



بررسی رفتار ارتعاشی غیرخطی نانو ورق دایره‌ای از جنس مواد هدفمند با استفاده از مدل دیفرانسیلی غیرمحملی گرادیان کرنش

مرتضی پورعبدی^۱، محمد شیشه‌ساز^{۲*}، شهرام شهروئی^۱. سیدعلیرضا سیدرکنی‌زاده^۲

۱. گروه مهندسی مکانیک، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران

۲. گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

* نویسنده مسئول: mshishehsaz@scu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۸/۰۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۹/۲۰

چکیده

در این مقاله، رفتار ارتعاشی غیرخطی یک نانو ورق با هندسه دایره با فرض شرایط مرزی گیردار مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور، ترکیبی از شکل دیفرانسیلی نظریه الاستیسیته غیرمحملی، مدل گرادیان کرنش و اصل همپلتون، به همراه روابط کرنش-جابجایی غیرخطی فون کارمان و روش باقیمانده وزنی گالرکین برای گسسته‌سازی معادلات حاکم استفاده شده است. در ادامه تأثیر اثرات اندازه (اثر غیرمحملی و اثر مادی مدل گرادیان کرنش) و شرایط اولیه بر رفتار ارتعاشی سازه مدنظر بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند که این پارامترهای غیرمحملی و مادی به ترتیب منجر به کاهش و افزایش رفتار فرکانس‌های غیرخطی شده‌اند. در نهایت، افزایش مقدار اولیه جابجایی یک روند افزایشی برای نسبت فرکانسی به ازای هر پارامتر غیرمحملی و پارامتر مادی ایجاد می‌کند. همچنین، برای تمام پارامترهای غیرمحملی و پارامتر ماده، تفاوت بین نسبت فرکانس با افزایش شرایط اولیه کاهش یافته است.

کلمات کلیدی: ارتعاشات غیرخطی، نانو ورق دایره‌ای، اثرات اندازه، مدل دیفرانسیلی گرادیان کرنش غیرمحملی

مقدمه

کاربردهای گسترده بسیاری از سازه‌ها در مقیاس میکرو و نانو در زمینه‌های مختلف علوم و فن‌آوری مانند مهندسی و پزشکی به دلیل خواص مکانیکی و الکتریکی این سازه‌ها در مقیاس کوچک می‌باشد [۱ و ۲]. در برخی از کاربردها، از قبیل برداشت انرژی در سطوح مقیاس میکرو و مقیاس نانو، تشدیدکننده‌ها، ژنراتورها و محرک‌ها، رفتارهای مکانیکی از جمله ارتعاش، کمانش، تغییر شکل استاتیکی، نقش مهمی در عملکرد کلی دستگاه ایفا می‌کنند.

به‌طورکلی، دو تئوری الاستیسیته وابسته به اندازه کوپل تنش و گرادیان کرنش، متداول‌ترین تئوری برای مدل‌سازی رفتار ارتعاشی صفحات در مقیاس میکرو مورد استفاده قرار گرفته‌اند. این مدل‌سازی بر روی صفحات کوچک مقیاس با اشکال هندسی مختلف از جمله مستطیل، چهارضلعی، دایره‌ای و حلقوی انجام شده است. هم‌زمان با توسعه مدل‌های محیط پیوسته وابسته به مقیاس و اندازه برای صفحات در مقیاس میکرو، صفحات نانو مدرج تابعی یکی از موضوعات اصلی تحقیقات علمی در سال‌های گذشته بوده است. بسیاری از این تحقیقات، ارتعاشات آزاد خطی برای نانو صفحات مواد مدرج تابعی را گزارش کرده‌اند [۳ و ۴]. همچنین تعداد اندکی از مقالات در خصوص ارتعاشات غیرخطی بوده است [۵]. علاوه بر پاسخ ارتعاشی، خمش نیز از طریق این تئوری‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. تای و چوی [۶] با استفاده از مدل‌های ورق کرشلف و مندلین و تئوری کوپل تنش اصلاح‌شده نشان دادند که با افزایش پارامتر اندازه خیز عرضی صفحه میکرو به شدت کاهش می‌یابد، زیرا پارامتر مقیاس مرتبط با تنش‌های داخلی تأثیر فزاینده‌ای بر سفتی سازه‌ها در مقیاس میکرو دارد.

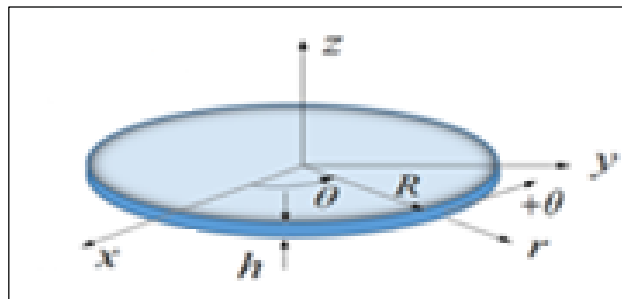
در حوزه بررسی رفتار مکانیکی صفحات مدرج تابعی در مقیاس نانو، اکثر تحقیقات بر اساس مدل‌های محیط پیوسته اصلاح‌شده الاستیسیته غیرمحملی [۷]، گرادیان کرنش غیرمحملی [۸ و ۹] انجام شده است. در این خصوص روش‌های مختلفی از



قبیل روش‌های تحلیلی، مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته و رویکرد هم هندسی^۲ برای تحلیل مکانیکی صفحات مقیاس نانو برای حل مسئله مورد استفاده قرار گرفته‌اند. علاوه بر صفحات مدرج تابعی در مقیاس نانو به شکل مستطیل، رفتار مکانیکی صفحات دایره‌ای و حلقوی نیز در مقالات مورد بررسی قرار گرفته است [۱۰ و ۱۱]. علاوه بر این، تحقیقات دیگری در خصوص رفتار مکانیکی صفحات متخلخل در مقیاس نانو [۱۲]، صفحات نانو از جنس مواد پیزو الکتریک [۱۳] و مواد مگنتوالکتریک [۱۴] انجام شده است. پانیاتونگ و همکاران [۱۵] با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلّی و تغییر شکل برشی مرتبه دوم صفحات، رفتار ارتعاشی یک صفحه مدرج تابعی در مقیاس نانو را بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که با افزایش پارامتر غیرمحلّی مقدار فرکانس‌های طبیعی سازه کاهش می‌یابد. همچنین خورشیدی و فلاح [۱۶] با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی نمای مدل الاستیسیته غیرمحلّی، رفتار کمانش یک صفحه مدرج تابعی در مقیاس نانو را بررسی کردند. آن‌ها فرض نمودند که خواص مواد با توجه به شکل قانون توانی در جهت ضخامت متفاوت است. مقادیر آن‌ها نشان داد که مقدار بار بحرانی با افزایش پارامتر غیرمحلّی کاهش می‌یابد. آن‌ها همچنین نشان دادند که افزایش ثابت غیرهمگن ماده مدرج تابعی موجب کاهش بار بحرانی می‌شود. با بررسی تحقیقات گذشته دریافت می‌شود که موضوع ارتعاشات غیرخطی ورق‌های دایره‌ای با ابعاد نانو بر اساس مدل دیفرانسیلی گرادیان کرنش غیرمحلّی مورد بررسی قرار نگرفته است. لذا در این مقاله این موضوع و همچنین تاثیر فاکتورهای موثر از قبیل اثرات اندازه و شرایط اولیه بر روی فرکانس‌های غیرخطی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

معادلات حاکم بر ورق

یک ورق دایره‌ای به ضخامت h و شعاع R از جنس ماده ایزوتروپیک با مدول الاستیسیته E ، چگالی ρ و ضریب پواسون ν در شکل (۱) نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل قابل مشاهده می‌باشد، به منظور استخراج معادله حرکت حاکم بر ورق از دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده شده است.



