

تحليل ارتعاشات آزاد تير تيموشينكو ساخته شده از مواد تابعی دو بعدی

محمد رحيم ترشيزيان^{۱*}، عبدالحسين اخوت پور^۲

۱- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد

۲- کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد

* مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، صندوق پستی: ۴۱۳-۹۱۷۳۵، تلفن: ۰۵۱۱-۶۶۲۵۰۴۶، پست الکترونیکی: torshizian@mshdiau.ac.ir

Free vibration analysis of two dimensional functionally graded materials Timoshenko beam

Mohammad Rahim Torshizian^{1*}, Abdalhossein Okhovatpour²

1- Assistant Professor, Mechanical Engineering Department, Mashhad Branch, Islamic Azad University, Mashhad, Iran.

2- MS.c., Mechanical Engineering Department, Mashhad Branch, Islamic Azad University, Mashhad, Iran

*Mashhad, Islamic Azad University, Post Box 91735-413, Tel. 0511-6625046, Email: torshizian@mshdiau.ac.ir

تحلیل ارتعاشات آزاد تیر تیموشینکو ساخته شده از مواد تابعی دو بعدی

چکیده

در این تحقیق ارتعاشات آزاد یک تیر از جنس ماده تابعی دو بعدی با در نظر گرفتن تئوری تیر تیموشینکو بررسی شده است. تغییرات خواص مواد در دو جهت ضخامت و طول تیر به صورت تابع نمائی فرض شده است. معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون بدست آمده که در آن اثر اینرسی های عمودی و دورانی نیز در نظر گرفته شده است. حل معادلات حرکت از روش لوی با رهیافتی از روش فضای حالت انجام گرفته و فرکانس های طبیعی تیر محاسبه شده اند. اثر تغییرات نسبت طول به ضخامت تیر، پارامتر های غیر همگونی ماده و شرایط مرزی، بر روی فرکانس های طبیعی تیر بررسی گردیده است. نتایج نشان می دهد، با افزایش نسبت طول به ضخامت تیر فرکانس های طبیعی افزایش می یابد و همچنین مقدار فرکانس های طبیعی برای تیر از ماده تابعی دو بعدی در شرایط یکسان بیشتر از مقدار آن در تیر از ماده تابعی یک بعدی می باشد.

کلیدواژگان: ماده تابعی دو بعدی، تیر تیموشینکو، ارتعاشات آزاد تیر

Free vibration analysis of two dimensional functionally graded materials Timoshenko beam

Abstract

In this research is investigated the free vibration analysis of two dimensional functionally graded material beams with considering Timoshenko's theory. Material properties of the beam are assumed to vary continuously in the length and thickness direction and follow from exponentially function. The governing equations of motions are derived by using Hamilton's principle. Both axial and rotary inertia of the beam are considered in present analysis. The governing differential equations of motions are converted to a set of first order differential equations using the state space technique and natural frequencies are determined. The effects of length to thickness ratio, gradient indices and boundary conditions on natural frequencies are investigated.

Keywords: Two dimensional FGM, Timoshenko beam, free vibration of beam

محدود صورت داد. حل شبه تحلیلی الاستیسیته یک تیر ساخته شده از مواد تابعی دو بعدی توسط لو و همکاران [۶] در سال ۲۰۰۸، انجام شد در این تحقیق، مسئله تحت شرایط مرزی مختلف بر پایه روش یک چهارم تفاضلی حل گردید. ضمناً تغییرات خواص مکانیکی و گرمایی به شکل تابع نمایی در نظر گرفته شده است. ترشیزیان و همکاران [۷]، در سال ۲۰۱۱ مسئله مکانیک شکست در یک صفحه از ماده تابعی دو بعدی را بررسی کردند. در این تحقیق تغییرات خواص ماده در دو جهت بصورت تابع نمایی در نظر گرفته شده است.

