - \left(\frac{r_R}{r_o}\right) \right] + a \psi_{wij} \right\}$$

$$F_{Ryi}^* = -\left(\frac{f_1}{V}\right) \dot{y}_{wij} + r_R \phi_{wij} - V \psi_{wij} \cos(\delta_R - \phi_{wij}) - \left(\frac{f_2}{V}\right) \dot{\psi}_{wij} \cos(\delta_R - \phi_{wij}) + \frac{V}{r_o} \sin \delta_R \quad (۲۰)$$

$$M_{Rzj}^* = \left(\frac{f_2}{V}\right) \dot{y}_{wij} + r_R \phi_{wij} - V \psi_{wij} \cos(\delta_R - \phi_{wij}) - \left(\frac{f_1}{V}\right) \dot{\psi}_{wij} \cos(\delta_R - \phi_{wij}) + \frac{V}{r_o} \sin \delta_R \quad (۲۱)$$

با جایگزینی روابط (۱۶) تا (۲۱) در روابط (۶) تا (۱۲)، نیروها و ممانهای خطی کالکر حاصل شده و سپس جایگزینی روابط حاصله در روابط (۳) تا (۵) نیروها و ممانهای غیر خطی هئوریستیک را نتیجه خواهد داد.

ضریب اشباع برای غیر خطی نمودن نیروها و ممانها از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\beta_{ij}} [\beta_{ij} - \frac{1}{3} \beta_{ij}^2 + \frac{1}{27} \beta_{ij}^3] & \text{for } \beta_{ij} \leq 3 \\ \frac{1}{\beta_{ij}} & \text{for } \beta_{ij} \geq 3 \end{cases} \quad (۲۲)$$

که:

$$\beta_{ij} = \frac{\beta_{Rij} + \beta_{Lij}}{2} \quad (۲۳)$$

و:

$$\beta_{Kij} = \frac{\sqrt{(F_{Kxij}^*)^2 + (F_{Kyij}^*)^2}}{\mu N} \quad (۲۴)$$

که  $\beta_{ij}$  ثابت غیر خطی نیروهای خزش غیر خطی چرخ و محور،  $K_{ij}$  ثابت غیر خطی نیروهای خزش غیر خطی چرخ چپ و راست هر چرخ و محور و  $\mu$  ضریب اصطکاک می باشد.

در نقطه تماس چرخ با ریل، نیروی تماسی با سه مؤلفه در راستاهای  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  به چرخ اعمال می شود. نیروی تماسی ناشی از وزن چرخ و محور و نیروی سیستم تعلیق است. مقدار نیروی تماسی در چرخ راست و چپ برابر خواهد بود با:

$$N_{Lzj} = N_{Rzj} = \frac{1}{2} (W_{ext} + m_w g) \quad (۲۵)$$

$$N_{Lyij} = -N_{Lzj} \tan(\delta_L + \phi_{wij}) \quad (۲۶)$$

$$N_{Ryij} = -N_{Rzj} \tan(\delta_R - \phi_{wij}) \quad (۲۷)$$

سه نوع تماس برای چرخ و ریل در نظر گرفته می شود. تماس تک نقطه‌ای در ناحیه مخروطی، تماس دو نقطه‌ای قسمت مخروطی و فلنج (ترکیب دو تماس تک نقطه‌ای) و تماس



شکل ۳: تماس چرخ با ریل (الف) تماس یک نقطه‌ای مخروطی، (ب) تماس دو نقطه‌ای مخروطی و فلنج، (ج) تماس یک نقطه‌ای فلنج [۷].

تماس مخروطی تک نقطه‌ای و برای چرخ سمت راست تماس فلنج فرض می شود. مؤلفه عمودی نیروی تماس برای هر چرخ به صورت زیر خواهد بود:

$$N_{LzTij} = N_{Lzj} = N_{Lij} \cos(\delta_L + \phi_{wij}) \quad (۳۴)$$

$$N_{RzFij} = N_{Rzj} = N_{Rij} \cos(\delta_R - \phi_{wij}) \quad (۳۵)$$

تماس مخروطی تک نقطه‌ای و برای چرخ سمت راست فلنج فرض می شود. مؤلفه عمودی نیروی تماس برای هر چرخ به صورت زیر خواهد بود:

$$N_{LzFij} = N_{Lzj} = N_{Lij} \cos(\delta_L + \phi_{wij}) \quad (۳۶)$$

$$N_{RzTij} = N_{Rzj} = N_{Rij} \cos(\delta_R - \phi_{wij}) \quad (۳۷)$$

اندیس T معرف تماس مخروطی و اندیس F معرف تماس فلنج می باشد.

