



Thermal Correction to The Casimir Energy for Scalar Field with Helix Boundary Condition in Three Spatial Dimensions

Madad Ali Valuyan^{1,2}

1- Department of Physics, Se. C., **Islamic Azad University**, Semnan, Iran

3- Energy and Sustainable Development Research Center, Se. C., **Islamic Azad University**, Semnan, Iran

* P.O.B. 35145-179 Semnan, Iran, mavalouyan@iau.ac.ir

Article Information

Original Research Paper

Received: 26 August 2023

Accepted: 25 November 2025

Available Online 09

January 2026

Keywords

Casimir Energy

Scalar Field

Lorentz Symmetry

Helix Boundary Condition

Thermal Correction

ABSTRACT

In this article, the thermal correction to the Casimir energy for Lorentz-violating massive scalar field with Helix boundary condition has been calculated. This energy has been determined by subtracting the zero-point energy of Minkowski space from the zero-point energy while taking into account the Helical boundary condition. In the past, radiative corrections to the Casimir energy with Helix boundary condition have been reported. However, computing the thermal correction for Lorentz-violating scalar field represents a new aspect of this problem. Accurate removal of divergences is another crucial aspect of the computational details of the problem. By comparing the results obtained in this article with those from prior research and visually illustrating them through plotted graphs, the logical consistency between the findings was showcased.

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Madad Ali Valuyan, Thermal Correction to The Casimir Energy for Scalar Field with Helix Boundary Condition in Three Spatial Dimensions, *Journal of Mechanical Engineering and Vibration*, Vol. 16, No. 3, pp. 60-68, 2025 (In Persian)



تصحیح دمایی انرژی کازمیر برای میدان اسکالر با شرط مرزی پیچشی در سه بعد فضایی

مددعلی ولوییان^۱

۱- گروه فیزیک، واحد سمنان، دانشگاه آزاد اسلامی، سمنان، ایران

۲- مرکز تحقیقات انرژی و توسعه پایدار، واحد سمنان، دانشگاه آزاد اسلامی، سمنان، ایران

سمنان، صندوق پستی: ۳۵۱۴۵-۱۷۹، mavalouyan@iau.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۴ شهریور ۱۴۰۲

پذیرش: ۴ آذر ۱۴۰۴

ارائه در سایت: ۱۹ دی ۱۴۰۴

کلیدواژگان

انرژی کازمیر

میدان اسکالر

تقارن لورنتز

شرط مرزی پیچشی

تصحیح دمایی

چکیده

در این مقاله تصحیح دمایی انرژی کازمیر مربوط به میدان اسکالر جرم دار با شرط مرزی پیچشی (Helical) محاسبه شده است. نکته قابل توجه اینکه میدان اسکالری که در این محاسبات مدنظر قرار گرفته است، میدان اسکالر ناقص تقارن لورنتز در سه بعد فضایی می باشد. این انرژی با کم کردن انرژی نقطه صفر فضای مینکوفسکی از انرژی نقطه صفری که با درنظر گرفتن شرط مرزی پیچشی بدست آمده، محاسبه شده است. در گذشته تصحیح تابشی مربوط به انرژی کازمیر برای این شرط مرزی در ابعاد مختلف فضایی محاسبه شده است، اما در این مقاله تصحیح دمایی مورد محاسبه قرار گرفته است که قبلاً محاسبه ای در این خصوص وجود نداشته است. توضیح اینکه این محاسبه در سه بعد فضایی انجام شده و نتیجه بدست آمده با آنچه که قبلاً بدون در نظر گرفتن تصحیح دمایی محاسبه و گزارش شده بود، سازگاری دارد. حذف امن و دقیق واگرایی ها از نکات مراعات شده در جزئیات محاسبات مربوط به این مساله است. مقایسه پاسخ های بدست آمده در این مقاله با آنچه در گذشته بدست آمده است به وسیله رسم نمودارها صورت پذیرفته و نشان می دهد که سازگاری مناسب و منطقی بین جوابها وجود دارد.

۱-مقدمه

بیش از ۶۰ سال پیش، اثر کازمیر توسط هندریک کازمیر پیش‌بینی و محاسبه گردید. او برای اولین بار، در مقاله معروف خود، میزان جاذبه بین دو صفحه رسانا بدون بار موازی که در خلاء قرار دارند و برای قطبش‌های میدان الکترومغناطیس را توضیح داد [۱]. با محاسبه گرادیان انرژی کازمیر نسبت به ابعاد شرایط مرزی و یا ساختار می‌توان نیروی کازمیر وارد بر آن ساختار را بدست آورد. اولین تلاش برای اندازه‌گیری این پدیده و یافتن یک شاهد معتبر در آزمایشگاه برای این اثر نیز تقریباً ده سال بعد توسط اسپارنای در سال ۱۹۵۸ انجام پذیرفت [۲] و بعدها نیز اندازه‌گیری‌های دقیق‌تری بر درستی پیش‌بینی کازمیر صحه گذاشتند. با توجه به اینکه اثر کازمیر بعدها به عنوان اثر منحصر به فرد و بسیار جالب از قطبش (ارتعاشات) خلاء شناخته شد، لذا جوانب و کاربردهای فراوانی برای آن پدیدار گشته است. این اثر نقش مهمی در حوزه‌های متعددی از فیزیک ایفا می‌کند،