در این تحقیق مسئله ارتعاشات آزاد تیر ساخته شده از ماده تابعی دو بعدی مورد بررسی قرار می گیرد. با استفاده از تئوری تیر تیموشینکو و در نظر گرفتن اینرسی های دورانی، عمودی و کوپل شده عمودی و اصل همیلتون معادلات حرکت استخراج شده و حل معادلات به روش تحلیلی صورت می پذیرد و نتایج در حالتی که تغییرات خواص مواد در یک جهت صورت می گیرد با مقاله ای مشابه، مقایسه می گردد. همچنین، مسئله در حالت ماده تابعی دو بعدی علاوه بر حل تحلیلی، توسط نرم افزار اجزا محدود آباکوس نیز مدل سازی شده و در نهایت نتایج بدست آمده از نرم افزار اجزا محدود با نتایج حل تحلیلی مقایسه شده است.

۲- تعریف مسئله و استخراج معادلات حاکم

تغییرات خواص مکانیکی و فیزیکی ماده تابعی در جهت طول و ضخامت تیر با فرض آن که این خواص به صورت تابع نمایی تغییر کنند، به صورت زیر در نظر گرفته می شوند [۷]:

$$p = p_0 e^{\delta_1 x + \delta_2 (z + \frac{h}{2})} \quad (1)$$

در رابطه فوق p_0 بیانگر یکی از خواص مکانیکی یا فیزیکی ماده نظیر مدول الاستیسته، چگالی یا نسبت پواسون در نقطه ای به مختصات $x=0$ و $z = -h/2$ مطابق شکل (۱) و p خواص ماده در یک نقطه دلخواه از تیر می باشد و δ_1, δ_2 به ترتیب پارامتر های غیر همگونی ماده تابعی در جهت محور طولی x و محور ضخامت z می باشند.

مواد تابعی مدرج^۱ معمولاً معمولاً از دو فاز فلزی و سرامیکی ترکیب شده با هم ساخته می شوند به طوری که خواص مواد از یک طرف به طرف دیگر آنها به صورت کاملاً یکنواخت تغییر می کند. با توجه به کاربرد روز افزون این مواد، تعداد زیادی از محققین به مطالعه و تحلیل رفتار استاتیکی و دینامیکی سازه هایی از جنس مواد تابعی پرداخته اند. سانکار [۱] در سال ۲۰۰۱، یک حل الاستیسیته برای تیر ساخته شده از مواد تابعی ارائه کرد. وی در تحقیق خود، با در نظر گرفتن تابع نمایی برای تغییرات خواص مواد در جهت ضخامت تیر مسئله را تحلیل نمود. بررسی رفتار مکانیکی صفحه ساخته شده از مواد تابعی، تحت بار گذاری عرضی، توسط چانگ و چویی [۲] در سال ۲۰۰۶، صورت گرفت. در این مقاله، صفحه ای تحت شرایط مرزی تکیه گاه های ساده قرار گرفته و تغییرات خواص مواد به دو صورت تابع توانی و همچنین تابع نمایی در نظر گرفته شده است. تحلیل ارتعاشات آزاد تیر ساخته شده از مواد تابعی با تکیه گاه های ساده در سال ۲۰۰۷ توسط ایدوگدو و تاسکین [۳]، صورت گرفت. آنها تغییر خواص مواد را به صورت تابع توانی و نمایی در نظر گرفتند. و همچنین تئوری های مرتبه بالای مختلف در تغییر شکل های برشی تیر را برای تحلیل مسئله لحاظ کردند. یانگ و کسپانگ [۴] در سال ۲۰۰۸، ارتعاشات آزاد و اجباری تیر تیموشینکو با لایه ای از ماده تابعی و تغییر ضخامت در طول تیر و تحت بارگذاری حرارتی را بررسی کردند. آنها مسئله را با استفاده از روش یک چهارم تفاضلی حل کردند. در این مقاله، بدلیل تغییر در ضخامت تیر، معادلات دارای پارامتر هایی در دو جهت (جهت ضخامت و جهت طول تیر) می باشند. همچنین تغییرات خواص مواد تابعی به صورت تابع توانی در نظر گرفته شده است. کمینه کردن تنش های حرارتی در تیر ساخته شده از ماده تابعی دو بعدی در سال ۲۰۰۳ توسط نعمت الا [۵]، انجام شد. او در کار خود تیر از سه نوع ماده متفاوت، طوریکه دو ماده از جنس سرامیک و یک ماده از فلز تشکیل شده است را در نظر گرفت. وی در این مسئله به بیان رابطه ای که خواص این مواد را مدل سازی کند پرداخت. و حل مسئله را با بکار گیری از روش اجزا