با توجه به ۵ حالت فوق و روابط (۲۵)، (۲۶) و (۲۷) مؤلفه جانبی نیروی تماس برای هر چرخ برابر خواهد بود با:

$$N_{LyCij} = -N_{LzCij} \cdot \tan(\delta_L + \phi_{wij}) \quad (۳۸)$$

$$N_{RyCij} = N_{RzCij} \cdot \tan(\delta_R - \phi_{wij}) \quad (۳۹)$$

که  $C=T, F$  بیانگر نوع ناحیه تماس هستند.

برای تعیین ممانهای حاصل از نیروهای خزشی و عمودی تماسی باید بردارهای مکانی محل تماس چرخ سمت چپ و راست نسبت به مرکز جرم هر چرخ و محور مشخص باشد. با توجه به اینکه  $a > \Delta L, \Delta R$  و نیز کوچک بودن  $\psi_{wij}$  و  $\phi_{wij}$ ، با در نظر گرفتن جابجاییها و چرخشها برای هر چرخ و محور مولفه‌های طولی، جانبی و عمودی بردار مکانی چرخهای چپ و راست به صورت روابط (۴۰) تا (۴۵) قابل بیان خواهد بود:

$$R_{Lxij} = -a \psi_{wij} \quad (۴۰)$$

تک نقطه‌ای در ناحیه فلنج. در شکل ۳ سه نوع تماس نشان داده شده‌اند.

برای مدل سازی ریاضی تماس چرخ ۵ حالت مختلف در نظر گرفته شده است [۷]:

(۱)  $-8mm < y_{wij} < 8mm$ : در این حالت برای هر دو چرخ سمت چپ و راست تماس تک نقطه‌ای مخروطی فرض شده و هیچ گونه تماس فلنج رخ نخواهد داد. در این حالت مؤلفه عمودی نیروی تماس برای هر چرخ به صورت زیر خواهد بود:

$$N_{LzTij} = N_{Lzj} = N_{Lij} \cos(\delta_L + \phi_{wij}) \quad (۲۸)$$

$$N_{RzTij} = N_{Rzj} = N_{Rij} \cos(\delta_R - \phi_{wij}) \quad (۲۹)$$

(۲)  $-9mm < y_{wij} < -8mm$ : در این حالت برای چرخ سمت چپ تماس تک نقطه‌ای مخروطی و برای چرخ سمت راست تماس دو نقطه‌ای فرض می شود. این مرحله، گذر از تماس یک نقطه‌ای مخروطی به یک نقطه‌ای فلنج است. مؤلفه عمودی نیروی تماس برای هر چرخ به صورت زیر خواهد بود:

$$N_{LzTij} = N_{Lzj} = N_{Lij} \cos(\delta_L + \phi_{wij}) \quad (۳۰)$$

$$N_{RzFij} = \frac{1}{2} N_{Rzj} = \frac{1}{2} N_{Rij} \cos(\delta_R - \phi_{wij}) \quad (۳۱)$$

همانطور که مشاهده می شود در این حالت دو نیروی عمودی به چرخ سمت راست اعمال می شود.

(۳)  $8mm < y_{wij} < 9mm$ : در این حالت برای چرخ سمت راست تماس مخروطی تک نقطه‌ای و برای چرخ سمت چپ تماس دو نقطه‌ای فرض می شود. مؤلفه عمودی نیروی تماس برای هر چرخ به صورت زیر خواهد بود:

$$N_{LzFij} = \frac{1}{2} N_{Lzj} = \frac{1}{2} N_{Lij} \cos(\delta_L + \phi_{wij}) \quad (۳۲)$$