شکل ۱: هندسه ورق دایره‌ای و دستگاه مختصات استوانه‌ای

بر اساس فرضیات موجود در تئوری کلاسیک ورق، مولفه‌های میدان جابجایی u_r و u_z به صورت رابطه (۱) نمایش داده می‌شوند [۱۷]:

$$u_r(r, z, t) = u_0(r, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial r}(r, t), \quad u_z(r, z, t) = w_0(r, t) \quad (1)$$

که در آن w_0 و u_0 به ترتیب تابع جابجایی در راستای محورهای شعاعی و قائم صفحه میانی ورق مذکور است. همچنین بر اساس روابط هندسی کرنش-جابجایی مولفه‌های کرنش به صورت زیر حاصل می‌شوند [۱۷]:



$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} = \frac{u_0}{r} - z \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r}. \quad (2)$$

با استفاده از اصل همپلتون، معادله حرکت حاکم بر ورق مدور نمایش داده شده در شکل (۱) در راستای محورهای شعاعی r و عرضی z و همچنین شرایط مرزی به صورت روابط (۳) و (۴) حاصل می‌شود [۱۸]:

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rM_{rr}) - \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(rN_{rr} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \right\} = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \right), \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (rN_{rr}) - N_{\theta\theta} \right\} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}.$$

$$(1) N_{rr} = 0 \text{ or } u_0 = 0, \quad (2) Q_r = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rM_{rr}) - M_{\theta\theta} \right) = 0 \text{ or } w_0 = 0, \quad (4)$$

$$(3) M_{rr} = 0 \text{ or } \frac{\partial w_0}{\partial r} = 0.$$

در روابط فوق‌الذکر منته‌های تنش نیرویی N_{rr} و $N_{\theta\theta}$ ، همچنین منته‌های تنش گشتاور M_{rr} و $M_{\theta\theta}$ است. همچنین ثابت‌های اینرسی I_0 و I_2 به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(N_{rr}, N_{\theta\theta}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}) dz, \quad (M_{rr}, M_{\theta\theta}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}) z dz, \quad (5)$$

$$(I_0, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (1, z^2) \rho dz.$$

که در آن σ_{rr} و $\sigma_{\theta\theta}$ مولفه‌های تانسور تنش بوده که در ادامه بیان خواهند شد.

تئوری گرادیان کرنش غیرمحلی

در تئوری گرادیان کرنش غیرمحلی مولفه‌های تنش به صورت روابط (۶) و (۷) تعریف می‌شوند [۱۹]:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^{(0)} - \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \sigma_{rr}^{(1)} + \frac{1}{r} \left(\sigma_{rr}^{(1)} - \sigma_{\theta\theta r}^{(1)} - \sigma_{r\theta\theta}^{(1)} \right) \right\}, \quad (6)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} - \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \sigma_{r\theta\theta}^{(1)} + \frac{1}{r} \left(2\sigma_{r\theta\theta}^{(1)} - \sigma_{\theta\theta r}^{(1)} \right) \right\}.$$

با استفاده از روابط (۶) و تعریف پارامترهای سفتی (A, D) به فرم

$$(A, D) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{E}{(1-\nu^2)} (1, z^2) dz. \quad (7)$$

منته‌های تنش نیرویی N_{rr} و $N_{\theta\theta}$ ، همچنین منته‌های تنش گشتاور M_{rr} و $M_{\theta\theta}$ به صورت روابط (۸) و (۹) تعریف

می‌شود:



$$N_{rr} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} N_{rr} = A \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{\nu}{r} u_0 \right\} - \ell_s^2 A \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{\nu}{r^2} u_0 + \frac{\partial w_0}{\partial r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right\} - \frac{1}{r} \ell_s^2 (1+\nu) A \left\{ \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_0 + \frac{\partial w_0}{\partial r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} - (1-\nu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_0 \right) \right\}, \quad (8)$$

$$N_{\theta\theta} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} N_{\theta\theta} = A \left\{ \nu \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{\nu}{2} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r} u_0 \right\} - A \ell_s^2 (1-\nu^2) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_0 \right\} - A \ell_s^2 \frac{1}{r} \left\{ 2(1-\nu^2) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_0 \right) - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_0 + \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial w_0}{\partial r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right) \right\}.$$

$$M_{rr} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} M_{rr} = -D \left\{ \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right\} + D \ell_s^2 \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial^3 w_0}{\partial r^3} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} - \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right\} + \frac{1}{r} \ell_s^2 (1+\nu) D \left\{ \frac{\partial^3 w_0}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_0}{\partial r} - (1-\nu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \right\}, \quad (9)$$

$$M_{\theta\theta} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} M_{\theta\theta} = -D \left\{ \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right\} + D \ell_s^2 (1-\nu^2) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right\} + D \ell_s^2 \frac{1}{r} \left\{ 2(1-\nu^2) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \nu \frac{\partial^3 w_0}{\partial r^3} \right) \right\}.$$

که در آن ℓ_s پارامتر اندازه در مدل گرا دیان کرنش است. همچنین $e_0 a$ پارامتر اندازه در مدل الاستیسیته غیرمحملی بوده است [۱۹].