¹ Functionally graded materials (FGMs)

مولفه های تنش عمودی σ_{xx} و تنش برشی τ_{xz} توسط روابط بنیادی الاستیسیته با توجه به میدان های کرنش فوق برای یک ماده تابعی به صورت زیر بدست می باشند [۴]:

$$\sigma_x = \frac{E(x,z)}{1-\nu^2} \epsilon_x = \frac{E(x,z)}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \quad (5)$$

$$\tau_{xz} = \frac{E(x,z)}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} = \frac{E(x,z)}{2(1+\nu)} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (6)$$

با بکار بردن اصل همیلتون معادلات حرکت برای تیر مورد نظر بصورت زیر بدست می آیند [۸]:

$$\frac{\delta N_x}{\delta x} = I_1 \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi_x(x,t)}{\partial t^2} \quad (7)$$

$$\frac{\delta M_x}{\delta x} - Q_x = I_2 \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \phi_x(x,t)}{\partial t^2} \quad (8)$$

$$\frac{\delta Q_x}{\delta x} = I_1 \frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial t^2} \quad (9)$$

در روابط فوق N_x و M_x بترتیب منتهجه تنش و منتهجه ممان در جهت x و همچنین Q_x نیروی برشی عرضی و I_3, I_2, I_1 بترتیب اینرسی های دورانی، عمودی و کوپل شده عمودی هستند و به صورت زیر تعریف می گردند [۳]:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \quad (10)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad (11)$$

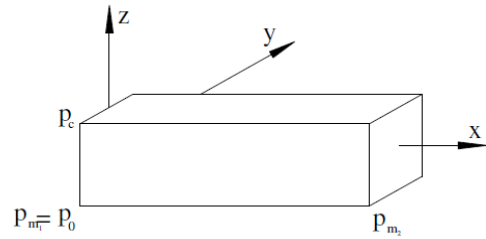
$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad (12)$$

$$I_1, I_2, I_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1, z, z^2) dz \quad (13)$$

با استفاده از اصل همیلتون شرایط مرزی طبیعی و ضروری تیر به شکل زیر حاصل می شوند:

$$\begin{aligned} \delta u_0 = 0 \quad \text{یا} \quad N_x = 0 \\ \delta w_0 = 0 \quad \text{یا} \quad M_x = 0 \\ \delta \phi_x = 0 \quad \text{یا} \quad Q_x = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

با جاگذاری روابط (۵) و (۶) در روابط (۱۰) الی (۱۲) روابط بنیادی برای منتهجه های تنش، ممان و نیروی برشی به صورت زیر خواهند شد:



شکل ۱ تیر ساخته شده از ماده تابعی دوبعدی

در این تحقیق از اثر تغییرات نسبت پواسون صرف نظر شده مقدار آن ثابت فرض می شود و تغییرات مدول الاستیسیته در راستای طول و ضخامت تیر با توجه به رابطه (۱) به صورت زیر تعریف می گردد:

$$E(x,z) = E_0 e^{\delta_1 x + \delta_2 (z + \frac{h}{2})} \quad (2)$$

در رابطه فوق E_0 مدول الاستیسیته در نقطه $x=0$ و $z=-h/2$ و E مدول الاستیسیته در هر نقطه دلخواه از تیر است.