$$N_{RzTij} = N_{Rzj} = N_{Rij} \cos(\delta_R - \phi_{wij}) \quad (۳۳)$$

(۴)  $y_{wij} < -9mm$ : در این حالت برای چرخ سمت چپ

$$R_{Lyij} = a + r_L \phi_{wij} \quad (41)$$

$$R_{Lzij} = a \phi_{wij} - r_L \quad (42)$$

$$R_{Rzij} = a \psi_{wij} \quad (43)$$

$$R_{Ryij} = -a + r_R \phi_{wij} \quad (44)$$

$$R_{Rzij} = -a \phi_{wij} - r_R \quad (45)$$

۲-۲- معادلات بدنه بوژی

در مدل سازی ریاضی قاب بوژی نیز از درجه آزادی X صرف نظر شده است. ۴ درجه آزادی در نظر گرفته شده برای قاب بوژی عبارتند از: جابجایی جانبی، جابجایی عمودی، تغییر زاویه رول و تغییر زاویه یاو و معادلات حرکت مربوطه به فرم معادلات (۴۶) تا (۴۹) می باشد:

$$m_t \ddot{y}_t = F_{syti} \quad (46)$$

$$m_t \ddot{z}_t = F_{szti} - m_t g \quad (47)$$

$$I_{\kappa} \ddot{\phi}_t = M_{sxti} \quad (48)$$

$$I_{\tau} \ddot{\psi}_t = M_{szti} \quad (49)$$

۳-۲- معادلات بدنه واگن

از آنجا که واگن مورد مطالعه یک واگن مسافری بوده و میزان جابه جایی های آن بر راحتی سفر مسافرین مؤثر می باشد، مدل سازی بدنه واگن نیز حائز اهمیت است. برای بدنه واگن ۵ درجه آزادی لحاظ شده است. این ۵ درجه آزادی شامل درجات آزادی جابجایی جانبی، جابجایی عمودی، تغییر زاویه رول، تغییر زاویه پیچ و تغییر زاویه یاو است.

$$m_c \ddot{y}_c = F_{syc} \quad (50)$$

$$m_c \ddot{z}_c = F_{szc} - m_c g \quad (51)$$

$$I_{cx} \ddot{\phi}_c = M_{sxc} \quad (52)$$

$$I_{cy} \ddot{\theta}_c = M_{syc} \quad (53)$$

$$I_{cy} \ddot{\theta}_c = M_{syc} \quad (54)$$

۴-۲- معادلات نیروها و ممان های اعمالی

نیروها و ممان های سیستم تعلیق اولیه به صورت عمل و عکس العمل بین قاب بوژی و چرخ و محور اعمال می شود و به جابجایی نسبی این دو جزء وابسته است. با توجه به شکل

۱، این نیروها و ممان ها برای چرخ و محور از روابط (۵۵) و (۵۶) حاصل می شود:

$$F_{syij} = -2K_p (y_{wij} - y_i) - 2C_p (\dot{y}_{wij} - \dot{y}_i) - (-1)^j 2K_p L_i \psi_{it} - (-1)^j 2C_p L_i \dot{\psi}_{it} \quad (55)$$

$$M_{szij} = -2b_1^2 K_{px} (\psi_{wij} - \psi_{it}) - 2b_1^2 C_{px} (\dot{\psi}_{wij} - \dot{\psi}_{it}) \quad (56)$$

نیروها و ممان های اعمالی به قاب بوژی ناشی از سیستم تعلیق اولیه و ثانویه بوده و با توجه به شکل ۱ توسط روابط زیر بیان می شوند:

$$F_{yn} = 2K_{py} y_{wij} + 2C_{py} \dot{y}_{wij} + (-4K_{py} - 2K_{py}) y_n + (-4C_{py} - 2C_{py}) \dot{y}_n + 2K_{py} L_i \psi_{it} + 2C_{py} L_i \dot{\psi}_{it} + 2K_{py} y_c + 2C_{py} \dot{y}_c + 2K_{py} (h_c - h_r) \phi_c + 2C_{py} (h_c - h_r) \dot{\phi}_c - 4K_{py} h_r \phi_n - 4C_{py} h_r \dot{\phi}_n \quad (57)$$

$$F_{zn} = 2K_{pz} z_{wij} + 2C_{pz} \dot{z}_{wij} + (-4K_{pz} - 2K_{pz}) z_n + (-4C_{pz} - 2C_{pz}) \dot{z}_n + 2K_{pz} L_i \psi_{it} + 2C_{pz} L_i \dot{\psi}_{it} + 2K_{pz} z_c + 2C_{pz} \dot{z}_c + 2K_{pz} (h_c - h_r) \phi_c + 2C_{pz} (h_c - h_r) \dot{\phi}_c - 4K_{pz} h_r \phi_n - 4C_{pz} h_r \dot{\phi}_n \quad (58)$$