نظیر QFT [۳-۷] فیزیک ماده چگال [۸-۱۱]، فیزیک اتمی-ملکولی، گرانش، کیهان‌شناسی [۱۲-۱۳] و ریاضی فیزیک [۱۴]. بررسی اثرات کوانتومی بر روی جهان‌شناخت‌ها یکی از موارد جالب اثرات پدیده‌شناختی اثر کازمیر به شمار می‌رود. عوامل متعددی می‌توانند انرژی صفر را تغییر دهند، و بنابراین تعدد این عوامل می‌تواند باعث ایجاد نیروی کازمیر با اندازه‌ها و مقادیر متفاوت گردد. از جمله متغیرهایی که باعث تغییر در انرژی خلا و در پی آن باعث ایجاد انرژی کازمیر می‌شوند عبارتند از: هندسه و مرز [۱۶-۱۵]، نوع میدان مورد مطالعه [۱۷] و حضور ابعاد اضافی [۲۰-۱۸]. علاوه بر این، برخی از سناریوهای دیگر به مانند مباحث مربوط به سیاه چاله‌ها، رشته‌های کیهانی، تئوری میدان لیفشیتس و سناریوهای نقض لورنتز جوانب دیگری از اثر کازمیر را روشن نموده‌اند [۲۱-۲۲].

محاسبه انرژی کازمیر همواره مستلزم کاهش دو عبارت بی‌نهایت از یکدیگر است، که این امر همواره نیاز به استفاده از روش‌های مختلف منظم‌سازی و یا بازبهنجارش دارد. به همین دلیل

را انتخاب می‌کنیم. برای مورد آخر شکست تقارن لورنتز که مؤلفه بردار $u = (0,0,0,1)$ است، نام Lv_3 انتخاب شده است. برای پی‌گیری تأثیرات شکست تقارن لورنتز در میدان‌های کوانتومی، باید از معادله حرکت زیر شروع کنیم:

$$[\square + \lambda(u \cdot \partial)^2 - m^2]\phi = 0 \quad (2)$$

بعد از حل معادله فوق می‌توان شرط مرزی زیر که موسوم به شرط مرزی پیچشی است، را بکار برد:

$$\phi(t, x_1 + a, x_2, x_3) = \phi(t, x_1, x_2 + h, x_3) \quad (3)$$

که در آن h به عنوان اندازه گام پیچش در نظر گرفته می‌شود. برای مورد میدان اسکالر که در حالت TL دچار شکست تقارن شده است، پس از اعمال شرایط مرزی پیچش، فرم زیر از بردار موج به دست می‌آید:

$$(1 + \lambda)\omega_n^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + m^2 \quad (4)$$

که در آن مقدار $k_1 = \frac{n\pi}{a} + k_2 r$ و پارامتر $r = \frac{h}{a}$ و مقدار شمارنده $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ می‌باشد. رابطه (4)

برای مورد Lv_1 به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\omega_n^2 = (1 - \lambda)k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + m^2 \quad (5)$$

به همین ترتیب برای هریک از دیگر جهت‌های شکست تقارن لورنتز (Lv_i) یک ضریب $(1 - \lambda)$ در جمله k_i^2 در طرف راست معادله (5) ضرب خواهد شد. انرژی نقطه صفر و اصلاحات دمایی مربوط به آن معمولاً به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E = E^{(0)} + E^T = \frac{1}{2} \sum \omega + \sum \frac{\omega}{e^{-\beta(\omega - \mu)} - 1} \quad (6)$$

که در آن $E^{(0)}$ مرتبه صفرم از انرژی خلا و عبارت E^T مربوط به جمله اصلاح دمایی آن است و β ضریب بولتزمن و μ پتانسیل شیمیایی می‌باشد. حال، بر اساس تعریف اصلی انرژی کازمیر داریم:

$$E_{\text{Cas.}} = (E_{\text{B.C.}}^{(0)} - E_{\text{free}}^{(0)}) + (E_{\text{B.C.}}^T - E_{\text{free}}^T) \quad (7)$$

که در آن $E_{\text{B.C.}}^{(0)}$ انرژی خلا با در نظر گرفتن تأثیر شرط مرزی را نشان می‌دهد و $E_{\text{free}}^{(0)}$ به انرژی خلا بدون هیچگونه شرط مرزی اشاره دارد. پراختز دوم اختلاف بخش اصلاحات دمایی مربوط به انرژی خلا در حضور و عدم حضور شرط مرزی را نشان می‌دهد. در بخش بعد، ابتدا انرژی کازمیر در مرتبه صفرم ($E_{\text{Cas.}}^{(0)}$) را

روش‌های متعددی برای محاسبه انرژی کازمیر پیشنهاد گردیده، که از جمله منظم‌سازی تابع زتا [23-24]، منظم‌سازی تابع گرین [25]، منظم‌سازی بسط چندجمله‌ای پراکندگی [26]، منظم‌سازی کاهش جعبه‌ها [20-18] و غیره می‌باشند.

در بخش بعد، فرض می‌کنیم که یک میدان اسکالر با جرم m که دارای انحراف کوچکی از تقارن لورنتز دارد، با شرط مرزی پیچشی اعوجاج یافته است. در گام بعد اختلاف بین انرژی خلا یا همان انرژی نقطه صفر بدست آمده از فضای مینکوفسکی را از انرژی خلا مربوط به این میدان که دارای فرکانسهای تغییر یافته ناشی از حضور شرایط مرزی است، را محاسبه می‌کنیم. روشهای متعددی برای حذف واگرایی‌ها و محاسبه مقدار انرژی کازمیر وجود دارد که در این محاسبه از یک روش بسیار معمول و ساده جهت محاسبه انرژی کازمیر استفاده شده است. با استفاده از رسم نمودارها براحتی می‌توان سازگاری نتایج حاصله را با نتایج انرژی کازمیر که در گذشته گزارش شده مورد مقایسه یا ارزیابی قرار داد.