با جایگذاری روابط (۸) و (۹) در معادلات (۳) و استفاده از کمیت‌های بی‌بعد تعریف شده در رابطه (۱۰) معادلات بی‌بعد شده حرکت به صورت روابط (۱۱) و (۱۲) حاصل می‌شوند:

$$(s, U, W, \bar{h}, L_s, \lambda) = \frac{1}{R} (r, u_0, w_0, h, \ell_s, e_0 a), \quad \tau = \frac{1}{R^2} \sqrt{\frac{D}{I_0}} t, \quad \bar{A} = \frac{AR^2}{D}, \quad \bar{I}_2 = \frac{I_2}{I_0 R^2}. \quad (10)$$

$$\frac{1}{s} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left\{ -s \left(\frac{\partial^3 W}{\partial s^3} + \frac{\nu}{s} \frac{\partial W}{\partial s} \right) + s L_s^2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^3 W}{\partial s^3} + \frac{\nu}{s} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} - \frac{\nu}{s^2} \frac{\partial W}{\partial s} \right) + L_s^2 (1+\nu) \left(\frac{\partial^3 W}{\partial s^3} + \frac{1}{s} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial W}{\partial s} - (1-\nu) \left(\frac{1}{s} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial W}{\partial s} \right) \right) \right\} - \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ - \left(\nu \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial W}{\partial s} \right) + \ell_s^2 (1-\nu^2) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial W}{\partial s} \right) + L_s^2 \frac{1}{s} \left(2(1-\nu^2) \left(\frac{1}{s} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial W}{\partial s} \right) - \left(\frac{1}{s} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial W}{\partial s} + \nu \frac{\partial^3 W}{\partial s^3} \right) \right) \right\} \quad (11)$$

$$+ \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ s \frac{\partial W}{\partial s} \left(\bar{A} \left(\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)^2 + \frac{\nu}{s} U \right) - L_s^2 \bar{A} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \frac{\nu}{s} \frac{\partial U}{\partial s} - \frac{\nu}{s^2} U + \frac{\partial w_0}{\partial s} \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} \right) - \frac{1}{s} L_s^2 (1+\nu) \bar{A} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial U}{\partial s} - \frac{1}{s^2} U + \frac{\partial W}{\partial s} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} - (1-\nu) \left(\frac{1}{s} \frac{\partial U}{\partial s} - \frac{1}{s^2} U \right) \right) \right) \right\} = \frac{\partial^3 W}{\partial \tau^2} - \bar{I}_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial W}{\partial s} \right) \right) - \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left\{ \frac{\partial^3 W}{\partial \tau^2} - \bar{I}_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial W}{\partial s} \right) \right) \right\}.$$



$$\begin{aligned} & \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \bar{A}s \left(\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)^2 + \frac{\nu}{s} U \right) - \bar{A}L_s^2 s \left(\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \frac{\nu}{s} \frac{\partial U}{\partial s} - \frac{\nu}{s^2} U + \frac{\partial W}{\partial s} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} \right) \right. \\ & \quad \left. - \bar{A}L_s^2 (1+\nu) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial U}{\partial s} - \frac{1}{s^2} U + \frac{\partial W}{\partial s} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} - (1-\nu) \left(\frac{1}{s} \frac{\partial U}{\partial s} - \frac{1}{s^2} U \right) \right) \right\} \\ & - \bar{A} \frac{1}{s} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{s} U \right) + \bar{A}L_s^2 \frac{1}{s} (1-\nu^2) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial U}{\partial s} - \frac{1}{s^2} U \right) \\ & + \bar{A}L_s^2 \frac{1}{s^2} \left(2(1-\nu^2) \left(\frac{1}{s} \frac{\partial U}{\partial s} - \frac{1}{s^2} U \right) - \left(\frac{1}{s} \frac{\partial U}{\partial s} - \frac{1}{s^2} U + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \nu \frac{\partial W}{\partial s} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} \right) \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \end{aligned} \quad (12)$$

شرایط مرزی مرتبه بالا برای مرکز و لبه بیرونی ورق مدور به ترتیب به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$\text{@ } s=0: \quad \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial s^3} = 0, \quad \text{@ } S=1: \quad \begin{cases} \lim_{s \rightarrow 1} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \frac{\partial W}{\partial s} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + \frac{\nu}{s} \frac{\partial U}{\partial s} - \frac{\nu}{s^2} U \right) = 0, \\ \lim_{s \rightarrow 1} \left(\frac{\partial^3 W}{\partial s^3} + \frac{\nu}{s} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} - \frac{\nu}{s^2} \frac{\partial W}{\partial s} \right) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

همچنین شرایط مرزی بی‌بعد شده برای مرکز و لبه گیردار ورق در جدول (۱) نمایش داده شده است.

جدول ۱: شرایط مرزی ورق بر اساس مدل گرادیان کرنش غیرمحملی در حالت بی‌بعد

شرط مرزی	رابطه ریاضی
مرکز ورق	$U = \frac{\partial W}{\partial s} = 0,$ $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ -s \left(\frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + \frac{\nu}{s} \frac{\partial W}{\partial s} \right) + L_s^2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + \frac{\nu}{s} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} - \frac{\nu}{s^2} \frac{\partial W}{\partial s} \right) \right. \\ \left. + L_s^2 (1+\nu) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial W}{\partial s} - (1-\nu) \left(\frac{1}{s} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial W}{\partial s} \right) \right) \right\} \\ - \frac{1}{s} \left[\nu \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} \right] + L_s^2 (1-\nu^2) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial W}{\partial s} \right) \\ \left. + L_s^2 \frac{1}{s} \left(2(1-\nu^2) \left(\frac{1}{s} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial W}{\partial s} \right) - \left(\frac{1}{s} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial W}{\partial s} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} \right) \right) \right\} = 0.$
گیردار	$U = W = \frac{\partial W}{\partial s} = 0.$

گسسته‌سازی معادلات حرکت ورق

به منظور گسسته‌سازی معادلات حاکم بر ورق مذکور بر اساس مدل گرادیان کرنش غیرمحملی، معادلات حرکت و شرایط مرزی مرتبه بالا، روابط (۱۱) تا (۱۳)، از روش مانده‌های وزنی گالرکین استفاده می‌گردد. بر این اساس، حل معادلات مذکور به صورت توابع نشان داده شده در رابطه (۱۴) فرض می‌شود:

$$\{U(s, \tau), W(s, \tau)\} = \sum_{j=1}^{Nm} \{a_j(\tau) U_j(s), b_j(\tau) W_j(s)\} \quad (14)$$

که در آن $a_j(\tau)$ و $b_j(\tau)$ توابع زمانی نامعلوم و $U_j(s)$ و $W_j(s)$ شکل مود حاصل از حل عددی معادلات خطی حاکم بر ورق مدور با روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته بوده که در مرجع [۱۹] به آن پرداخته شد. همچنین N_m تعداد مود استفاده شده در حل به روش گالرکین است.