بر اساس تئوری مرتبه اول برشی میدانهای تغییر مکان تیر را می توان به صورت زیر نوشت [۹]:

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= u_0(x,t) + z \phi_x(x,t) \\ v(x,y,t) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

در رابطه فوق u, v, w تغییر مکان های یک نقطه دلخواه از تیر به ترتیب در راستای محورهای x, y, z و u_0, w_0 بترتیب تغییر مکان های مربوط به سطح میانی تیر در جهت x, z می باشند و همچنین ϕ_x دوران بردار عمود بر مقطع تیر در جهت x می باشد. بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، کرنش و تنش برشی در ضخامت تیر ثابت در نظر گرفته می شود. لذا خط عمود بر محور تار خنثی بعد از تغییر شکل راست ولی غیر عمود بر تار خنثی می باشد. در این حالت روابط بین کرنش و تغییر مکان به صورت زیر خواهد بود [۹]:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{aligned} \quad (4)$$

$$u_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U(x) \sin \omega_n t \quad (22)$$

$$\varphi_x(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(x) \sin \omega_n t \quad (23)$$

$$w_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W(x) \sin \omega_n t \quad (24)$$

با قرار دادن روابط فوق در معادلات (۱۹) تا (۲۱)، دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی به صورت زیر بدست می آید:

$$U'' = C_1 U' + C_2 U + C_3 W' + C_4 \Phi' + C_5 \Phi \quad (25)$$

$$W'' = C_6 W' + C_7 W - \Phi' + C_8 \Phi \quad (26)$$

$$\Phi'' = C_9 U' + C_{10} U + C_{11} W' + C_{12} \Phi \quad (27)$$

در روابط فوق ضرایب C_i را می توان با انجام عملیات ریاضی بر روی معادلات حرکت و با قرار دادن میدان های تغییر مکان فرضی از روش لوی به شکل زیر بدست آورد:

$$C_1 = -\frac{1}{A_{11}} \frac{\partial A_{11}}{\partial x} + \frac{\frac{\partial A_{11}}{\partial x} B_{11}^2 - B_{11} \frac{\partial B_{11}}{\partial x}}{B_{11}^2 - A_{11} D_{11}} \quad (28)$$

$$C_2 = \frac{\frac{I_1 \omega_n^2 B_{11}^2}{A_{11}} - I_2 \omega_n^2 B_{11}}{B_{11}^2 - A_{11} D_{11}} - \frac{I_1 \omega_n^2}{A_{11}} \quad (29)$$

$$C_3 = \frac{k A_{55} B_{11}}{B_{11}^2 - A_{11} D_{11}} \quad (30)$$

$$C_4 = \frac{\frac{B_{11}^2 \partial B_{11}}{A_{11} \partial x} - \frac{\partial D_{11}}{\partial x} B_{11}}{B_{11}^2 - A_{11} D_{11}} - \frac{1}{A_{11}} \frac{\partial B_{11}}{\partial x} \quad (31)$$

$$C_5 = \frac{\frac{I_2 \omega_n^2 B_{11}^2}{A_{11}} + k A_{55} B_{11} - I_3 \omega_n^2 B_{11}}{B_{11}^2 - A_{11} D_{11}} - \frac{I_2 \omega_n^2}{A_{11}} \quad (32)$$

$$C_6 = -\frac{1}{A_{55}} \frac{\partial A_{55}}{\partial x} \quad (33)$$

$$C_7 = -\frac{I_1 \omega_n^2}{k A_{55}} \quad (34)$$

$$C_8 = \frac{\frac{\partial A_{11}}{\partial x} B_{11} - \frac{\partial B_{11}}{\partial x} A_{11}}{A_{11} D_{11} - B_{11}^2} \quad (35)$$

$$C_9 = \frac{I_1 \omega_n^2 B_{11} - I_2 \omega_n^2 A_{11}}{A_{11} D_{11} - B_{11}^2} \quad (36)$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} \\ B_{11} & D_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$Q_x = k A_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (16)$$

در روابط فوق k ضریب تصحیح برش است که برای تیر با مقطع مستطیلی اغلب برابر $\frac{5}{6}$ ، در نظر گرفته می شود.