$$F_{yn} = 2K_{py} y_{wij} + 2C_{py} \dot{y}_{wij} + (-4K_{py} - 2K_{py}) y_n + (-4C_{py} - 2C_{py}) \dot{y}_n + 2K_{py} L_i \psi_{it} + 2C_{py} L_i \dot{\psi}_{it} + 2K_{py} y_c + 2C_{py} \dot{y}_c + 2K_{py} (h_c - h_r) \phi_c + 2C_{py} (h_c - h_r) \dot{\phi}_c - 4K_{py} h_r \phi_n - 4C_{py} h_r \dot{\phi}_n \quad (59)$$

$$M_{szn} = 2K_{sz} b_2^2 \phi_c + 2C_{sz} b_2^2 \dot{\phi}_c - 2K_{sz} b_2^2 \phi_n - 2C_{sz} b_2^2 \dot{\phi}_n - 4K_{sz} h_r^2 \phi_n - 4C_{sz} h_r^2 \dot{\phi}_n - 4K_{sz} b_1^2 \phi_n - 4C_{sz} b_1^2 \dot{\phi}_n + [2K_{sz} h_r + K_{sz} b_1^2 (\frac{\sin(\delta_n)}{a}) + K_{sz} b_1^2 (\frac{\sin(\delta_i)}{a})] y_{wij} - 4K_{sz} h_r y_n + [2C_{sz} h_r + C_{sz} b_1^2 (\frac{\sin(\delta_n)}{a}) + C_{sz} b_1^2 (\frac{\sin(\delta_i)}{a})] \dot{y}_{wij} - 4C_{sz} h_r \dot{y}_n \quad (60)$$

$$M_{szti} = (-4K_{py} I_1^2 - 4K_{px} b_1^2 - 4K_{sx} b_2^2) \psi_{it} + (-4C_{py} I_1^2 - 4C_{px} b_1^2 - 4C_{sx} b_2^2) \dot{\psi}_{it} + 2K_{py} L_i y_{wi1} + 2C_{py} L_i \dot{y}_{wi1} + 2K_{px} b_1^2 \psi_{wi1} + 2C_{px} b_1^2 \dot{\psi}_{wi1} - 2K_{py} L_i y_{wi2} - 2C_{py} L_i \dot{y}_{wi2} + 2K_{px} b_1^2 \psi_{wi2} + 2C_{px} b_1^2 \dot{\psi}_{wi2} + 2K_{sx} b_2^2 \psi_c + 2C_{sx} b_2^2 \dot{\psi}_c \quad (61)$$

$$Lm = (L_1 + L_2) / 2$$

نیروها و ممان های اعمالی به بدنه واگن ناشی از سیستم تعلیق ثانویه بوده و با توجه به شکل ۱ با روابط زیر بیان می شوند:

$$F_{syc} = -2K_{sy} (2y_c - y_{n1} - y_{n2}) - 4K_{sy} (h_c - h_r) \phi_c - 2C_{sy} (2\dot{y}_c - \dot{y}_{n1} - \dot{y}_{n2}) - 4C_{sy} (h_c - h_r) \dot{\phi}_c \quad (62)$$

$$F_{szc} = -4K_{sz} z_c - 4C_{sz} \dot{z}_c + 2K_{sz} z_{n1} + 2C_{sz} \dot{z}_{n1} + 2K_{sz} z_{n2} + 2C_{sz} \dot{z}_{n2} \quad (63)$$