با جایگذاری رابطه (۱۴) در معادلات (۱۱) و (۱۲) و استفاده از روش گالرکین معادلات حرکت به صورت رابطه (۱۵) حاصل می‌شود.

$$\sum_{j=1}^{Nm} \left\{ {}^1 m_{ij} \ddot{a}_j + {}^1 k_{ij} a_j + \sum_{p=1}^{Nm} \alpha_{ijp} b_j b_p \right\} = 0, \quad (15)$$

$$\sum_{j=1}^{Nm} \left\{ {}^2 m_{ij} \ddot{b}_j + {}^2 k_{ij} b_j + \sum_{p=1}^{Nm} \beta_{ijp} b_j a_p + \sum_{p=1}^{Nm} \sum_{q=1}^{Nm} \gamma_{ijpq} b_j b_p b_q \right\} = 0. \quad (i = 1, \dots, Nm)$$

که در آن مولفه‌های ماتریس جرم و سفتی خطی به صورت زیر هستند:

$${}^1 m_{ij} = \int_0^1 I_0 U_i \left(U_j - \lambda^2 \frac{\partial^2 U_j}{\partial s^2} \right) ds,$$

$${}^2 m_{ij} = \int_0^1 W_i \left\{ \bar{I}_2 \left(\frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left(s \frac{dW_j}{ds} \right) \right) - \bar{I}_0 W_j - \lambda^2 \left(\bar{I}_2 \left(\frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left(s \frac{dW_j}{ds} \right) \right) - \bar{I}_0 W_j \right) \right\} ds,$$

$${}^1 k_{ij} = - \int_0^1 U_i \left\{ \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \left(\frac{\partial U_j}{\partial s} + \frac{\nu}{s} U_j \right) \right) - L_s^2 s \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 U_j}{\partial s^2} + \frac{\nu}{s} \frac{\partial U_j}{\partial s} - \frac{\nu}{s^2} U_j \right) \right. \\ \left. - L_s^2 (1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 U_j}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial U_j}{\partial s} - \frac{1}{s^2} U_j - (1 - \nu) \left(\frac{1}{s} \frac{\partial U_j}{\partial s} - \frac{1}{s^2} U_j \right) \right) \right\} \\ - \frac{1}{s} \left(\nu \frac{\partial U_j}{\partial s} + \frac{1}{s} U_j \right) + \frac{1}{s} L_s^2 (1 - \nu^2) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial U_j}{\partial s} - \frac{1}{s^2} U_j \right) \\ \left. + L_s^2 \frac{1}{s^2} \left(2(1 - \nu^2) \left(\frac{1}{s} \frac{\partial U_j}{\partial s} - \frac{1}{s^2} U_j \right) - \left(\frac{1}{s} \frac{\partial U_j}{\partial s} - \frac{1}{s^2} U_j + \nu \frac{\partial^2 U_j}{\partial s^2} \right) \right) \right\} ds, \quad (16)$$

$${}^2 k_{ij} = \int_0^1 W_i \left\{ \bar{D} \frac{1}{s} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(s \left(\frac{\partial^2 W_j}{\partial s^2} + \frac{\nu}{s} \frac{\partial W_j}{\partial s} \right) \right) + s L_s^2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^3 W_j}{\partial s^3} + \frac{\nu}{s} \frac{\partial^2 W_j}{\partial s^2} - \frac{\nu}{s^2} \frac{\partial W_j}{\partial s} \right) \right. \\ \left. + L_s^2 (1 + \nu) \left(\frac{\partial^3 W_j}{\partial s^3} + \frac{1}{s} \frac{\partial^2 W_j}{\partial s^2} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial W_j}{\partial s} - (1 - \nu) \left(\frac{1}{s} \frac{\partial^2 W_j}{\partial s^2} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial W_j}{\partial s} \right) \right) \right\} \\ - \bar{D} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(\nu \frac{\partial^2 W_j}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial W_j}{\partial s} \right) + L_s^2 (1 - \nu^2) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial^2 W_j}{\partial s^2} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial W_j}{\partial s} \right) \\ \left. + L_s^2 \frac{1}{s} \left(2(1 - \nu^2) \left(\frac{1}{s} \frac{\partial^2 W_j}{\partial s^2} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial W_j}{\partial s} \right) - \left(\frac{1}{s} \frac{\partial^2 W_j}{\partial s^2} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial W_j}{\partial s} + \nu \frac{\partial^3 W_j}{\partial s^3} \right) \right) \right\} ds.$$

مولفه‌های غیرخطی ماتریس سفتی نیز به صورت زیر هستند:

$$\alpha_{ijp} = \int_0^1 U_i \left\{ \bar{A} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \left(\frac{1}{2} \frac{dW_j}{ds} \frac{dW_p}{ds} \right) \right) - L_s^2 s \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{dW_j}{ds} \frac{d^2 W_p}{ds^2} \right) + L_s^2 (1 + \nu) \left(\frac{dW_j}{d\rho} \frac{d^2 W_p}{d\rho^2} \right) \right. \\ \left. - \bar{A} \frac{1}{s} \nu \left(\frac{dW_j}{ds} \frac{dW_p}{ds} \right) + \bar{A} L_s^2 \nu \frac{1}{s^2} \left(\frac{dW_j}{d\rho} \frac{d^2 W_p}{d\rho^2} \right) \right\} ds,$$

$$\beta_{ijp} = \int_0^1 W_i \left\{ \bar{A} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{dW_j}{ds} \left(\frac{\partial U_p}{\partial s} + \frac{\nu}{s} U_p \right) \right) - L_s^2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 U_p}{\partial s^2} + \frac{\nu}{s} \frac{\partial U_p}{\partial s} - \frac{\nu}{s^2} U_p \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{s} L_s^2 (1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 U_p}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial U_p}{\partial s} - \frac{1}{s^2} U_p - (1 - \nu) \left(\frac{1}{s} \frac{\partial U_p}{\partial s} - \frac{1}{s^2} U_p \right) \right) \right\} ds, \quad (17)$$

$$\gamma_{ijpq} = \int_0^1 W_i \left\{ \bar{A} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{dW_j}{ds} \left(\frac{1}{2} \frac{dW_p}{ds} \frac{dW_q}{ds} \right) \right) - L_s^2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{dW_p}{ds} \frac{d^2 W_q}{ds^2} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{s} L_s^2 (1 + \nu) \left(\frac{dW_p}{ds} \frac{d^2 W_q}{ds^2} \right) \right\} ds.$$



با فرض نوسانی بودن سیستم داریم:

$$\{a_i(\tau), b_i(\tau)\} = \{A_i, B_i\} \cos(\Omega_n \tau). \quad (18)$$

که در آن فرکانس طبیعی غیرخطی و $\{A_i, B_i\}$ دامنه دینامیکی، مقدار اولیه $\{a_i(\tau), b_i(\tau)\}$ است. با جایگذاری رابطه (۱۸) در معادلات (۱۵) و صرف نظر کردن از جملات غیر قطری ماتریس‌های سفتی خطی و جرم خواهیم داشت (با توجه به اینکه از توابع شکل تقریباً دقیق برای روش گالرکین بهره برده شده، این فرض قابل قبول است):

$$\begin{aligned} & \left({}^1 k_{rr} - {}^1 m_{rr} \Omega_n^2 \right) A_r \cos(\Omega_n \tau) + \sum_{p=1}^{Nm} \alpha_{rp} B_r B_p \cos^2(\Omega_n \tau) = 0, \\ & \left({}^2 k_{rr} - {}^2 m_{rr} \Omega_n^2 \right) B_r \cos(\Omega_n \tau) + \sum_{p=1}^{Nm} \beta_{rp} B_r A_p \cos^2(\Omega_n \tau) \\ & \quad + \sum_{p=1}^{Nm} \sum_{q=1}^{Nm} \gamma_{rpq} B_r B_p B_q \cos^3(\Omega_n \tau) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