۲- ارائه مدل

در این بخش، به طور خلاصه یک مدل برای محاسبه انرژی خلا مرتبط با میدان اسکالر که به صورت بسیار ضعیف ناقص تقارن لورنتز است، ارائه شده است. بنابراین، با لاگرانژی میدان اسکالر آزاد که دارای شکست تقارن لورنتز است، آغاز می‌کنیم:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) + \lambda (u \cdot \partial \phi(x))^2] - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) \quad (1)$$

که در این معادله پارامتر m جرم میدان اسکالر بوده، و ضریب بی‌بعد $\lambda \ll 1$ مقیاس شکست تقارن لورنتز را نشان می‌دهد. این پارامتر با ضرب شدن در یک بردار $u = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ می‌تواند جهت شکست تقارن لورنتز در فضا-زمان را تعیین نماید. چهار جهت برای شکست تقارن لورنتز ممکن است. ما این جهت‌های شکست تقارن را در چهار حالت متمایز دسته‌بندی کرده و بدین صورت نامگذاری می‌کنیم. میدان اسکالر با شکست تقارن لورنتز در جهت بردار زمانی (u_0) موقعی رخ می‌دهد که بردار $u = (1, 0, 0, 0)$ باشد که ما این حالت را از این پس، شکست تقارن در حالت TL می‌نامیم. برای بردار $u = (0, 1, 0, 0)$ ، یکی از جهت‌های شکست تقارن فضا - مانند رخ می‌دهد، که از این پس این جهت شکست تقارن را با Lv_1 نام‌گذاری می‌کنیم. برای بردار $u = (0, 0, 1, 0)$ ، شکست تقارن لورنتز در جهت x_2 رخ می‌دهد و برای این جهت نام Lv_2

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Cas.}^{(0)} = & \frac{1}{(2\pi)^3 \gamma^2 \sqrt{1+c\lambda}} \int_0^\infty dX \int_{-\infty}^\infty dk_1 dk_2 (X^2 + k_2^2 \\ & + k_3^2 + M^2)^{1/2} + \mathcal{B}(a) \\ & - \frac{4\pi m^4}{2(2\pi)^3 \sqrt{1+c\lambda}} \int_0^\infty \xi^2 \sqrt{\xi^2 + 1} d\xi \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن $\mathcal{B}(a)$ جمله برنچکات رابطه ایبل-پلانا (جمله سوم سمت راست رابطه (۱۱)) محسوب می شود و دارای مقداری همگراست. تنها جمله واگرا در رابطه (۱۲) عبارت اول در سمت راست تساوی است که با واگرایی حاصل از انرژی خلا فضای آزاد که در واقع همان جمله آخر در سمت راست رابطه (۱۲) می باشد، حذف خواهد شد. بنابراین رابطه انرژی کازمیر به صورت زیر بدست می آید:

$$\mathcal{E}_{Cas.}^{(0)} = \frac{-2}{\sqrt{1+c\lambda}} \left(\frac{M}{2\pi a \gamma} \right)^2 \sum_{j=1}^\infty \frac{K_2(Maj)}{j^2} \quad (13)$$

۳-۲- شکست تقارن لورنتز در حالت‌های Lv_2 و Lv_1

با استفاده از رابطه زیر محاسبات مربوط به چگالی انرژی کازمیر را برای مورد Lv_1 و Lv_2 آغاز می کنیم. لذا با استفاده از رابطه (۸) داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Cas.}^{(0)} = & \frac{1}{2a} \int \frac{dk_2 dk_3}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^\infty \omega_n \\ & - \frac{1}{2\sqrt{1-\lambda}} \int_0^\infty \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} [k^2 + m^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن برای حالت Lv_1 بردار موج به صورت $\omega_n = [(1-\lambda)k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + m^2]^{1/2}$ و برای حالت Lv_2 بردار موج به صورت $\omega_n = [k_1^2 + (1-\lambda)k_2^2 + k_3^2 + m^2]^{1/2}$ می باشد. با جایگذاری بردار موج $k_1 = \frac{2n\pi}{a} + k_2 r$ و استفاده از تغییر متغیرها در انتگرال‌ها، داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Cas.}^{(0)} = & \frac{(1-\lambda)^{3/2}}{2a(2\pi)^2(\gamma - \lambda r^2 + c\lambda(r^2 - 1))^2} \\ & \times \int dk_2 dk_3 \sum_{n=-\infty}^\infty \left[\left(\frac{2n\pi}{a} \right)^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + M^2 \right]^{1/2} \\ & - \frac{4\pi m^4}{2(2\pi)^3 \sqrt{1-\lambda}} \int_0^\infty \xi^2 \sqrt{\xi^2 + 1} d\xi \end{aligned} \quad (15)$$

محاسبه می کنیم. سپس، در بخش سوم اصلاحات دمایی مربوط به انرژی کازمیر را محاسبه خواهیم کرد.

۳- محاسبه انرژی کازمیر

عبارت کلی برای انرژی کازمیر عبارت است از:

$$E_{Cas.} = \frac{1}{2} \sum_{n,k} (\omega_n^{\text{Bound}} - \omega_k^{\text{Free}}) \quad (8)$$

که در آن ω_k^{Free} عدد موج مربوط به فضا-زمان آزاد (فضایی که هیچ شرط مرزی ندارد) را نشان می دهد. به منظور ارائه جزئیات محاسبات، محتوای آن به دو زیربخش تقسیم شده است. در هر زیربخش، دو جهت از جهت‌های مختلف شکست تقارن لورنتز مورد بررسی قرار می گیرد.

۳-۱- شکست تقارن لورنتز در حالت‌های Lv_3 و TL

با استفاده از معادله (۴) و همچنین با توجه به رابطه (۷) و (۸) برای چگالی انرژی داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Cas.}^{(0)} = & \frac{1}{2\sqrt{1+c\lambda}} \left\{ \int \frac{dk_2 dk_3}{(2\pi)^2 a} \sum_{n=-\infty}^\infty [k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + m^2]^{1/2} \right. \\ & \left. - \int_0^\infty \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} [k^2 + m^2]^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن پارامتر $c = \pm 1$ می باشد. برای پارامتر $c = 1$ ، انرژی کازمیر برای حالت TL به دست می آید و مقدار $c = -1$ به مورد Lv_3 از شکست تقارن لورنتز اشاره دارد. با جایگذاری بردار موج $k_1 = \frac{n\pi}{a} + k_2 r$ داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Cas.}^{(0)} = & \frac{1}{2a(2\pi)^2 \gamma^2 \sqrt{1+c\lambda}} \int dk_2 dk_3 \sum_{n=-\infty}^\infty \left[\left(\frac{2n\pi}{a} \right)^2 + k_2^2 \right. \\ & \left. + k_3^2 + M^2 \right]^{1/2} \\ & - \frac{4\pi m^4}{2(2\pi)^3 \sqrt{1+c\lambda}} \int_0^\infty \xi^2 \sqrt{\xi^2 + 1} d\xi \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن پارامتر $\gamma = 1 + r^2$ و $M = m\sqrt{\gamma}$ است. همچنین تغییر متغیر $\xi = k/m$ در انتگرال لحاظ شده است. اعمال رابطه زیر که موسوم به رابطه ایبل-پلانا می باشد می توان عبارات دارای جمع را به انتگرال تبدیل نمود:

$$\sum_{n=-\infty}^\infty \mathcal{F}(n) = 2 \int_0^\infty \mathcal{F}(x) dx + 2i \int \frac{\mathcal{F}(it) - \mathcal{F}(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt \quad (11)$$

حال با استفاده از رابطه (۱۰) و (۱۱) داریم:

در شکل (۱)، چگالی انرژی کازمیر به عنوان تابعی از گام‌های پیچش a رسم شده است. در این شکل، یک دنباله از نمودارها برای مقادیر $m = \{1, 0.75, 0.5, 0\}$ نمایش داده شده است. این دنباله از نمودارها نشان می‌دهد که انرژی کازمیر برای زمانی که جرم در حد $m \rightarrow 0$ قرار دارد، انرژی کازمیر به سرعت به مقدار انرژی کازمیر برای میدان بی‌جرم نزدیک می‌شود. این رفتار برای انرژی کازمیر با نتایج گزارش شده قبلی سازگار است و انتظارات فیزیکی را برآورده می‌کند.

۴- تصحیحات دمایی انرژی کازمیر

در این بخش تصحیحات ناشی از دما در انرژی کازمیر محاسبه و به رابطه انرژی کازمیر محاسبه شده در بخش قبل اضافه خواهد شد. این محاسبات را بدلیل شکست تقارن لورنتز در جهات مختلف و تاثیرگذاری آن بر روابط به دو بخش تقسیم کرده و در دو زیر بخش زیر جزئیات محاسبات را ادامه خواهیم داد.

۴-۱- شکست تقارن در حالت‌های Lv_3 و TL

با شروع از معادلات (۶) و (۷) برای حالت Lv_3 و TL داریم:

$$\mathcal{E}_{Cas.}^{(T)} = \frac{1}{\sqrt{1+c\lambda}} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \int \frac{dk_2 dk_3}{(2\pi)^2 a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + m^2]^{1/2} e^{j\beta\mu - \frac{j\beta}{\sqrt{1+b\lambda}} [k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + m^2]^{1/2}} - \int_0^{\infty} \frac{4\pi\kappa^2 d\kappa}{(2\pi)^3} [\kappa^2 + m^2]^{1/2} e^{j\beta\mu - \frac{j\beta}{\sqrt{1+b\lambda}} [\kappa^2 + m^2]^{1/2}} \right\} \quad (18)$$

که در آن $c = \pm 1$ بوده و در جمله دوم رابطه (۱۸) عدد موج $k = (k_1, k_2, k_3)$ می‌باشد. برای پارامتر $c = 1$ و $b = 1$ انرژی کازمیر برای حالت TL به دست می‌آید و $c = -1$ و $b = 0$ به مورد Lv_3 از شکست تقارن لورنتز اشاره دارد. با جایگذاری بردار موج $k_1 = \frac{2n\pi}{a} + k_2 r$ و استفاده از تغییر متغیرها در انتگرال‌ها، داریم:

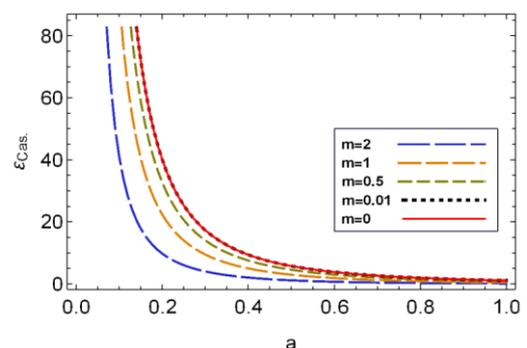
$$\mathcal{E}_{Cas.}^{(T)} = \frac{1}{(2\pi)^2 a \gamma^2 \sqrt{1+c\lambda}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu}$$

که در آن $M = m \sqrt{\frac{\gamma - \lambda r^2 + c\lambda(r^2 - 1)}{1 - \lambda}}$ می‌باشد. در عبارت بالا پارامتر $c = 0$ به حالت Lv_1 و پارامتر $c = 1$ به حالت Lv_2 اشاره دارد. اعمال رابطه ایبل-پلانا در معادله بالا آنرا به دو بخش تقسیم می‌کند. طبق معادله (۱۱)، بخش اول، عبارت انتگرالی است که واگرایی دارد و اثر آن به صورت تحلیلی با عبارت آخر معادله (۱۵) از بین خواهد رفت. بنابراین، هیچ سهمی از واگرایی‌ها در انرژی کازمیر باقی نخواهد ماند. تنها بخش دوم تبدیل ایبل-پلانا که جمله برنچکات نامیده می‌شود، باقی خواهد ماند. با در نظر گرفتن این نکات رابطه (۱۵) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathcal{E}_{Cas.}^{(0)} = \frac{-4(1-\lambda)^{3/2}}{2(2\pi)^2 (\gamma - \lambda r^2 + c\lambda(r^2 - 1))^2} \times \int_0^{\infty} \kappa d\kappa \int_{\sqrt{\kappa^2 + M^2}}^{\infty} dT \frac{[T^2 - \kappa^2 - M^2]^{1/2}}{e^{Ta} - 1} \quad (16)$$

انرژی کازمیر برای میدان اسکالر با شرط مرزی پیچشی دارای نقض تقارن لورنتز در جهت Lv_1 و Lv_2 بعد از جابجا نمودن ترتیب انتگرالگیری بالا و محاسبه آنها به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\mathcal{E}_{Cas.}^{(0)} = -2(1-\lambda)^{3/2} \left(\frac{M}{2\pi a (\gamma - \lambda r^2 + c\lambda(r^2 - 1))} \right)^2 \times \sum_{j=1}^{\infty} \frac{K_2(Maj)}{j^2} \quad (17)$$



شکل ۱ در این نمودار تغییرات چگالی انرژی کازمیر بر حسب یکی از گام‌های پیچش شرط مرزی به ازای جرم‌های مختلف میدان رسم شده است.

(۲۲)

که در این عبارت تابع $\mathcal{H}(x)$ به صورت زیر است:

$$\mathcal{H}(x) = \left[\left(\frac{2\pi x}{a} \right)^2 + z_2^2 + z_3^2 + M^2 \right]^{1/2} \frac{-j\beta}{e^{\sqrt{1+b\lambda}\sqrt{\gamma}} \left[\left(\frac{2\pi x}{a} \right)^2 + z_2^2 + z_3^2 + M^2 \right]^{1/2}} \quad (23)$$

تغییر متغیرهای $T = \frac{2\pi t}{a}$ ، $p^2 = z^2 + M^2$ و $z = (z_1, z_2, z_3)$ را به صورت همزمان در معادله فوق اعمال کنیم. نتیجه این امر معادله (۲۳) را به معادله زیر تبدیل می کند:

$$\mathcal{E}_{Cas.}^{(T)} = \frac{-4}{(2\pi)^2 \gamma^2 \sqrt{1+c\lambda}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \times \int_p^{\infty} dT \int_M^{\infty} dp \frac{p\sqrt{T^2-p^2}}{e^{aT}-1} \cos\left(\frac{j\beta}{\sqrt{1+b\lambda}\sqrt{\gamma}} \sqrt{T^2-p^2}\right) \quad (24)$$

با اعمال تغییر متغیر $x^2 = (T/p)^2 - 1$ در معادله فوق داریم:

$$\mathcal{E}_{Cas.}^{(T)} = \frac{-4}{(2\pi)^2 \gamma^2 \sqrt{1+c\lambda}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \times \int_M^{\infty} dp \int_0^{\infty} dx \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \frac{p^3}{e^{ap\sqrt{x^2+1}}-1} \cos\left(\frac{j\beta px}{\sqrt{1+b\lambda}\sqrt{\gamma}}\right) \quad (25)$$

برای محاسبه نیازمند رابطه زیر می باشیم:

$$\frac{1}{e^{ap\sqrt{x^2+1}}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-anp\sqrt{x^2+1}} \quad (26)$$

حال با تجمیع دو رابطه (۲۵) و (۲۶) داریم:

$$\mathcal{E}_{Cas.}^{(T)} = \frac{-4}{(2\pi)^2 \gamma^2 \sqrt{1+c\lambda}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \times \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\int_M^{\infty} p^2 \frac{\alpha_j K_1\left(p\sqrt{\alpha_j^2 + (an)^2}\right)}{\sqrt{\alpha_j^2 + (an)^2}} dp \right] \quad (27)$$

که در آن $\alpha_j = j\beta/(\sqrt{1+b\lambda}\sqrt{\gamma})$ می باشد. با در نظر گرفتن Lv_3 و TL حالت برای کازمیر برای حالت Lv_3 و TL به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$E_{Cas.}^{(T)} = \frac{-4}{\sqrt{1+c\lambda}} \left(\frac{M}{2\pi\gamma} \right)^2$$

$$\times \left\{ \int dz_2 dz_3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{2n\pi}{a} \right)^2 + z_2^2 + z_3^2 + M^2 \right]^{1/2} e^{\frac{-j\beta}{\sqrt{1+b\lambda}\sqrt{\gamma}} \left[\left(\frac{2n\pi}{a} \right)^2 + z_2^2 + z_3^2 + M^2 \right]^{1/2}} - \frac{4\pi m^4}{(2\pi)^3 \sqrt{1+c\lambda}} \int_0^{\infty} \xi^2 \sqrt{\xi^2+1} e^{-j\frac{m\beta}{\sqrt{1+b\lambda}}[\xi^2+1]^{1/2}} d\xi \right\} \quad (19)$$

که در آن پارامتر $\gamma = 1+r^2$ و پارامتر $M = m\sqrt{\gamma}$ می باشد. بعد از انجام تغییر متغیر $\xi = \kappa/m$ و اعمال رابطه جمع ایبل-پلانا معادله (۱۹) به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\mathcal{E}_{Cas.}^{(T)} = \frac{2}{(2\pi)^3 \gamma^2 \sqrt{1+c\lambda}} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ e^{j\beta\mu} \int_0^{\infty} dX \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 dk_3 [X^2 + k_2^2 + k_3^2 + M^2]^{1/2} e^{\frac{-j\beta}{\sqrt{1+b\lambda}\sqrt{\gamma}} [X^2 + k_2^2 + k_3^2 + M^2]^{1/2}} + B(a) \right\} - \frac{4\pi m^4}{(2\pi)^3 \sqrt{1+c\lambda}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \times \int_0^{\infty} \xi^2 \sqrt{\xi^2+1} e^{-j\frac{m\beta}{\sqrt{1+b\lambda}}[\xi^2+1]^{1/2}} d\xi \quad (20)$$

با انتخاب تغییر متغیر $\eta = \frac{1}{M}(X, k_2, k_3, \dots, k_d)$ رابطه فوق به صورت زیر نوشته می شود:

$$\mathcal{E}_{Cas.}^{(T)} = \frac{4\pi M^4}{(2\pi)^3 \gamma^2 \sqrt{1+c\lambda}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \left\{ \int_0^{\infty} \eta^2 [\eta^2 + 1]^{1/2} e^{\frac{-jM\beta}{\sqrt{1+b\lambda}\sqrt{\gamma}} [\eta^2+1]^{1/2}} d\eta + B(a) \right\} - \frac{4\pi m^4}{(2\pi)^3 \sqrt{1+c\lambda}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_0^{\infty} \xi^2 \sqrt{\xi^2+1} e^{-j\frac{m\beta}{\sqrt{1+b\lambda}}[\xi^2+1]^{1/2}} d\xi \quad (21)$$

دو جمله اول و آخر در رابطه فوق واگرا هستند. اما همانطور که از رابطه نیز مشخص است این دو عبارت همدیگر را به صورت کاملاً تحلیل حذف کرده، فلذا هیچ سهمی از واگرایی در رابطه انرژی کازمیر باقی نمی ماند. تنها جمله باقیمانده جمله برنچکات $B(a)$ است که عبارتی همگراست و برای آن داریم:

$$\mathcal{E}_{Cas.}^{(T)} = \frac{2i}{(2\pi)^2 a\gamma^2 \sqrt{1+c\lambda}} \times \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk_2 dk_3 \frac{\mathcal{H}(it) - \mathcal{H}(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt$$

نیز در رابطه بالا به ساده تر شدن روابط کمک کرده است. اکنون با اعمال رابطه ایبل-پلانا عبارت فوق به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Cas.}^{(T)} &= \frac{2(1-\lambda)^{3/2}}{(2\pi)^3 \mathcal{A}_c^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \left\{ \int_0^{\infty} dX \int_{-\infty}^{\infty} dZ_2 dZ_3 [X^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + M^2]^{1/2} e^{-j\beta \sqrt{\frac{1-\lambda}{\mathcal{A}_c}} [X^2 + Z_2^2 + \dots + Z_d^2 + M^2]^{1/2}} + B(a) \right\} \\ &- \frac{4\pi m^4}{(2\pi)^3 \sqrt{1-\lambda}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_0^{\infty} \xi^2 \sqrt{\xi^2 + 1} e^{-jm\beta \sqrt{\xi^2 + 1}} d\xi, \end{aligned} \quad (31)$$

که در این رابطه جمله $B(a)$ جمله برنچکات رابطه ایبل-پلانا محسوب شده و یک جمله همگراست. با اعمال تغییر متغیر $\eta = \frac{1}{M}(X, Z_2, Z_3)$ در جمله اول در سمت راست تساوی در معادله فوق می توان اثبات کرد که دو جمله اول و آخر همدیگر را به صورت کاملاً تحلیلی حذف نموده و تنها جمله باقی مانده از عبارت فوق جمله برنچکات می باشد. لذا معادله (31) به معادله زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Cas.}^{(T)} &= \frac{2i(1-\lambda)^{3/2}}{(2\pi)^2 a \mathcal{A}_c^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \\ &\times \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dZ_2 dZ_3 \frac{\mathcal{H}(it) - \mathcal{H}(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt \end{aligned} \quad (32)$$

که در این معادله تابع $\mathcal{H}(x)$ به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x) &= \left[\left(\frac{2\pi x}{a} \right)^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + M^2 \right]^{1/2} \\ &\times e^{-j\beta \sqrt{\frac{1-\lambda}{\mathcal{A}_c}} \left[\left(\frac{2\pi x}{a} \right)^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + M^2 \right]^{1/2}} \end{aligned} \quad (33)$$

با تغییر متغیرهای $Z = (Z_2, Z_3)$ و $T = \frac{2\pi t}{a}$ و اعمال رابطه $p^2 = Z^2 + M^2$ به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Cas.}^{(T)} &= \frac{-8\pi(1-\lambda)^{3/2}}{(2\pi)^d \mathcal{A}_c^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int_p^{\infty} dT \int_M^{\infty} dp \frac{p \sqrt{T^2 - p^2}}{e^{aT} - 1} \end{aligned}$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\frac{\alpha_j K_2 \left(M \sqrt{\alpha_j^2 + (an)^2} \right)}{\alpha_j^2 + (an)^2} \right] \quad (28)$$

در بخش بعد همین محاسبات را برای شکست تقارن در دو جهت Lv_1 و Lv_2 دنبال می کنیم.

۲-۴- شکست تقارن در حالتهای Lv_2 و Lv_1

برای محاسبه تصحیحات دمایی چگالی انرژی کازمیر مربوط به حالت Lv_1 و Lv_2 از شکست تقارن لورنتز داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Cas.}^{(T)} &= \frac{1}{(2\pi)^2 a} \sum_{j=1}^{\infty} \int dk_2 dk_3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n e^{j\beta\mu - j\beta\omega_n} \\ &- \frac{4\pi}{(2\pi)^3 \sqrt{1-\lambda}} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \kappa^2 \sqrt{\kappa^2 + m^2} e^{j\beta\mu - j\beta \sqrt{\kappa^2 + m^2}} dk \end{aligned} \quad (29)$$

که در جمله دوم در سمت راست معادله (29) تغییر متغیر به صورت $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ لحاظ شده است. برای حالت Lv_1 تابع عدد موج $\omega_n = [(1-\lambda)\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + m^2]^{1/2}$ و برای حالت Lv_2 عدد موج به صورت $\omega_n = [\kappa_1^2 + (1-\lambda)\kappa_2^2 + m^2]^{1/2}$ می باشد. با انجام تغییر متغیر و در نظر گرفتن رابطه $k_1 = \frac{2n\pi}{a} + k_2 r$ بصورت زیر تبدیل می گردد:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Cas.}^{(T)} &= \frac{(1-\lambda)^{3/2}}{(2\pi)^2 a \mathcal{A}_c^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \int dZ_2 dZ_3 \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{2n\pi}{a} \right)^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + M^2 \right]^{1/2} e^{-j\beta \sqrt{\frac{1-\lambda}{\mathcal{A}_c}} \left[\left(\frac{2n\pi}{a} \right)^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + M^2 \right]^{1/2}} \\ &- \frac{4\pi m^4}{(2\pi)^3 \sqrt{1-\lambda}} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \xi^2 \sqrt{\xi^2 + 1} e^{j\beta\mu - jm\beta \sqrt{\xi^2 + 1}} d\xi \end{aligned} \quad (30)$$

که در آن $\mathcal{A}_c = \gamma - \lambda r^2 + c\lambda(r^2 - 1)$ و پارامتر $\gamma = 1 +$ مقدار $c = 0$ باشد. مقدار $M = m \sqrt{\frac{1-\lambda}{\mathcal{A}_c}}$ و r^2 مقدار $c = 1$ به حالت Lv_2 اشاره دارد. تغییر متغیرهایی به مانند رابطه $\xi = \kappa/m$ و $Z_2 = \frac{\mathcal{A}_c}{\sqrt{1-\lambda}} \left[k_2 + \frac{2n\pi r(1-\lambda)}{a \mathcal{A}_c} \right]$ و $Z_3 = \sqrt{\frac{\mathcal{A}_c}{1-\lambda}} k_3$

تصحیح تابشی انرژی کازمیر با شرط مرزی پیچشی برای میدان اسکالر ناقص تقارن لورنتز می باشد که نتایج آن در مقالات آتی منعکس خواهد شد. مقایسه دو تصحیح تابشی و دمایی و یا انجام هر دو تصحیح به صورت همزمان در یک حالت از نقض تقارن لورنتز می تواند نکات قابل توجهی بهمراه داشته باشد. خصوصاً تعمیم این محاسبات به ابعاد بالاتر از فضا زمان و بررسی تصحیحات ذکر شده در ابعاد بالاتر جذابیت بیشتری را برای علاقه مندان در این زمینه فراهم می آورد.

۶-مراجع

- [1] H. B. G. Casimir, The influence of retardation on the London-van der Waals forces, *Phys. Rev.* Vol 73, pp. 360, 1948.
- [2] M. J. Sparnaay, Measurements of attractive forces between flat plates, *Physica*, Vol. 24, pp. 751, 1958.
- [3] A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn and V. Weisskopf, *Phys. Rev. D*, Vol. 9, p. 3471, 1974.
- [4] R. K. Bhaduri, *Models of the Nucleon* (Addison-Wesley, Redwood City, California, 1988).
- [5] Kimball A. Milton, *Phys. Rev. D*, Vol. 22, p. 1444, 1980.
- [6] A. Romeo, *Phys. Rev. D*, Vol. 52, p. 7308, 1995.
- [7] M. Bordag, E. Elizalde, and K. Kirsten, *J. Math. Phys.* Vol. 37, p. 895, 1996.
- [8] F. De Martini, M. Marrocco, and P. Mataloni, *Phys. Rev. A* 43, 2480, 1991.
- [9] M. Krech, and S. Dietrich, *Phys. Rev. Lett.* Vol. 66, p. 345, 1991.
- [10] M. Krech, and S. Dietrich, *Phys. Rev. Lett.* Vol. 67, p. 1055, 1991.
- [11] F. De Martini and G. Jacobovitz, *Phys. Rev. Lett.* Vol. 60, p.1711 (1988).
- [12] E. Elizalde, *Phys. Lett. B*, vol. 516, p. 143 (2001).
- [13] F. Bauer, M. Lindner, and G. Seidl, *JHEP*, vol. 05, p. 026 (2004).
- [14] B. S. DeWitt, *Phys. Rep.*, vol. 19, p. 297, 1975.
- [15] M. A. Valuyan, The Dirichlet Casimir Energy for Theory in a Rectangle, *European Physical Journal Plus*, Vol. 133, p. 401, 2018.
- [16] M. A. Valuyan, The Dirichlet Casimir energy for ϕ^4 theory in a rectangular waveguide, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, Vol. 45, No. 9, p. 095006, 2018.
- [17] M. Bordag, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, New Developments in the Casimir Effect, *Phys. rep.* Vol. 353, p. 1, 2001.
- [18] M. A. Valuyan, The Casimir Energy For Scalar Field With Mixed Boundary Condition, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, Vol. 15, No. 10, 1850172, 2018.
- [19] M. A. Valuyan, Radiative correction to the Casimir energy with mixed boundary condition in 2+ 1 dimensions, *Indian Journal of Physics*, Vol. 95, No. 5, pp. 981-988, 2021.
- [20] M. A. Valuyan, Radiative correction to the Casimir energy for Lorentz-violating scalar field in d+1

$$\times \cos \left(j\beta \sqrt{\frac{1-\lambda}{\mathcal{A}_c}} \sqrt{T^2 - p^2} \right) \quad (34)$$

با یک تغییر متغیر مجدد به صورت $x^2 = (t/p)^2 - 1$ عبارت بالا به صورت زیر درمی آید:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Cas.}^{(T)} &= \frac{-4(1-\lambda)^{3/2}}{(2\pi)^2 \mathcal{A}_c^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \\ &\times \int_M^{\infty} dp \int_0^{\infty} dx x^2 \sqrt{x^2 + 1} \frac{p^3}{e^{ap\sqrt{x^2+1}} - 1} \\ &\times \cos \left(j\beta p x \sqrt{\frac{1-\lambda}{\mathcal{A}_c}} \right) \end{aligned} \quad (35)$$

با اعمال تغییر متغیر $\alpha_j = j\beta \sqrt{\frac{1-\lambda}{\mathcal{A}_c}}$ و $\eta = p \sqrt{\alpha_j^2 + (an)^2}$ عبارت تصحیح دمایی برای انرژی کازمیر برای حالت Lv_1 و Lv_2 به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Cas.}^{(T)} &= -4(1-\lambda)^{3/2} \left(\frac{M}{2\pi c \mathcal{A}_c} \right)^2 \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} e^{j\beta\mu} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\frac{\alpha_j K_2 \left(M \sqrt{\alpha_j^2 + (an)^2} \right)}{[\alpha_j^2 + (an)^2]} \right] \end{aligned} \quad (36)$$

۵-نتایج

در این مقاله انرژی کازمیر و تصحیح دمایی مربوط به آن برای میدان اسکالر که دارای نقض ضعیفی از تقارن لورنتز بوده و با شرط مرزی پیچشی محدود شده است، محاسبه گردید. نکته قابل توجه در این مقاله این است که محاسبه انجام شده برای این شرط مرزی بسیار جدید بوده و تاکنون نمونه ای برای آن در کارهای گذشته وجود ندارد. ضمناً تصحیحات دمایی برای سیستم که دارای تناقض لورنتز می باشد نیز کمتر مورد بررسی قرار گرفته و انجام تصحیح دمایی برای این شرط مرزی نیز از دیگر نکات حائز اهمیت در این مقاله می باشد. موضوع دیگری که توسط نویسنده در حال بررسی و محاسبه می باشد محاسبه

- Dimensions, *Modern Physics Letters A*, Vol. 35, No. 18, p. 2050149, 2021.
- [21] M. A. Valuyan, The Casimir Energy for Lorentz-Violating Scalar Field in Sphere, *Jordan J. Phys.* Vol. 15, No. 3, pp. 309-322, 2022.
- [22] M. A. Valuyan, One-loop correction to the Casimir energy in Lifshitz-like theory, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, Vol. 18, No. 13, p. 2150204, 2021.
- [23] V. V. Nesterenko and I. G. Pirozhenko, Spectral Zeta Functions for a Cylinder and a Circle, *J. Math. Phys.* Vol. 41, p. 4521, 2000.
- [24] E. Elizalde, S.D. Odintsov, A. Romeo, A. A. Bytesenko and S. Zibrini, *Zeta Regularization Techniques with Applications*, Singapore: World Scientific, 1994 .
- [25] K. A. Milton, and L. L. Deraad, Casimir self-stress on a perfectly conducting spherical shell, *Ann. Phys. (N.Y.)*, Vol. 115, p. 388, 1978 .
- [26] R. Balian and B. Duplantier, Electromagnetic waves near perfect conductors. II. Casimir effect, *Ann. Phys. (N.Y.)*, Vol. 112, p. 165, 1978 .