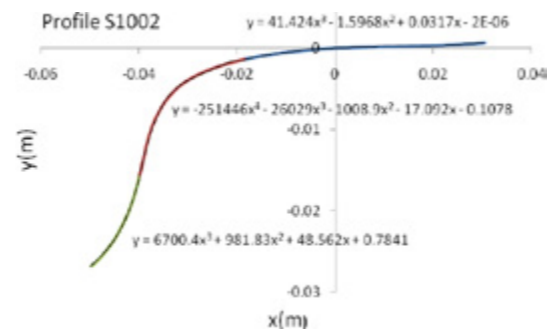
$$M_{sxc} = 2b_2^2 K_{sz} \phi_{n1} + 2b_2^2 C_{sz} \dot{\phi}_{n1} + 2b_2^2 K_{sz} \phi_{n2} + 2b_2^2 C_{sz} \dot{\phi}_{n2} - 4b_2^2 K_{sz} \phi_c - 4b_2^2 C_{sz} \dot{\phi}_c - 4K_{sy} (h_c - h_r) y_c - 4C_{sy} (h_c - h_r) \dot{y}_c + 2K_{sy} (h_c - h_r) y_{n1} + 2C_{sy} (h_c - h_r) \dot{y}_{n1} + 2K_{sy} (h_c - h_r) y_{n2} + 2C_{sy} (h_c - h_r) \dot{y}_{n2} - 4K_{sy} (h_c - h_r) \phi_c - 4C_{sy} (h_c - h_r) \dot{\phi}_c - 4K_{sy} (h_c - h_r) L_i \psi_c - 4C_{sy} (h_c - h_r) L_i \dot{\psi}_c \quad (64)$$

$$M_{syc} = -2K_{sz} L_i z_{n1} + 2K_{sz} L_i z_{n2} - 2C_{sz} L_i \dot{z}_{n1} + 2C_{sz} L_i \dot{z}_{n2} - 4C_{sz} L_i^2 \dot{\theta}_c - 2K_{sz} L_i^2 \theta_c \quad (65)$$

$$M_{szc} = -4K_{sy} \psi_c L_c^2 - 4C_{sy} \dot{\psi}_c L_c^2 - 2K_{sz} b_2^2 (2\psi_c - \psi_{n1} - \psi_{n2}) - 2C_{sz} b_2^2 (2\dot{\psi}_c - \dot{\psi}_{n1} - \dot{\psi}_{n2}) - 2K_{sy} L_c (-y_{n1} - y_{n2}) - 2C_{sy} L_c (-\dot{y}_{n1} - \dot{y}_{n2}) \quad (66)$$

۳- تحلیل دینامیکی واگن

پس از مدل سازی ریاضی وسیله نقلیه ریلی به تحلیل دینامیکی آن پرداخته شده است. معادلات حرکت بخش ۲ در تحلیل دینامیکی واگن مسافری استفاده شده است.



شکل ۴: پروفیل چرخ استفاده شده در بوژی.

از آنجا که فاصله ۵۰- تا ۳۰ سانتیمتری نقاط سطح چرخ در تماس با سطح ریل است، این نقاط برای پروفیل استاندارد S1002 در نرم افزار Excel وارد، منحنی حاصل از اتصال این نقاط ترسیم شده است. منحنی حاصل با یک تابع ۳ ضابطه ای پوشش داده شده است. زاویه مماس بر منحنی پروفیل در هر نقطه با افق زاویه تماس چرخ با ریل در آن نقطه است. مشتق این تابع ۳ ضابطه ای، زاویه تماس پروفیل چرخ با ریل (δ) می باشد. اندازه این مشتق تابع میزان جابجایی عرضی چرخ و محور بوده و با توجه به آن زاویه تماس چرخ با ریل در نقطه تماس به دست می آید. در تحلیل واگن مسافری، زاویای بدست آمده در نرم افزار Matlab به عنوان Rδ و Lδ وارد شده اند. منحنی پروفیل S1002 و توابع مربوط به آن ها در شکل ۴ نشان داده شده است.

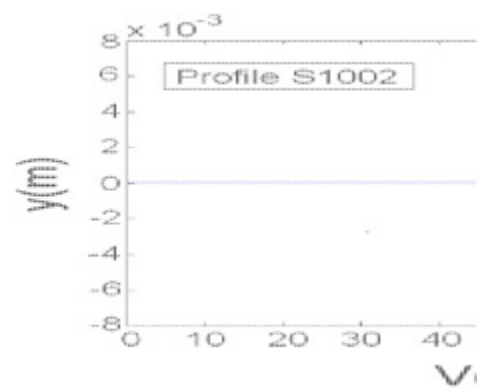
سرعت بحرانی هانتینگ در مورد پروفیل استاندارد S1002 از دو روش (۱) روش غیر مستقیم لیاپانوف (۲) حل معادلات دیفرانسیل به روش رانج-گوتا تعیین شده است. در روش غیر مستقیم لیاپانوف، سیستم های غیر خطی، خطی شده و با بررسی سیستم خطی مقادیر ویژه تعیین و در مورد پایداری سیستم خطی نتیجه گیری می شود [۶]. متغیرهای حالت سیستم درجات آزادی سیستم میباشند. در روش دوم، برای به دست آوردن سرعتی که وسیله حمل و نقل ریلی شروع به نوسان کند، از حل معادلات دیفرانسیل حرکت و به دست آوردن جابجایی جانبی چرخ و محور با استفاده از روش رانج-گوتا و از دستور ODE45 در نرم افزار Matlab استفاده می شود.