ضرایب A_{11}, B_{11}, D_{11} به ترتیب ضرایب های سختی کششی، خمشی - کششی و خمشی می باشند و توسط روابط زیر تعریف می گردند [۱۰]:

$$A_{11}, B_{11}, D_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x, z)}{1 - \nu^2} (1, z, z^2) dz \quad (17)$$

$$A_{55} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x, z)}{2(1 + \nu)} dz \quad (18)$$

با جایگزین کردن معادلات (۱۵) و (۱۶) در معادلات (۷) الی (۹)، معادلات حرکت حاکم برای تیر بر پایه تئوری مرتبه اول برشی (تئوری تیر تیموشینکو) به صورت زیر بدست می آید:

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial A_{11}}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \quad (19)$$

$$\frac{\partial B_{11}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$

$$K^2 A_{55} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) + \quad (20)$$

$$K^2 \frac{\partial A_{55}}{\partial x} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \right) = I_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$$

$$B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial B_{11}}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial x} + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} +$$

$$\frac{\partial D_{11}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - K^2 A_{55} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \right) = \quad (21)$$

$$I_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$

۳- روش حل مسئله بر اساس فضای حالت

حل معادلات (۱۹) الی (۲۱) از روش لوی با رهیافتی از روش فضای حالت صورت می پذیرد. برای این منظور توابع تغییر مکان به صورت زیر تعریف می شوند:

$$C_{10} = \frac{kA_{55}A_{11}}{A_{11}D_{11} - B_{11}^2} \quad (37)$$

$$C_{11} = \frac{B_{11} \frac{\partial B_{11}}{\partial x} - A_{11} \frac{\partial D_{11}}{\partial x}}{A_{11}D_{11} - B_{11}^2} \quad (38)$$

$$C_{12} = \frac{I_2 \omega_n^2 B_{11} + kA_{11}A_{55} - I_3 \omega_n^2 A_{11}}{A_{11}D_{11} - B_{11}^2} \quad (39)$$

با بکار بردن مفهوم فضای حالت، معادلات (25) الی (27) را می توان به فرم ماتریسی زیر بیان کرد:

$$Z'(x) = T Z(x) \quad (40)$$

در رابطه فوق بردار $Z(x)$ و ماتریس ضرایب T به صورت زیر می باشند:

$$Z(x) = \{U', U, W', W, \Phi', \Phi\}^T \quad (41)$$

و

$$T = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & 0 & C_4 & C_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_6 & C_7 & -1 & C_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ C_8 & C_9 & C_{10} & 0 & C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

حل عمومی معادله (40) به صورت زیر است:

$$Z(x) = e^{T \cdot x} K \quad (43)$$

در رابطه فوق K یک بردار ستونی، شامل ثوابتی است که از شروط مرزی مختلف در دو سر تیر بدست می آید و ماتریس حل عمومی $e^{T \cdot x}$ بصورت زیر بیان می گردد:

$$\Lambda = e^{T \cdot x} = [S] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & . & . & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & . & . & e^{\lambda_n x} \end{bmatrix} \quad (44)$$

که λ_i ها ($i = 1, 2, \dots, 6$) مقادیر مشخصه ویژه ماتریس $[T]$ و همچنین $[S]$ ماتریس مودال می باشد، یعنی ماتریسی که ستون های آن بردارهای ویژه ماتریس $[T]$ به ازاء هر λ_i هستند.

شروط مرزی با در نظر گرفتن معادلات (15)، (16)، (22)، (23) و (24) به صورت زیر خواهند شد:

الف- حالت دو سر مفصل:

برای هر دو سر تیر در $x = 0, x = l$

$$U = W = B_{11}U' + D_{11}\Phi' = 0 \quad (45)$$

ب- حالت دو سر گیردار:

برای هر دو سر تیر در $x = 0, x = l$

$$U = W = \Phi = 0 \quad (46)$$

ج- حالت یکسر آزاد و یکسر گیردار:

برای سر گیردار در $x = 0$

$$U = W = \Phi = 0 \quad (47)$$

و برای سر آزاد در $x = l$

$$A_{11}U' + B_{11}\Phi' = 0$$

$$B_{11}U' + D_{11}\Phi' = 0 \quad (48)$$

$$k A_{55}(\Phi + W') = 0$$

با جاگذاری معادله (43) در شش شرط مرزی در دو لبه تیر در $x = 0$ و $x = l$ دستگاه همگنی از معادلات به صورت زیر حاصل می گردد:

$$B_{ij}\Lambda_{ij}K_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (49)$$