معادلات (۱۹) می‌توانند به صورت نتیجه زیر بازنویسی شوند:

$$\begin{aligned} & \left({}^2 k_{rr} - {}^2 m_{rr} \Omega_n^2 \right) B_r \cos(\Omega_n \tau) + \sum_{p=1}^{Nm} \sum_{q=1}^{Nm} K_{rpq}^{Non-linear} B_r B_p B_q \cos^3(\Omega_n \tau) = 0, \\ & K_{rpq}^{Non-linear} = \gamma_{rpq} - \beta_{rp} \alpha_{ppq} \left({}^1 k_{rr} - {}^1 m_{rr} \Omega_n^2 \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

معادله غیرخطی (۲۰) را می‌توان با استفاده از الگوریتم‌های مختلف نظیر رانگ-کوتا، تعادل هارمونیک، تئوری اغتشاشی هموتوبی حل نمود. در این مقاله، معادلات مذکور با استفاده از روش تعادل هارمونیک حل شده‌اند. بر اساس روش تعادل هارمونیک، معادله (۲۰) به صورت رابطه (۲۱) بازنویسی می‌گردد:

$$\begin{aligned} & \left({}^2 k_{rr} - {}^2 m_{rr} \Omega_n^2 \right) B_r \cos(\Omega_n \tau) \\ & \quad + \sum_{p=1}^{Nm} \sum_{q=1}^{Nm} K_{rpq}^{Non-linear} B_r B_p B_q \left\{ \frac{3}{4} \cos(\Omega_n \tau) + \frac{1}{4} \cos(3\Omega_n \tau) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

که با صرف نظر کردن از ترم‌های $\cos(3\Omega_n \tau)$ ، فرکانس غیرخطی مود r ام به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\Omega_r^2 = \omega_r^2 - \frac{3}{4m_{rr}^2} \sum_{p=1}^{Nm} \sum_{q=1}^{Nm} K_{rpq}^{Non-linear} B_p B_q \quad (22)$$

که در آن ω_r فرکانس طبیعی خطی مربوط به مود r ام بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega_r = \sqrt{{}^2 k_{rr} / {}^2 m_{rr}} \quad (23)$$

حال با فرض اینکه تابع خیز قايم در لحظه اولیه، $W(s, 0) = W_0$ ، به صورت تابعی از مختصات شعاعی بی‌بعد شده s و به فرم زیر باشد:



$$W(s, 0) = \sum_{j=1}^{Nm} b_j(0) W_j(s) = g(s) \quad (24)$$

با استفاده از شکل مودهای استخراج شده در مرجع [۱۹]، مقادیر شکل مودها در لحظه اولیه به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$b_r(0) = \int_0^1 g(s) W_r(s) ds / \int_0^1 W_r^2(s) ds = (K_r) W_0 \quad (25)$$

با جایگذاری نتیجه (۲۵) در معادله (۲۲)، فرکانس غیرخطی مود r ام به صورت تابعی از شرایط اولیه و فرکانس خطی مود r ام به صورت رابطه (۲۶) حاصل می‌گردد:

$$\Omega_r^2 = \omega_r^2 - \frac{3(K_r)}{4m_r^2} \sum_{p=1}^{Nm} \sum_{q=1}^{Nm} K_{pq}^{Non-linear} \alpha_p \alpha_q W_0^2 \quad (26)$$

صحه‌گذاری روش حل

در ادامه به منظور بررسی همگرایی روش مانده‌های وزنی گالرکین، چهار مود اول متقارن محور ورق مدور با شرط مرزی گیردار و مفصلی بر اساس مدل گرادیان کرنش غیرمحملی به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرمحملی λ و پارامتر مادی L_s در جدول (۲) نمایش داده شده است. همچنین نتایج بر اساس تابع هسته به فرم نمایش داده شده در رابطه (۲۷) استخراج شده است.

$$\varphi_\lambda(s, \rho) = \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{|s-\rho|}{\lambda}\right) \quad (27)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود همگرایی مناسبی به ازای استفاده از چهار شکل مود بدست آمده از مدل گرادیان کرنش حاصل شده و جواب‌ها دارای دقت مناسبی می‌باشد.

جدول ۲: بررسی همگرایی فرکانس طبیعی بی‌بعد شده، چهار مود اول متقارن محور، ورق مدور با شرط مرزی گیردار بر اساس مدل گرادیان کرنش غیرمحملی و روش مانده‌های وزنی گالرکین به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرمحملی λ و پارامتر مادی L_s

λ	N_m	Ω_1		Ω_2		Ω_3		Ω_4	
		$L_s=0/0.5$	$L_s=0/1.0$	$L_s=0/0.5$	$L_s=0/1.0$	$L_s=0/0.5$	$L_s=0/1.0$	$L_s=0/0.5$	$L_s=0/1.0$
0/0.5	1	10/344	10/931	40/1823	47/721	91/567	116/259	163/455	226/569
	2	10/344	10/901	40/628	46/928	91/615	116/514	163/321	226/290
	4	10/344	10/902	40/644	46/947	91/721	116/653	163/698	226/825
	6	10/344	10/902	40/644	46/947	91/721	116/653	163/698	226/825
0/1	1	10/078	10/629	36/592	42/233	74/802	95/076	121/938	169/037
	2	10/079	10/630	36/609	42/253	74/895	95/193	121/943	168/930
	4	10/081	10/632	36/654	42/308	75/120	95/489	122/546	169/799
	6	10/081	10/632	36/654	42/308	75/120	95/489	122/546	169/799