برای انجام تحلیل ها از کامپیوتر شخصی با سرعت پردازش ۲/۵ گیگاهرتز ، حافظه ۴ گیگا بایت و نرم افزار Matlab R2010a استفاده شده است. نوع مسیر تحلیل مستقیم و نوع ریل UIC60 بوده و مشخصات واگن مسافری مورد تحلیل در پیوست آمده است.

۴- ارائه نتایج و بحث

تحلیل پایداری لیاپانوف، سرعت بحرانی وسیله نقلیه ریلی را

با پروفیل نو، ۵۲ m/s معادل ۱۸۷ km/h نشان می دهد. این مقدار سرعت بحرانی با توجه به این که حداکثر سرعت سیر سامانه ریلی مسافری ایران ۱۴۰ km/h است، محدوده ایمنی را برای پدیده هانتینگ در این سامانه تصویر می نماید. البته این محدوده تنها برای پروفیل استاندارد S1002 مطرح می باشد. جابه جایی جانبی به دست آمده از تحلیل دینامیکی واگن مسافری با پروفیل استاندارد در شکل ۵ نشان داده شده است. همان طور که شکل ۵ نشان می دهد، سرعت بحرانی واگن مسافری با پروفیل استاندارد ۵۲ m/s محاسبه شده است. انطباق مقادیر سرعت های بحرانی به دست آمده از دو روش حل، نوعی صحت گذاری نتایج به حساب می آید.



شکل ۵- نمودار جابه جایی جانبی- سرعت واگن مسافری با پروفیل استاندارد S1002.

۵- نتیجه گیری

در این مطالعه با مدل سازی ۲۱ درجه آزادی وسیله نقلیه ریلی، به بررسی هانتینگ و ناپایداری وسیله نقلیه ریلی مسافری هنگامی که در مسیر مستقیم حرکت می کند، پرداخته شد. نتایج حاصل از انجام تحلیل در نرم افزار Matlab نشان می دهد که سرعت بحرانی واگن مسافری با چرخ نو که دارای پروفیل استاندارد S1002 می باشد، ۵۲ m/s معادل ۱۸۷ km/h است.

## ۶- پیوست

## مشخصات واگن مسافری مطالعه شده

$m_w = 1180 \text{ kg}$	$b_1 = 1 \text{ m}$	$K_{sx} = 1000 \times 10^5 \text{ N/m}$
$m_t = 500 \text{ kg}$	$b_r = 1.1 \text{ m}$	$K_{sy} = 1000 \times 10^5 \text{ N/m}$
$m_c = 32000 \text{ kg}$	$b_r = 1.1 \text{ m}$	$K_{sz} = 1000 \text{ N/m}$
$I_{wx} = 680 \text{ kg.m}^2$	$L_1 = 0.9 \text{ m}$	$C_{sx} = 1000 \text{ Ns/m}$
$I_{wy} = 73 \text{ kg.m}^2$	$L_r = 0.9 \text{ m}$	$C_{sy} = 1000 \text{ Ns/m}$
$I_{wz} = 680 \text{ kg.m}^2$	$L_c = 9.5 \text{ m}$	$C_{sz} = 100 \text{ Ns/m}$
$I_{tx} = 250 \text{ kg.m}^2$	$h_T = 0.12 \text{ m}$	$f_{11} = 2.212 \times 10^6 \text{ N}$
$I_{tz} = 300 \text{ kg.m}^2$	$K_{px} = 1000 \times 10^5 \text{ N/m}$	$f_{1r} = 3120 \text{ Nm}^2$
$I_{cx} = 14270 \text{ kg.m}^2$	$K_{py} = 1000 \times 10^5 \text{ N/m}$	$f_{rr} = 16 \text{ N}$
$I_{cz} = 197000 \text{ kg.m}^2$	$K_{pz} = 1000 \times 10^5 \text{ N/m}$	$f_{rr} = 2.563 \times 10^6 \text{ N}$
$r_1 = 0.46 \text{ m}$	$C_{py} = 1000 \text{ Ns/m}$	$\mu = 0.3$
$a = 0.7175 \text{ m}$	$C_{pz} = 100 \text{ Ns/m}$	