که مقادیر درایه های ماتریس $[B]$ از شرایط مرزی به دست می آید. می توان ماتریس $[N]$ را به صورت زیر تعریف نمود:

$$[N] = [B][\Lambda] \quad (50)$$

بنابر این رابطه (50) را می توان به صورت خلاصه شده زیر نوشت:

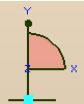
$$[N]\{K\} = 0 \quad (51)$$

با توجه به معادله (51)، باید دترمینان $[N]$ برابر صفر گردد تا جواب های غیر بدیهی حاصل گردند. از اینجا مقادیر ω_n^2 که فرکانسهای طبیعی تیر هستند، برای مد های مختلف بدست خواهند آمد. البته باید توجه کرد که این روش حل به طور مستقیم مقادیر فرکانس ها را محاسبه نمی کند زیرا مقادیر آن در ماتریس $[T]$ نامعین می باشد. از اینرو می بایست از روش سعی و خطا برای بدست آوردن فرکانس طبیعی استفاده کرد. در ذیل الگوریتم بکار برده شده در این تحقیق برای محاسبه ω_n^2 بیان گردیده است:

۱) تعیین مقدار اولیه ای برای ω_n^2 .

۲) تشکیل ماتریس $[T]$ و محاسبه مقادیر ویژه λ_i و بردار

های ویژه $[S]$ از ماتریس $[T]$.



شکل ۲ نمایی از مش بندی تیر ساخته شده از ماده تابعی دوبعدی

در این تحقیق طول تیر یک متر، عرض آن بیست سانتیمتر و ضخامت آن متغیر بین یک تا بیست سانتیمتر در نظر گرفته شده است. پس از اعمال شرایط مرزی برای دو سر تیر فرکانس های طبیعی برای حالت های مختلف نسبت طول به ضخامت و برای شرایط مرزی متفاوت به کمک نرم افزار آباکوس بدست آمده است.

۵- اثر پارامترهای مختلف بر فرکانس های طبیعی

فرکانس های طبیعی برای تیر ساخته شده از ماده تابعی دو بعدی با نسبت طول به ضخامت متفاوت بدست آورده شده است. فرض شده ماده تابعی دو بعدی تیر از دو فلز و یک سرامیک با مشخصات داده شده در جدول ۱ ساخته شده باشد (به شکل ۱ مراجعه شود).

جدول ۱: خواص مکانیکی مواد تشکیل دهنده تیر

مواد	$\rho(kg / m^3)$	$E (GPa)$	ν
AL1100	۲۷۰۷	۷۰	۰,۳
Ti - 6AL - 4V	۴۵۱۵	۱۱۵	۰,۳
ZrO ₂	۳۰۰۰	۱۵۱	۰,۳

برای مقایسه بهتر نتایج از فرکانس طبیعی بدون بعد که با

رابطه زیر تعریف می شود، استفاده می گردد: [۸]

$$\omega = \bar{\omega} l^2 \sqrt{\frac{I_1}{h^2 \int_{-h/2}^{h/2} E dz}} \quad (52)$$

در رابطه فوق $\bar{\omega}$ نشان دهنده فرکانس طبیعی تیر ساخته شده از ماده تابعی و ω فرکانس طبیعی بدون بعد می باشد. فرکانس های طبیعی بدون بعد، برای حالتی که تغییرات خواص مواد تنها در جهت ضخامت صورت می گیرد، برای سه شرط مرزی مختلف در جدول ۲ آمده است و نتایج حاصل با نتایج ارائه شده توسط سینا و همکاران [۸] مقایسه شده است.

۳) تشکیل ماتریس $[N]$ مطابق با شرایط مرزی مناسب از معادلات (۴۶) الی (۴۸) و معادله (۵۰).

۴) بررسی تغییر علامت دترمینان $[N]$:

(الف) اگر تغییر علامت اتفاق افتاد، فرکانس مرحله قبلی مقدار کوچکی کم نموده و بازگشت به مرحله ۲.

(ب) اگر تغییر علامت وجود نداشت، مقدار مشخصی به فرکانس افزوده و مرحله بعدی اجرا گردد.