یافته‌های تحقیق

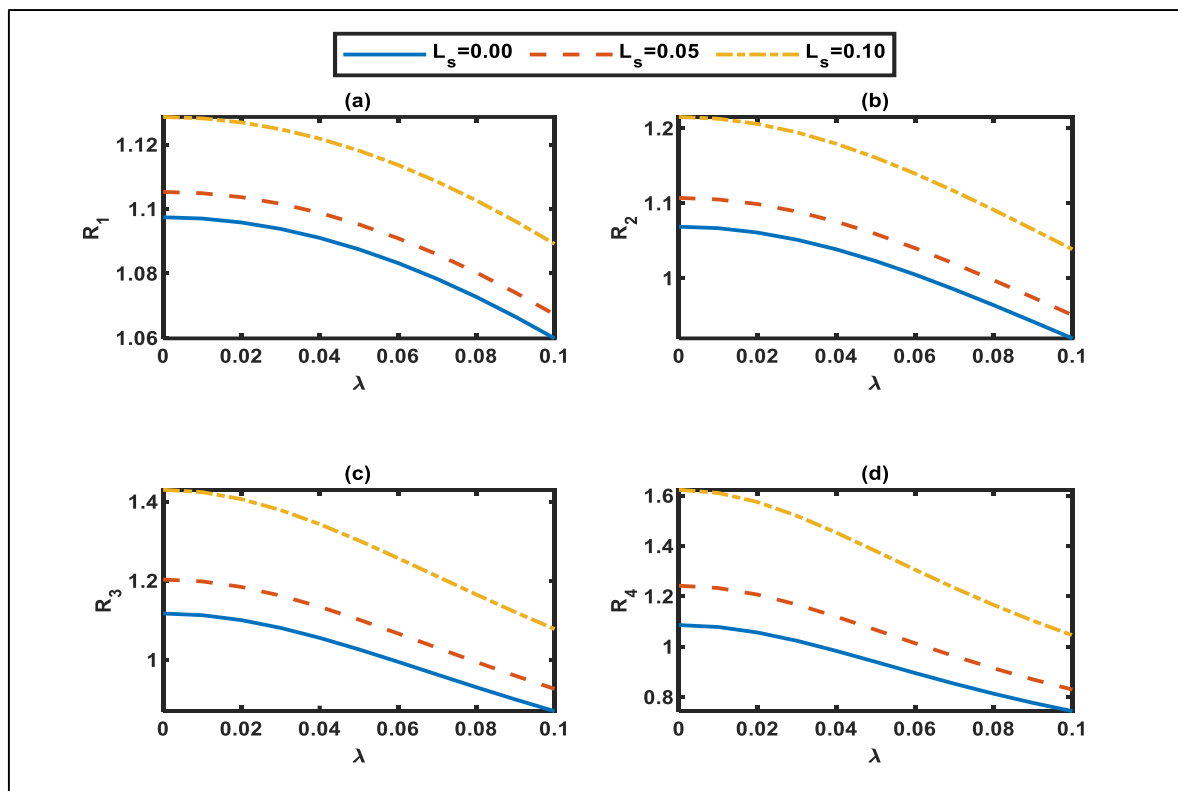
با توجه به معادلات حرکت حاکم بر ورق مدور حاصل از مدل غیرمحملی رادیان کرنش غیرمحملی پارامترهای موثر بر رفتار ارتعاشی سازه مذکور شامل پارامتر اندازه غیرمحملی λ ، پارامتر مادی L_s و همچنین شرایط اولیه است. به منظور بررسی میزان تاثیر این پارامترها نسبت فرکانسی $R_i = \Omega_{N,N}^i / \Omega_{L,L}^i$ ، نسبت فرکانس غیرخطی بر اساس مدل گرادیان کرنش غیرمحملی به فرکانس خطی بر اساس مدل محلی کلاسیک، برای چهار مود اول ارتعاشی متقارن محور بر اساس پارامترهای غیرمحملی λ ، مادی



L_s و شرایط اولیه برای شرط مرزی گیردار محاسبه و در شکل‌های (۲) تا (۴) نمایش داده شده است. همچنین از شش شکل مود، $N_m=6$ ، برای محاسبه نتایج استفاده شده است.

تاثیر پارامتر غیرمحملی λ بر رفتار غیرخطی ارتعاشی

به منظور بررسی تاثیر پارامتر غیرمحملی λ بر روی رفتار ارتعاشی ورق مذکور، منحنی نسبت فرکانسی چهار مود اول متقارن محور بر حسب این پارامتر غیرمحملی λ به ازای سه پارامتر غیرمحملی $L_s = \{0/00, 0/05, 0/10\}$ محاسبه و در شکل (۲) نمایش داده شده است.

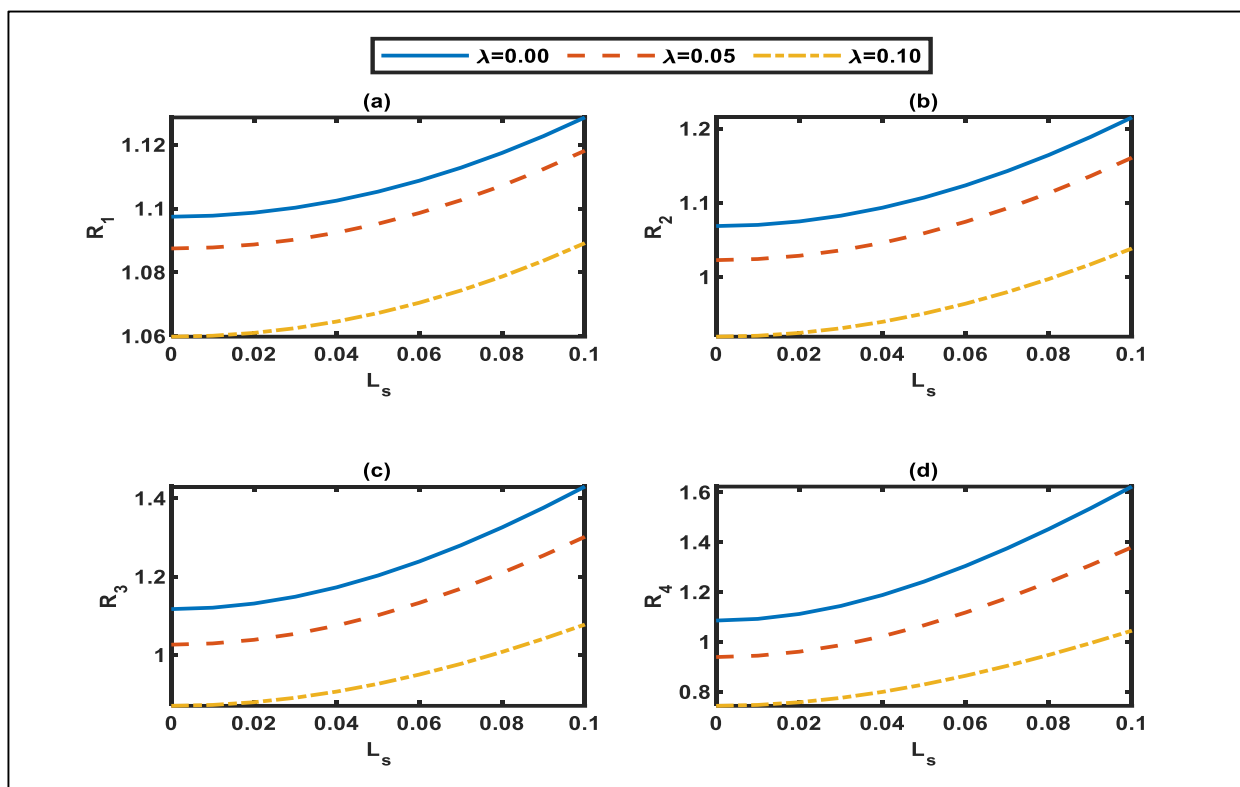


شکل ۲: تاثیر پارامترهای اندازه غیرمحملی λ و مادی L_s بر روی فرکانس طبیعی غیرخطی بی بعد (a) مود اول، (b) مود دوم، (c) مود سوم و (d) مود چهارم متقارن برای ورق مدور با مشخصات $h/R=0/01$ ، $W_0=1$ و شرایط مرزی گیردار.

از بررسی شکل (۲) نتیجه می‌گردد که بزرگترین نسبت فرکانسی متعلق به مود چهارم و کمترین آن به مود اول اختصاص دارد. این نتیجه حاکی از این مطلب است که برای مدل‌سازی مودهای بالاتر سیستم لحاظ نمودن اثرات غیرمحملی و غیرخطی از اصلی‌ترین فرضیات مساله باید به‌شمار آید.

تاثیر پارامتر اندازه L_s بر رفتار غیرخطی ارتعاشی

به منظور بررسی تاثیر پارامتر غیرمحملی L_s بر روی رفتار ارتعاشی ورق مذکور، منحنی نسبت فرکانسی چهار مود اول متقارن محور بر حسب پارامتر غیرمحملی λ برای ورق مدور با شرایط مرزی گیردار برای سه پارامتر غیرمحملی $\lambda = \{0/00, 0/05, 0/10\}$ محاسبه و در شکل (۳) نمایش داده شده است. مشخصات ورق مدور شامل $h/R=0/01$ ، شرط اولیه $W_0=1$ و شاخصی ناهمگنی $n=0,1$ است.



شکل ۳: تاثیر پارامترهای اندازه غیرمحملی λ و مادی L_s بر روی فرکانس طبیعی غیرخطی بی‌بعد (a) مود اول، (b) مود دوم، (c) مود سوم و (d) مود چهارم متقارن برای ورق مدور با مشخصات $W_0=1$ ، $h/R=0/01$ و شرایط مرزی گیردار.

از بررسی شکل (۳) مشاهده می‌گردد که بزرگترین نسبت فرکانسی متعلق به مود چهارم و کمترین آن به مود اول اختصاص دارد. این نتیجه حاکی از این مطلب است که برای مدل‌سازی مودهای بالاتر سیستم لحاظ نمودن اثرات غیرمحملی و غیرخطی از اصلی‌ترین فرضیات مساله باید به‌شمار آید.

تاثیر شرایط اولیه W_0 بر رفتار غیرخطی ارتعاشی

به‌منظور بررسی تاثیر شرایط اولیه W_0 بر روی رفتار ارتعاشی ورق مذکور، منحنی نسبت فرکانسی چهار مود اول متقارن محور بر حسب شرایط اولیه W_0 برای ورق مدور با شرایط مرزی گیردار همچنین برای پارامترهای مختلف غیرمحملی محاسبه و در شکل (۴) نمایش داده شده است. مشخصات ورق مدور $h/R=0/01$ است.

نتایج حاصل از بررسی شکل (۴) نشان می‌دهد که کمترین اختلاف بین نسبت فرکانسی برای مقادیر مختلف پارامتر اندازه در یک شرط اولیه ثابت مربوط به مود اول ارتعاشی و بیشترین اختلاف متعلق به مود چهارم ارتعاشی است. همچنین پارامتر اندازه λ موجب اختلاف منفی و پارامتر اندازه L_s موجب اختلاف مثبت نسبت به حالت $L_s=\lambda=0$ شده است.

نتیجه‌گیری

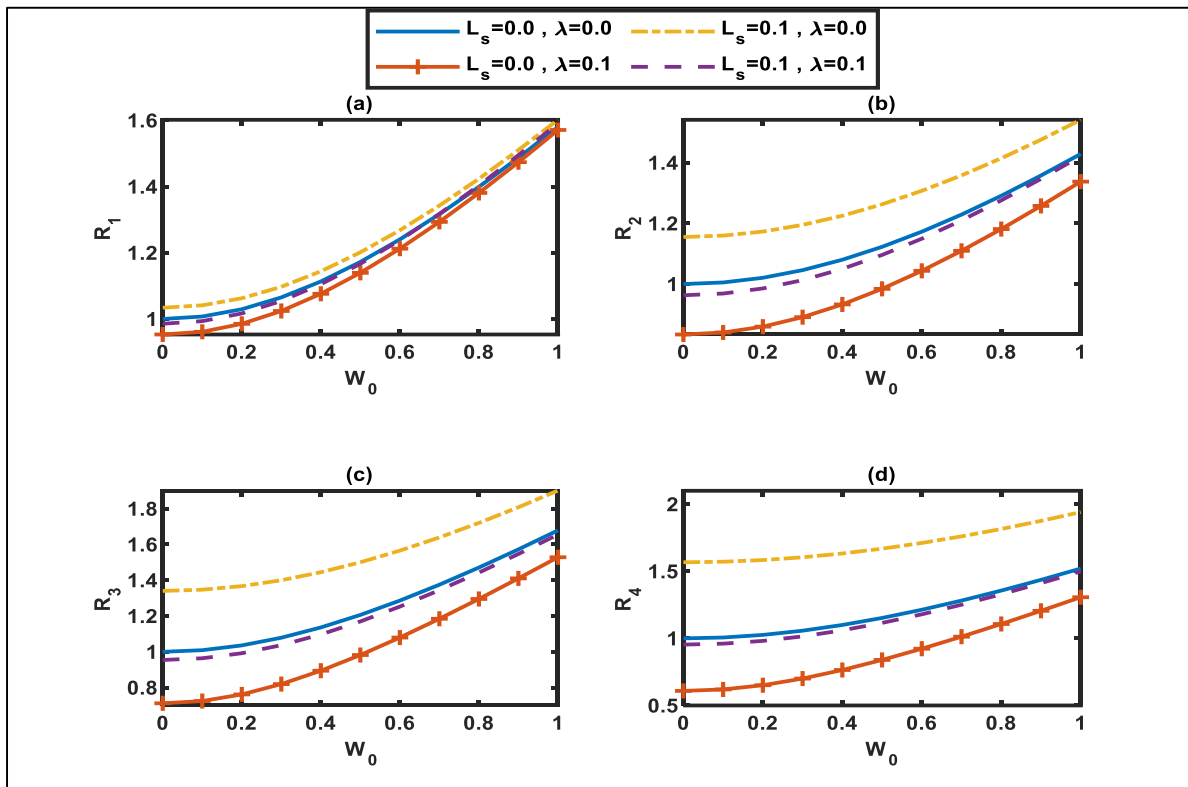
در تحقیق پیش‌رو، رفتار ارتعاشی غیرخطی یک ورق دایره‌ای با ابعاد نانو بر اساس مدل دیفرانسیلی گرادیان کرنش غیرمحملی برای شرایط مرزی گیردار مورد بررسی قرار گرفت. همچنین تاثیر فاکتورهای موثر از قبیل اثرات اندازه و شرایط اولیه بر روی فرکانس‌های غیرخطی بررسی شده است که نتایج آن به شرح ذیل می‌باشد:

الف- تاثیر پارامتر غیرمحملی λ

○ برای کلیه پارامترهای غیرمحملی L_s ، نسبت فرکانسی با افزایش پارامتر غیرمحملی λ کاهش یافته است.