## منابع و مراجع

- تربیت مدرس، اسفند ۱۳۸۶.
- [۸] ج. علیزاده کاکلر، و م. نوفرستی، «بررسی میدانی گودی چرخ واگن های چینی با استفاده از معیارهای موجود در مراجع مختلف»، دهمین کنفرانس بین المللی حمل و نقل ریلی، آبان ۸۷، تهران.
- [1] S. Y. Lee, and Y. C. Cheng, "Hunting stability analysis of high-speed railway vehicle trucks on tangent tracks", Journal of sound and vibration (2005), Vol. 282, pp. 898-881.
- [2] E. H. Law, and N. K. Cooperrider, "A survey of railway vehicle dynamics research", Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control (June 1974), pp. 146-132.
- [3] A. H. Wickens, "The hunting stability of railway vehicle wheelsets and bogies having profiled wheels", International Journal of Solids and Structures (1965), Vol. 1, pp. 341-319.
- [4] M. No, and J. K. Hedrick, "High speed stability for rail vehicles considering varying conicity and creep coefficients", Vehicle Systems Dynamics (1984), Vol. 13, pp. 313-299.
- [5] M. Ahmadian, and Y. Shaopu, "Effect of system nonlinearities on locomotive bogie hunting stability", Vehicle System Dynamics (1998), Vol. 29, pp. 384-366.
- [6] Y. C. Cheng, S. Y. Lee, and H. H. Chen, "Modeling and nonlinear hunting stability analysis of high-speed railway vehicle moving on curved tracks", Journal of Sound and Vibration (2009), Vol. 324, pp. 160-139.

[۷] آ. قنبری، «تحلیل دینامیکی بوژی ZK3 هنگام عبور از مسیر قوسی شکل»، پایان نامه دوره کارشناسی ارشد، دانشگاه

## بررسی دوشاخه‌شدگی و آشوب در سیستم‌های چرخ دنده‌ای دارای پارامترهای غیر خطی لقی، خطای انتقال و سختی درگیری متغیر با زمان

• انوشیروان فرشیدیان<sup>۱</sup>  
Farshid@um.ac.ir

• امین ثقفی<sup>۲</sup>  
a.i.saghafi@gmail.com

• ایمان ثقفی<sup>۳</sup>  
me.i.saghafi@gmail.com

## چکیده

این پژوهش به بررسی و تحلیل رفتار دینامیکی سیستم‌های غیر خطی انتقال چرخ‌دنده‌ای می‌پردازد. یک سیستم چرخ‌دنده‌ای با در نظر گرفتن پارامترهای غیر خطی موثر از جمله لقی، خطای انتقال استاتیکی و نیز سختی درگیری متغیر با زمان، مدل‌سازی و مشخصه‌های غیر خطی سیستم از قبیل پاسخ‌های تناوبی، دوشاخه‌شدگی (انشعاب)<sup>۱</sup> و آشوب<sup>۲</sup>، مورد بررسی قرار می‌گیرد. نمودارهای دوشاخه‌شدگی به منظور تعیین مشخصه‌های سیستم و با توجه به پارامترهای کنترل مختلف سیستم به دست می‌آید. روش بالانس هارمونیک افزاینده<sup>۳</sup> (IHB)، به عنوان یک روش تحلیلی برای محاسبه پاسخ تناوبی سیستم‌های غیر خطی مورد استفاده قرار گرفته و نتایج به دست آمده از این روش با نتایج حاصل از روش عددی نیز مقایسه می‌شوند. پاسخ آشفته سیستم نیز با روش عددی محاسبه می‌شود. همچنین پاسخ زمانی، نگاشت پوانکاره و نمودار صفحه و فاز نیز برای مقایسه و درک بهتر این رفتارها ارائه می‌گردند.

**واژه‌های کلیدی:** دوشاخه‌شدگی، آشوب، روش بالانس هارمونیک افزاینده (IHB)، ارتعاشات غیر خطی، سیستم انتقال چرخ‌دنده

۱. دانشیار گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد  
۲. دانشجوی دکتری مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد  
۳. دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر