دریافت: ۵ مهر ۹۵ پذیرش: ۱۰ آذر ۹۵

# حل مساله معکوس ارتعاشی برای سیستم جرم و فنر متوالی

**محمدرضا تابش‌پور**

استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، **دانشگاه صنعتی شریف**، تهران، ایران
* تهران، ۱۱۵۵۹۵۶۷، tabeshpour@sharif.edu

**چکیده**

در این مقاله مساله ارتعاش معکوس برای دسته خاصی از سیستم‌های ارتعاشی بررسی شده است. در این گونه سیستم‌ها که موسوم به سازه‌های برشی می‌باشند، جرم‌ها به طور متوالی قرار داشته و بین دو جرم متوالی یک فنر وجود دارد. در اینجا از اثر میرایی صرف نظر می‌شود. هدف، تعیین مقادیر جرم و سختی با معلوم بودن فرکانس‌های ارتعاشی می‌باشد. روشی برای تعیین مقادیر منحصر به فرد جرم وسختی وجود دارد که در اینجا نیز ارائه شده و کارایی آن توسط مثال‌هایی بررسی شده است.

**کلیدواژگان**

مساله معکوس، ماتریس جرم، ماتریس سختی، مقادیر ویژه

# Vibration inverse problem for spring-mass systems

**M. R. Tabeshpour**

Assistant Professor, Center of Excellence in Hydrodynamics and Dynamics of Marine Vehicles, Mechanical Engineering Department, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.
* P.O.B. 11559567, Iran, tabeshpour@sharif.edu

**Abstract**

Inverse problem for spring-mass systems called shear structures is presented in this paper. Shear structure is a system with spring and mass after each other and there is a spring between two masses. Damping effects are neglected here. The aim is determining the mass and stiffness of the system with pre assigned frequencies. There is a method for solving such a problem that is presented here. Some examples are discussed. Such a problem can be used for several important problems.

**Keywords**

Inverse Problem, Mass Matrix, Stiffness Matrix, Eigen-value

## ۱- مقدمه

مساله برگشتی ارتعاش دارای دو شکل کلی می‌باشد. حالت اول عبارتست از تعیین ماتریس‌های جرم و سختی در صورتی که فرکانس‌های سیستم، داده شده باشند. این مساله برای سازه‌های میله‌ای [۳-۱]، تیرها [۵-۴] و سیستم‌های گسسته[۱۰-۶] توسط برخی از محققین بررسی شده است. حالت دوم، تعیین تغییرات در خواص مکانیکی (جرم و سختی) به منظور اصلاح فرکانس‌های ارتعاشی می‌باشد. در این حالت هدف، انتقال برخی از مقادیر ویژه سیستم به سمت مقدارهای دلخواه می‌باشد. با ترکیب دو حالت بیان شده می‌توان یک مساله معکوس کامل را حل نمود.دراین مطالعه به مورد اول پرداخته می‌شود و در آن از آلگوریتم ارائه شده در مرجع [۱] استفاده شده است.

آلگوریتم فوق برای سازه‌های برشی جواب منحصر به فرد نمی‌دهد، در نتیجه در این مقاله روشی برای حل این مشکل ارائه شده وکارایی آن توسط چند مثال بررسی می‌گردد.

## ۲- معادلات دینامیکی

با در نظر گرفتن شکل ۱ معادله دینامیکی حاکم بر آن در حالت ارتعاش آزاد را می‌توان بصورت زیر نوشت[۱]:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\}+[K]\{x(t)\}=\{0\} \qquad (۱)$$

که در آن $\{0\}$ یک بردارستونی دارای $N$ عضو برابر صفر، $[M]$ ماتریس جرم و $[K]$ ماتریس سختی بوده و:

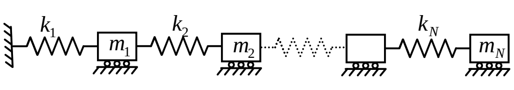
$$[M]=\mathrm{diag}\{m_1,m_2,\cdots,m_N\} \qquad (۲)$$

$$[K]=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -k_N & k_N \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

همچنین $\{x\}$ یک بردار ستونی دارای $N$ عضو می‌باشد که مولفه $i$ ام آن یعنی $x_i$ برابر جابجایی نسبی بین طبقه $i$ و زمین می‌باشد. چنانچه مشاهده می‌شود ماتریس‌های جرم وسختی هر دو متقارن هستند. همچنین هر دو ماتریس، مثبت - معین می‌باشند. $[M]$ یک ماتریس قطری و $[K]$ یک ماتریس سه قطری می‌باشد. جواب معادله (۱) را می‌توان به شکل $\{x(t)\}=\{x\}\sin(\omega t+\theta)$ در نظر گرفت، در نتیجه:

$$[K]\{x\}=\lambda[M]\{x\} \qquad \lambda=\omega^2 \qquad (۴)$$

$\lambda$ مقدار ویژه و $\{x\}$ بردار ویژه متناظر آن می‌باشد.




**شکل ۱** سازه برشی

$\lambda$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\lambda=\frac{\{x\}^T[K]\{x\}}{\{x\}^T[M]\{x\}} \qquad (۵)$$

و با توجه به قطری بودن $[M]$ می‌توان نوشت:

$$\{x\}^{T}[M]\{x\}=\sum_{i=1}^{N}m_i x_i^2 \quad (۶)$$

برای تشریح مساله معکوس ارتعاشی، ابتدا قضایای زیر بیان می‌شود:

قضیه ۱: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه برای جفت ماتریس‌های حقیقی و متقارن $[M]$ و $[K]$ حقیقی می‌باشند.

قضیه ۲: در معادله (۴) اگر دو مقدار ویژه متمایز باشند $(\lambda_i \neq \lambda_j)$ در این صورت بردارهای ویژه متناظر نسبت به $[M]$ و $[K]$ متعامدند، یعنی

$$\{x\}_i^{T}[M]\{x\}_j=\{x\}_i^{T}[K]\{x\}_j=0$$

قضیه ۳: اگر $[M]$ , $[K]$ مثبت - معین باشند، آنگاه معادله (۴) دارای $N$ مقدار ویژه مثبت می‌باشد.

قضیه ۴: اگر $(D_i)_1^N$ ماینورهای اصلی ماتریس $[M]$ باشند در این صورت $[A]$ مثبت - معین است، اگر و فقط اگر $(D_i)_1^N>0$ و مثبت - نیمه معین است اگر و فقط اگر $(D_i)_1^N \geq 0$ و $D_N=0$ .

در معادله (۴) ماتریس $[M]$ مثبت و معین و $[K]$ مثبت - نیمه معین است.با تعریف $[L]$ به صورت رابطه :

$$[L]=[L]^{T}=\mathrm{diag}\left[m_1^{1/2},m_2^{1/2},\ldots,m_N^{1/2}\right] \quad (۷)$$

می‌توان نوشت:

$$[M]=[L][L]^{T} \quad (۸)$$

با تعریف بردار $\{u\}=[L]^{T}\{x\}$ که منجر به تساوی $\{x\}=\left([L]^{T}\right)^{-1}\{u\}$ می‌شود و با ضرب طرفین رابطه (۴) ازسمت چپ در $[L]^{-1}$ رابطه زیر بدست می‌آید:

$$[B]\{u\}=\lambda\{u\} \quad , \quad \{u\}=[M]^{1/2}\{x\} \quad (۹)$$

$$[B]=[L]^{-1}[K]\left([L]^{T}\right)^{-1}=[M]^{-1/2}[K][M]^{1/2} \quad (۱۰)$$

## ۳- تئوری مساله معکوس

با توجه به معادله (۱۰) از آنجا که ماتریس $[K]$ متقارن است، $[B]$ نیز متقارن خواهد بود. همچنین ماتریس $[B]$ سه قطری و مثبت معین (یا مثبت - نیمه معین) است. چنین ماتریسی را ماتریس ژاکوبی می‌نامند. در فرم استاندارد، $[B]$ دارای اعضای مثبت روی قطر بوده و اعضای غیرقطری آن منفی می‌باشند:

$$[B]=\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -b_1 & a_2 & -b_2 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-1} & -b_{N-1}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_{N-1} & a_N \end{bmatrix} \quad (۱۱)$$

ماینورهای اصلی $([B]-\lambda[I])$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$P_0=1,\ P_1(\lambda)=a_1-\lambda,$$
$$P_2(\lambda)=\begin{vmatrix} a_1-\lambda & -b_1\\ -b_1 & a_2-\lambda \end{vmatrix},\ldots, \quad (۱۲)$$
$$P_N(\lambda)=\left|[B]-\lambda[I]\right|$$

و رابطه برگشتی زیر برقرار می‌باشد:

$$P_{r+1}(\lambda)=\left(a_{r+1}-\lambda\right)P_r(\lambda)-b_r^2P_{r-1}(\lambda),\ (r=1,2,\ldots,N-1) \quad (۱۳)$$

تعریف: $s_r(\lambda)$ برابر است با تعداد تجمعی تغییر علامت‌ها در جملات رشته $\left(P_i(\lambda)\right)_0^r$

قضیه ۵ : اگر $b_r^2>0$ باشد، $(r=1,2,\cdots,N-1)$، آنگاه $\left(P_r(\lambda)\right)_1^N$ یک رشته (دنباله) اشتورم را تشکیل می‌دهد که دارای دو خاصیت زیر است:

۱- $P_0(\lambda)$ همواره دارای یک علامت است $\left(P_0(\lambda)\equiv 1\right)$

۲- اگر $\lambda$ جواب $P_r(\lambda)$ باشد، آنگاه $P_{r+1}(\lambda)$ و $P_{r-1}(\lambda)$ غیر صفر بوده و دارای علامت‌های متفاوتند.

قضیه ۶: $s_r(\lambda)$ فقط هنگامی تغییر می‌کند که $\lambda$ از مقدار جواب $P_r(\lambda)$ بگذرد (زیادتر شود).

قضیه ۷: جواب‌های $P_r(\lambda)$ حقیقی هستند، بعلاوه اگر $P_r(\lambda^0)\neq 0$ و $s_r(\lambda^0)=k$ آنگاه $P_r(\lambda)$ دارای $k$ جواب کمتر از $\lambda^0$ خواهد بود.

از قضایای فوق می‌توان نتایجی به شرح زیر گرفت:

۱- مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی متمایز می‌باشند.

۲- تعدادی از جواب‌های $P_r(\lambda)$ که بین $\alpha$ و $\beta$ می‌باشند $(\alpha<\lambda<\beta)$، برابر $s_r(\beta)-s_r(\alpha)$ می‌باشد.

۳- اگر $\lambda_0$ یکی از جواب‌های $P_r(\lambda)$ باشد، آنگاه هنگامی که $\lambda$ از مقدار $\lambda^{0-}$ به $\lambda^{0+}$ می‌رسد علامت عبارت $P_{r-1}(\lambda).P_r(\lambda)$ از مثبت به منفی تبدیل می‌شود و $s_1(\lambda)$ یک واحد افزایش می‌یابد.

قضیه ۸: بین هر دو جواب مجاور برای $P_r(\lambda)$، یک و فقط یک جواب از $P_{r-1}(\lambda)$ و همچنین یک و فقط یک جواب از $P_{r+1}(\lambda)$ جای می‌گیرد.

قضیه ۹: یک ماتریس ژاکوبی منحصر به فرد $[B]$ وجود دارد به نحوی که مقادیر ویژه آن $(\lambda_i)_1^N$ بطور متوالی و متمایز باشند:

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_N$$

و دارای بردارهای ویژه یکه $\{u\}$ است که دارای مقادیر مشخص برای $(u_{1i})_1^N$ یا $(u_{Ni})_1^N$ می‌باشد.

اثبات: این قضیه دارای دو قسمت وجود و یگانگی می‌باشد. اثبات وجود آن توسط ساختن ماتریس با استفاده از الگوریتم لانکزوس انجام می‌گیرد. اثبات ارائه شده برای حالتی است که $(u_{1i})_1^N$ معین باشند. بردارهای ویژه $\{u\}_i$ در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$[B]\{u\}_i=\lambda_i\{u\}_i \quad (۱۴)$$

با قراردادن $[U]=\left[\{u\}_1,\cdots,\{u\}_N\right]$ و با استفاده از شرط تعامد که بصورت( $\delta_{ij}$ دلتای کرانکر می‌باشد):

$$\{u\}_i^{T}\{u\}_j=\delta_{ij} \quad (۱۵)$$

می‌باشد می‌توان نوشت:

$$[U]\ [U]^{T}=[U]^{T}[U]=[I] \quad (۱۶)$$

رابطه فوق را می‌توان به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$\sum_{i=1}^{N}u_{ri}u_{si}=\delta_{rs} \quad (۱۷)$$

با قراردادن:

$$\{x\}_r=\{u_{r1},u_{r2},\ldots,u_{rN}\}^{T} \quad (۱۸)$$

معادله (۱۷) به صورت زیر در می‌آید:

$$\{x\}_r^{T}\{x\}_s=\delta_{rs} \quad (۱۹)$$

$$[B]\ [U]=[U]\ [\Lambda] \quad (۲۰)$$

با تعریف $[X]=[\{x\}_1,\{x\}_2,\ldots,\{x\}_N]=[U]^{T}$ معادله فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود: ( $[\Lambda]$ ماتریس قطری مقادیر ویژه است):

$$[X]\,[B]=[\Lambda]\,[X] \tag{۲۱}$$

با جایگذاری $[B]$ از رابطه (۱۱) و براساس تعریف $[X]$ اولین معادله از دستگاه معادلات (۲۱) به شکل زیر می‌باشد:

$$a_1\{x\}_1-b_1\{x\}_2=[\Lambda]\{x\}_1 \tag{۲۲}$$

اگر طرفین رابطه بالا از چپ در $\{x\}_1^T$ ضرب شود، مقدار $a_1$ بدست می‌آید:

$$a_1=\{x\}_1^T[\Lambda]\{x\}_1 \tag{۲۳}$$

بعد از تعیین $a_1$ و با استفاده از رابطه (۲۲) می‌توان نوشت:

$$b_1\{x\}_2=\{d\}_2=a_1\{x\}_1-[\Lambda]\{x\}_1 \tag{۲۴}$$

از آنجا که طول بردار $\{x\}_2$ برابر واحد است، در نتیجه $b_1$ معادل نرم بردار $\{d\}_2$ می‌باشد، و سپس از معادله بالا بردار $\{x\}_2$ قابل تعیین است. با معلوم شدن $a_1$ و $b_1$ می‌توان معادله $i$ ام از دستگاه معادلات (۲۱) را به صورت زیر نوشت:

$$-b_{i-1}\{x\}_{i-1}+a_i\{x\}_i-b_i\{x\}_{i+1}=[\Lambda]\{x\}_i \tag{۲۵}$$

با استفاده از شرط تعامد مشابه حالت قبلی می‌توان نوشت:

$$a_i=\{x\}_i^T[\Lambda]\{x\}_i \tag{۲۶}$$

$$\{d\}_{i+1}=-b_{i-1}\{x\}_{i-1}+a_i\{x\}_i-[\Lambda]\{x\}_i \tag{۲۷}$$

$$b_i=\left\|\{d\}_{i+1}\right\| \tag{۲۸}$$

$$\{x\}_{i+1}=\frac{1}{b_i}\{d\}_{i+1} \tag{۲۹}$$

این فرآیند برای $i = 2,3, ...., N$ قابل انجام است و علامت $\|\ \|$ به معنای نرم اقلیدسی می‌باشد. روش بیان شده، الگوریتم لانکزوس نام دارد. با این الگوریتم می‌توان ماتریس $[B]$ و بطور همزمان بردارهای ویژه آن را بدست آورد.

## ۴- مسأله معکوس برای ماتریس ژاکوبی

دنباله $(\lambda_i)_1^N$ و $(\lambda_i^0)_1^N$ داده شده است، هدف استخراج ماتریس $[B]$ می‌باشد به نحوی که $(\lambda_i)_1^N$ مقادیر ویژه آن باشند. $(\lambda_i^0)_1^N$ مقادیر ویژه ماتریس $[B^0]$ هستند. با تبدیل $a_N$ به $a_N^0$ در $[B]$ ماتریس $[B^0]$ بدست می‌آید. دنباله $(\lambda_i^0)_1^N$ مقادیر ویژه دستگاه $[B^0]\{u\}_i=\lambda_i^0\{u\}_i$ می‌باشند و:

$$\lambda_1<\lambda_1^0<\lambda_2<\lambda_2^0<\ldots<\lambda_N<\lambda_N^0 \tag{۳۰}$$

به علت آنکه مجموعه بردارهای ویژه یک پایه برای فضای برداری حاصل می‌باشد، هر بردار را می‌توان به صورت ترکیب خطی از آنها نوشت:

$$\{u\}=\sum_{i=1}^N\alpha_i\{u\}_i \quad , \quad [B]\{u\}=\sum_{i=1}^N\lambda_i\alpha_i\{u\}_i \tag{۳۱}$$

با توجه به تعریف ماتریس‌های $[B]$ و $[B^0]$ می‌توان نوشت:

$$[B^0]\{u\}=[B]\{u\}+\left(a_N^0-a_N\right)u_N\{e\}_N \tag{۳۲}$$

$u_N$ آخرین عضو بردار $\{u\}$ می‌باشد. با استفاده از روابط فوق می‌توان معادله زیر را استخراج کرد:

$$\sum_{i=1}^N\lambda_i\alpha_i\{u\}_i+\left(a_N^0-a_N\right)u_N\{e\}_N=\lambda\sum_{i=1}^N\alpha_i\{u\}_i \tag{۳۳}$$

با ضرب کردن طرفین رابطه بالا در $\{u\}_i^T$ و استفاده از شرط تعامد رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\alpha_i=\left(a_N^0-a_N\right)u_N\frac{u_{iN}}{\lambda-\lambda_i} \tag{۳۴}$$

با جایگذاری مقدار $\alpha_i$ در رابطه (۳۱) می‌توان نوشت:

$$\{u\}=\left(a_N^0-a_N\right)u_N\sum_{i=1}^N\frac{u_{Ni}u_i}{\lambda-\lambda_i} \tag{۳۵}$$

آخرین عضو بردار $\{u\}$ همان $u_N$ می‌باشد در نتیجه با مساوی قراردادن مولفه‌های آخر از رابطه قبلی معادله مقدار مشخصه زیر بدست می‌آید:

$$1=\left(a_N^0-a_N\right)\sum_{i=1}^N\frac{u_{Ni}^2}{\lambda-\lambda_i} \tag{۳۶}$$

ریشه‌های این معادله $(\lambda_i^0)_1^N$ می‌باشند، بنابراین رابطه بالا را با مخرج مشترک گرفتن می‌توان به شکل زیر مرتب کرد:

$$\prod_{i=1}^N(\lambda-\lambda_i)-P\left(a_N^0-a_N\right)=\prod_{i=1}^N\left(\frac{\lambda-\lambda_i^0}{\lambda-\lambda_i}\right) \tag{۳۷}$$

$$P=\frac{\sum_{i=1}^N\left(u_{Ni}^2\prod_{j\neq i}^N(\lambda-\lambda_j)\right)}{\prod_{i=1}^N(\lambda-\lambda_i)} \tag{۳۸}$$

با قراردادن $\lambda=\lambda_i$ جمله اول سمت چپ حذف می‌گردد و در عبارت سمت چپ فقط جمله $i$ ام باقی می‌ماند. به علت آنکه فقط در عبارت $u_{Ni}^2\prod_{j=1}^N(\lambda-\lambda_j)$ جمله $\lambda=\lambda_i$ وجود ندارد، در حالی که در سایر جملات مشابه، به علت وجود جمله $(\lambda-\lambda_i)$ کل عبارت در صورتی که $\lambda=\lambda_i$ باشد، برابر صفر می‌گردد و رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\left(a_N^0-a_N\right)u_{Ni}^2=\left(\lambda_i^0-\lambda_i\right)\prod_{j=1}^N\left(\frac{\lambda_i-\lambda_j^0}{\lambda_i-\lambda_j}\right) \tag{۳۹}$$

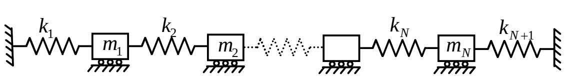
همچنین با مقایسه تریس یعنی مجموع اعضای قطری در ماتریس $[B]$ و $[B^0]$ می‌توان نوشت:

$$\left(a_N^0-a_N\right)=\sum_{j=1}^N\left(\lambda_j^0-\lambda_j\right)>0 \tag{۴۰}$$

## ۵- مساله معکوس برای سیستم جرم و فنر

شکل ۱ یک سیستم سازه ای $N$ درجه آزادی را نشان می‌دهد که ماتریس جرم و سختی آن مطابق معادلات (۲) و (۳) می‌باشند. با افزودن سختی $k_{N+1}$ به صورت شکل ۲ یک سیستم جدید بدست می‌آید که ماتریس سختی آن به صورت زیر است:

$$\left[K^0\right]=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & \ldots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -k_N & k_N+k_{N+1} \end{bmatrix} \tag{۴۱}$$




**شکل ۲** مدل کمکی

ماتریس‌های $[B]$ و $[B^0]$ بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[B]=[M]^{-1/2}[K][M]^{-1/2}\ ,\quad [B^0]=[M]^{-1/2}[K^0][M]^{-1/2} \tag{۴۲}$$

اعضای آخر روی قطر ماتریس‌های $[B]$ و $[B^0]$ از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$a_N = \frac{k_N}{m_N} \quad , \quad a_N^0 = \frac{k_N + k_{N+1}}{m_N} \tag{۴۳}$$

به منظور یافتن ماتریس $[B]$ با توجه به توضیحات قسمت قبل می‌توان به روش گام به گام زیر عمل کرد:

۱- استفاده از رابطه (۴۰) به منظور یافتن $\frac{k_{N+1}}{m_N}$.

۲- محاسبه $u_{Ni}$ برای $i = 1,2,\cdots,N$ توسط معادلات (۳۹) و (۴۰).

۳- استفاده از الگوریتم لانکزوس مطابق قضیه (۹) به منظور محاسبه $[B]$.

۴- محاسبه ماتریس‌های جرم و سختی از روی $[B]$.

گام‌های ۱ تا ۳ قبلاً توضیح داده شده است. در اینجا به گام ۴ پرداخته می‌شود.

اگر نیروی استاتیکی $f_1 = k_1$ در شکل ۱ به جرم $m_1$ وارد گردد، بردار جابجایی سیستم از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\{x\} = \{1,1,\cdots,1\}^T \tag{۴۴}$$

با توجه به رابطه (۱۴) می‌توان نوشت:

$$\{u\} = [M]^{1/2}\{x\} = \{m_1^{1/2}, m_2^{1/2}, \ldots, m_N^{1/2}\}^T \tag{۴۵}$$

با حاصل ضرب ماتریس سختی $[K]$ از رابطه (۳) در بردار $\{x\}$ مقدار زیر بدست می‌آید:

$$[K]\{x\} = \{k_1, 0, 0, \cdots, 0\}^T \tag{۴۶}$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$[B]\{u\} = \left([M]^{-1/2}[K][M]^{-1/2}\right)\left([M]^{1/2}\{x\}\right) = [M]^{-1/2}[K]\{x\} \tag{۴۷}$$

از ترکیب دو معادله بالا رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$[B]\{u\} = \{m_1^{-1/2}k_1, 0, \ldots, 0\}^T \tag{۴۸}$$

دستگاه حاصل از ترکیب روابط فوق به شکل زیر است:

$$[B]\{m_1^{1/2}, m_2^{1/2}, \ldots, m_N^{1/2}\}^T = \{m_1^{-1/2}k_1, 0, \ldots, 0\}^T \tag{۴۹}$$

دستگاه فوق دارای $N$ معادله و $N+1$ مجهول است ( $k_1$ و $m_1$ تا $m_N$). سمت راست معادله اول از $N$ معادله فوق باعث ورود یک مجهول اضافی $(k_1)$ و همچنین باعث غیرخطی شدن دستگاه می‌گردد. در نتیجه بهتر است در نظر گرفته نشود. اکنون $(N-1)$ معادله می‌ماند و $N$ مجهول ($m_1$ تا $m_2$). دستگاه جدید، یک دستگاه همگن است. با توجه به این نکته که در یک سازه برشی اگر تمام جرم‌ها و سختی‌ها در یک ضریب ثابت ضرب شوند، تغییری در فرکانس‌ها و اشکال مودی مجموعه حاصل نمی‌شود، می‌توان بین مقادیر $m_1$ تا $m_N$ یکی را دلخواه فرض کرد و سپس بقیه مقادیر متناسب با آن را یافت و به این صورت ماتریس جرم پایه را تشکیل داد و سپس می‌توان ماتریس سختی پایه را بدست آورد.

اکنون با گذاشتن یک قید می‌توان سازه پایه را به سازه فیزیکی واقعی تبدیل کرد. این قیدها می‌تواند به یکی از صورت‌های زیر باشد:

۱- مشخص بودن جمع جرم طبقات: $\sum_{i=1}^{N} m_i = cte$

۲- معلوم بودن سختی یکی از طبقات : $k_i = cte$

۳- قراردادن یک حد پایین برای سختی هر کدام از طبقات:

$$k_i \geq cte \quad (i = 1,2,\ldots,N)$$

با قراردادن هریک از قیود فوق و یا ترکیبی از آنها می‌توان سازه پایه را به سازه فیزیکی اصلی تبدیل کرد.

## ۶- حل مثال و نتیجه گیری عددی

با توجه به آنکه هدف، تعیین سختی و جرم طبقات می‌باشد، به نحوی که سیستم حاصل، فرکانس‌های موردنظر را به دست دهد. در نتیجه $\lambda_i^0$ ها، کمکی می‌باشند. این مساله را می‌توان به دو دسته کلی تقسیم بندی کرد:

الف - تعداد فرکانس‌های تعیین شده با درجات آزادی (تعداد طبقات) برابر است.

ب- تعداد فرکانس‌های تعیین شده از درجات آزادی کمتر است.

در اینجا حالت الف بررسی می‌شود.

### ۶-۱- مثال اول

جرم‌ها و سختی‌های یک سیستم ۴ درجه آزادی را طوری تعیین کنید که مقادیر ویژه (مربع فرکانس‌ها) مطابق جدول ۱ بصورت زیر باشد $(\lambda = \omega^2)$:

$\lambda_1 = 20$ , $\lambda_2 = 120$ , $\lambda_3 = 250$ , $\lambda_4 = 400$, $\sum_{i=1}^{4} m_i = 6$ با درنظر گرفتن $\lambda_i^0$ ها مطابق جدول ۲ سختی و جرم طبقات بدست می‌آیند، که در جدول ۳ مشاهده می‌شوند. مطابق مطالب توضیح داده شده، سیستم ۴ درجه آزادی که دارای $\lambda_i$ های فوق باشد و افزودن سختی پنجم باعث انتقال مقادیر ویژه به $\lambda_i^0$ ها شود منحصر به فرد است. ولی با توجه به مقادیر انتخابی برای $\lambda_i^0$ ها سختی و جرم طبقات عوض می‌شود. در نتیجه اگر مطابق جدول ۲ دسته دیگری برای $\lambda_i^0$ ها در نظر گرفته شود، مقادیر جرم و سختی تغییر می‌کند.

### ۶-۲- مثال دوم

هدف تعیین سختی و جرم یک سیستم ۵ درجه آزادی می‌باشد، به نحوی که

$$\lambda_i = 100\,,\ \lambda_2 = 1000\,,\ \lambda_1 = 3000\,,\ \lambda_4 = 5000,$$

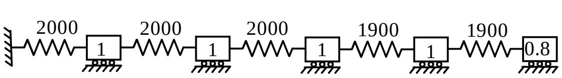
$$\lambda_5 = 7000, \sum_{i=1}^{5} m_i = 50$$

حل این مثال برای دو دسته $\lambda_i^0$ های گوناگون در جدول ۲ مشاهده می‌شود. دیده می‌شود که در این مثال نیز جرم‌ها و سختی‌ها در حالت‌های گوناگون $\lambda_i^0$ با هم تفاوت دارند.

**پیشنهاد:** علت وجود تغییرات قابل ملاحظه در حالت‌های گوناگون $\lambda_i^0$، تغییر $k_{N+1}$ در حالت‌های گوناگون است. با ناچیز گرفتن $k_{N+1}$ سیستم اولیه با سیستمی که در آن $k_{N+1}$ وجود دارد بسیار به هم نزدیک می‌شوند و در نتیجه مقادیر ویژه آنها نیز تقریباً یکسان می‌گردند. برای این منظور باید $\lambda_i^0$ را بسیار نزدیک به $\lambda_i$ گرفت (جدول ۲). حل دو مثال قبل با درنظر گرفتن این موضوع در جدول ۳ وجود دارد.

### ۶-۱- مثال سوم

سیستمی مطابق شکل ۳ و مقادیر ویژه آن وجود دارد. با درنظر گرفتن $\lambda_i^0$ ها مطابق جدول ۲ ملاحظه می‌شود که مقادیر جرم و سختی بدست آمده از این روش در حالتی که $\lambda_i^0$ ها بسیار نزدیک به $\lambda_i$ ها انتخاب می‌شوند جواب‌های بسیار خوبی بدست می‌دهد (جدول ۳).




*شکل۳ مثال سوم*

## ۷- مراجع


1. G. M. Gladwell, " Inverse Problems in Vibration", Dordrecht: Martinus Nijhoff, 1986.
2. O. H. Hald, "Inverse Eigenvalue Problems for Jacobi Matrices", Linear Algebra and its Applications, Vol. 14, pp. 63-85, 1976.
3. G. M. L. Gladwell, "The Inverse Problem for the Vibrating Beam", Proceedings of the Royal Society of London A393 pp. 277-295, 1984.
4. G. M. L. Gladwell, " The Inverse Mode Problem for Lumped-Mass Systems", Q. J. Mech. Appl. Math, Vol. 39, Pt. 2, pp. 297-307, 1986.
5. G. M. L. Gladwell, N. B. Willams, B. He, D. Wang, " How Can We Recognize an Acceptable Mode Shape for a Vibrating Beam", Q. J. Mech. Appl. Math, Vol. 42, Pt. 2, pp. 303-316, 1989.
6. Y. M. Ram, " Inverse Mode Problems for the Discrete Model of a Vibrating Beam", Journal of Sound and Vibration, Vol. 169, No. 2, pp. 239-252, 1994.
7. Y. M. Ram, J. Gladwell, " Physical Parameters Reconstruction of a Free-Free Mass-Spring System from its Spectra", SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 52, pp. 140-152, 1992.
8. Y. M. Ram, G. M. L. Gladwell, "Constructing a Finite Element Model of a Vibratory Rod from Eigendata", Journal of Sound and Vibration, Vol. 169, pp. 229-237, 1994.
9. G. M. L. Gladwell, J. A. Gbadeyan , "On the Inverse Problem of the Vibrating String or Rod", Q. J. of Mechanics and Applied Mathematics, , Vol. 38, pp. 169-174, 1985.
10. J. H. Wilkinson, "The Algebric Eigenvalue problem",Oxford U. P.,London, 1965.


**جدول ۱** مقادیر ویژه مثال‌ها $\left(\lambda_i = \omega_i^2\right)$

| شماره مثال | مجموع جرم‌ها | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | $\lambda_4$ | $\lambda_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (۱) | ۶ | ۲۰ | ۱۲۰ | ۲۵۰ | ۴۰۰ | - |
| (۲) | ۵۰ | ۱۰۰ | ۱۰۰۰ | ۳۰۰۰ | ۵۰۰۰ | ۷۰۰۰ |
| (۳) | ۴,۸ | ۱۷۳,۲ | ۱۴۳۲,۲ | ۳۵۳۱,۰ | ۵۶۶۸,۲ | ۷۲۷۰,۳ |

**جدول ۲** ورودی مثال‌ها

| شماره مثال | | $\lambda_1^0$ | $\lambda_2^0$ | $\lambda_3^0$ | $\lambda_4^0$ | $\lambda_5^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (۱) | الف | ۴۰ | ۱۸۰ | ۳۰۰ | ۴۵۰ | __ |
| | ب | ۳۰ | ۱۹۰ | ۲۹۰ | ۴۸۰ | __ |
| | ج | ۵۰ | ۱۷۰ | ۳۲۰ | ۴۶۰ | __ |
| | د | ۲۰,۰۱ | ۱۲۰,۰۱ | ۲۵۰,۰۱ | ۴۰۰,۰۱ | __ |
| (۲) | الف | ۱۵۰ | ۱۲۰۰ | ۳۵۰۰ | ۵۷۰۰ | ۸۰۰۰ |
| | ب | ۱۳۰ | ۱۴۰۰ | ۳۳۰۰ | ۵۵۰۰ | ۷۶۰۰ |
| | ج | ۱۰۰,۰۱ | ۱۰۰۰,۰۱ | ۳۰۰۰,۰۱ | ۵۰۰۰,۰۱ | ۷۰۰۰,۰۱ |
| (۳) | الف | ۲۰۰ | ۱۷۰۰ | ۴۰۰۰ | ۶۲۰۰ | ۸۰۰۰ |
| | ب | ۱۷۳,۲۱ | ۱۴۳۲,۲۱ | ۳۵۳۱,۰۱ | ۵۶۶۸,۲۱ | ۷۲۷۰,۳۱ |

**جدول ۳** خروجی مثال‌ها

| شماره مثال | | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | $m_5$ | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (۱) | الف | ۲,۱۱ | ۲,۰۴ | ۱,۱۶ | ۰,۶۹ | __ | ۲۱۰,۹ | ۱۹۴,۱ | ۱۸۵,۰ | ۱۰۹,۴ | __ |
| | ب | ۲,۱۷ | ۲,۶۹ | ۰,۷۸ | ۰,۳۶ | __ | ۱۶۹,۹ | ۲۳۳,۴ | ۱۴۸,۵ | ۶۷,۳۷ | __ |
| | ج | ۲,۳۲ | ۱,۵۳ | ۱,۲۹ | ۰,۸۶ | __ | ۲۴۳,۵ | ۱۷۶,۶ | ۱۶۷,۸ | ۱۳۰,۸ | __ |
| | د | ۲,۴۲ | ۱,۶۲ | ۱,۲۹ | ۰,۶۷ | __ | ۲۳۰,۸ | ۱۶۶,۳ | ۱۵۹,۹ | ۱۳۲,۶ | __ |
| (۲) | الف | ۲۲,۶۱ | ۱۱,۹۱ | ۸,۹۶ | ۵,۱۹ | ۱,۳۳ | ۵۶۲۵ | ۲۲۷۴۷ | ۱۷۵۴۴ | ۱۴۲۰۵ | ۵۴۹۹ |
| | ب | ۲۵,۷۵ | ۱۵,۵۱ | ۴,۸۸ | ۲,۷۵ | ۱,۱۰ | ۵۳۰۷ | ۳۱۷۳۴ | ۱۳۸۶۸ | ۶۵۴۲ | ۴۰۶۲ |
| | ج | ۱۱,۵۵ | ۱۱,۱۳ | ۹,۷۰ | ۱۰,۸۸ | ۶,۷۵ | ۷۴۷۵ | ۱۷۷۵۳ | ۱۷۲۸۰ | ۱۹۴۹۳ | ۲۱۷۳۸ |
| (۳) | الف | ۲,۲۱ | ۱,۵۴ | ۰,۷ | ۰,۲۸ | ۰,۰۷ | ۹۲۶ | ۳۷۰۲ | ۱۹۰۴ | ۸۴۷ | ۲۸۸ |
| | ب | ۱,۱۳ | ۱,۰۸ | ۱,۰۲ | ۱,۰۲ | ۰,۵۴ | ۱۷۳۴ | ۱۹۳۲ | ۱۹۵۶ | ۱۹۶۰ | ۱۹۴۳ |
| | ج | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۰,۸ | ۲۰۰۰ | ۲۰۰۰ | ۲۰۰۰ | ۱۹۰۰ | ۱۹۰۰ |