- میزان اختلاف بین نسبت‌های فرکانسی در یک پارامتر غیرمحملی λ به ازای افزایش پارامتر غیرمحملی L_s افزایش یافته است.
- میزان اختلاف بین نسبت‌های فرکانسی برای مقادیر مختلف پارامتر اندازه L_s ، با افزایش پارامتر غیرمحملی λ کاهش یافته و در مقادیر بسیار بزرگتر این اختلاف به صفر میل می‌کند.



شکل ۴: تاثیر جابجایی اولیه W_0 بر روی فرکانس طبیعی غیرخطی بی‌بعد (a) مود اول، (b) مود دوم، (c) مود سوم و (d) مود چهارم متقارن برای ورق مدور با مشخصات $h/R=0/1$ ، شرایط مرزی گیردار و مقادیر مختلف پارامتر مادی.

ب- تاثیر پارامتر اندازه L_s

- برای کلیه پارامترهای غیرمحملی λ ، نسبت فرکانسی با افزایش پارامتر اندازه L_s افزایش می‌یابد.
- میزان اختلاف بین نسبت‌های فرکانسی در یک پارامتر غیرمحملی λ به ازای افزایش پارامتر غیرمحملی λ افزایش می‌یابد.

ج- تاثیر شرایط اولیه W_0 بر رفتار غیرخطی ارتعاشی

- برای کلیه پارامترهای غیرمحملی، نسبت فرکانسی با افزایش شرط اولیه افزایش یافته است.
- میزان اختلاف بین نسبت‌های فرکانسی برای مقادیر مختلف پارامتر اندازه λ ، با افزایش شرط اولیه کاهش یافته و در مقادیر بزرگتر شرط اولیه این اختلاف به کمترین مقدار رسیده است. این موضوع در مورد مود اول بیشترین نمود را دارد.
- کمترین اختلاف بین نسبت فرکانسی برای مقادیر مختلف پارامتر اندازه در یک شرط اولیه ثابت مربوط به مود اول ارتعاشی و بیشترین اختلاف متعلق به مود چهارم ارتعاشی است. همچنین پارامتر اندازه λ موجب اختلاف منفی و پارامتر اندازه L_s موجب اختلاف مثبت نسبت به حالت $L_s=\lambda=0$ شده است.



مراجع

- [1] Asemi, S.R., Farajpour, A., Mohammadi, M., (2014). Nonlinear vibration analysis of piezoelectric nanoelectromechanical resonators based on nonlocal elasticity theory. *Composite Structures*, 116, pp 703-712.
- [2] Farokhi, H., Ghayesh, M.H., Hussain, S., (2016). Pull-in characteristics of electrically actuated MEMS arches. *mechanism and Machine Theory*, 98, pp 133-150.
- [3] Ke, L.L., Yang, J., Kitipornchai, S., Bradford, M.A., (2012). Bending, buckling and vibration of size-dependent functionally graded annular microplates. *Composite structures*, 94(11), pp 3250-3257.
- [4] Eshraghi, I., Dag, S., Soltani, N., (2016). Bending and free vibrations of functionally graded annular and circular micro-plates under thermal loading. *Composite Structures*, 137, pp 196-207.
- [5] Wang, Y.G., Lin, W.H., Liu, N., (2013). Large amplitude free vibration of size-dependent circular microplates based on the modified couple stress theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 71, pp 51-57.
- [6] Thai, H.T., Choi, D.H., (2013). Size-dependent functionally graded Kirchhoff and Mindlin plate models based on a modified couple stress theory. *Composite Structures*, 95, pp 142-153.
- [7] Besseghier, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., (2017). Free vibration analysis of embedded nanosize FG plates using a new nonlocal trigonometric shear deformation theory. *Smart Struct. Syst*, 19(6), pp 601-614.
- [8] Ebrahimi, F., Barati, M.R., Dabbagh, A., (2016). A nonlocal strain gradient theory for wave propagation analysis in temperature-dependent inhomogeneous nanoplates. *International Journal of Engineering Science*, 107, pp 169-182.
- [9] Radić, N., (2018). On buckling of porous double-layered FG nanoplates in the Pasternak elastic foundation based on nonlocal strain gradient elasticity. *Composites Part B: Engineering*, 153, pp 465-479.
- [10] Hosseini-Hashemi, S., Bedroud, M., Nazemnezhad, R., (2013). An exact analytical solution for free vibration of functionally graded circular/annular Mindlin nanoplates via nonlocal elasticity. *Composite Structures*, 103, pp 108-118.
- [11] Bedroud, M., Nazemnezhad, R., Hosseini-Hashemi, S., Valixani, M., (2016). Buckling of FG circular/annular Mindlin nanoplates with an internal ring support using nonlocal elasticity. *Applied Mathematical Modelling*, 40(4), pp 3185-3210.
- [12] Shahverdi, H., Barati, M.R., (2017). Vibration analysis of porous functionally graded nanoplates. *International Journal of Engineering Science*, 120, pp 82-99.
- [13] Mahinzare, M., Ranjbarpur, H., Ghadiri, M., (2018). Free vibration analysis of a rotary smart two directional functionally graded piezoelectric material in axial symmetry circular nanoplate. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 100, pp 188-207.
- [14] Farajpour, A., Yazdi, M.H., Rastgoo, A., Loghmani, M., Mohammadi, M.J.C.S., (2016). Nonlocal nonlinear plate model for large amplitude vibration of magneto-electro-elastic nanoplates. *Composite Structures*, 140, pp 323-336.
- [15] Panyatong, M., Chinnaboon, B., Chucheepsakul, S., (2016). Free vibration analysis of FG nanoplates embedded in elastic medium based on second-order shear deformation plate theory and nonlocal elasticity. *Composite Structures*, 153, pp 428-441.
- [16] Khorshidi, K., Fallah, A., (2016). Buckling analysis of functionally graded rectangular nano-plate based on nonlocal exponential shear deformation theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 113, pp 94-104.
- [17] Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S., (1959). *Theory of plates and shells*: McGraw-hill.
- [18] Faris, W.F., (2003). *Nonlinear dynamics of annular and circular plates under thermal and electrical loadings*, Virginia Tech.
- [19] Pourabdy, M., Shishesaz, M., Shahrooi, S., Roknizadeh, S.A., (2021). Analysis of axisymmetric vibration of functionally-graded circular nano-plate based on the integral form of the strain gradient model. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 7(4), pp 2196-2220.