۵) بررسی گردد که اگر اختلاف بین دو مرحله تکرار موفق الگوریتم داخل تلورانس مورد نظر است جواب حاصل شده است. در غیر این صورت بازگشت به مرحله ۲.

۴- بررسی مسئله با نرم افزار المان محدود آباکوس

برای مدل سازی تیر جنس ماده تابعی دو بعدی با توجه به آن که جنس ماده تابعی در نرم افزار تحلیلی المان محدود آباکوس موجود نمی باشد، برای تعریف تیر مورد نظر پس از مشخص کردن ابعاد کلی، هندسه تیر در راستای طولی و ضخامت به المان های مختلفی تقسیم می گردد. در هر المان خواص مربوط به آن لحاظ می شود. المان ها باید بگونه ای باشند که بتوانند تغییرات یکنواخت خواص مواد تابعی در دو راستای طولی و ضخامت تیر را به طور تقریبی مدل سازی کنند. برای این کار هر المان به صورت ماده همگن و ایزوتروپ فرض شده و خواص آن با تعیین مختصات مرکز هر المان بر اساس رابطه (۱) تعیین می گردد. بنابر این هرچه تعداد المان ها در مقطع ضخامت و همچنین در طول تیر بیشتر باشد، دقت تیر مدل سازی شده بیشتر خواهد بود. برای مدلسازی تیر آنرا کاملاً الاستیک در نظر گرفته و همچنین هر المان همگن و ایزوتروپیک فرض می شود. برای تحلیل تیر به روش المان محدود، تیر را کاملاً الاستیک فرض شده و المان های مورد استفاده برای مش بندی تیر از نوع المان های سه بعدی ۲۰ گرهی در نظر گرفته شده است. همچنین از تکنیک مش بندی منظم^۲ استفاده شده است که در شکل زیر نشان داده شده است.

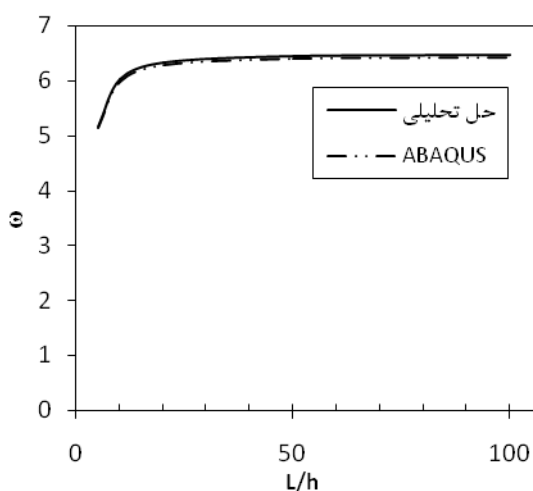
جدول ۲: فرکانس های طبیعی بدون بعد تیر با تغییرات خواص مواد تنها در جهت ضخامت برای نسبت طول به ضخامت های متفاوت تیر

شرایط مرزی	$L/h = 100$	$L/h = 30$	$L/h = 10$
تحقیق حاضر	۲,۸۱۷۸	۲,۸۱۲۶	۲,۷۶۸۲
مرجع [۸]	۲,۸۱۷	۲,۸۱۳	۲,۷۷۴
اختلاف (%)	۰,۰۲	۰,۰۱	۰,۲۱
تحقیق حاضر	۱,۰۰۳۱	۱,۰۰۲۹	۰,۹۹۴۳
مرجع [۸]	۱,۰۰۳	۱,۰۰۳	۰,۹۹۶
اختلاف (%)	۰,۰۱	۰,۰۱	۰,۱۷
تحقیق حاضر	۶,۳۸۵۴	۶,۳۴۳۲	۵,۹۹۷۸
مرجع [۸]	۶,۳۸۴	۶,۳۴۳	۶,۰۱۳
اختلاف (%)	۰,۰۲	۰,۰۰	۰,۲۵

جدول ۳: فرکانس های بدون بعد تیر از ماده تابعی دو بعدی با حل تحلیلی و اجزا محدود و مقایسه نتایج با یکدیگر

شرایط مرزی	$L/h = 100$	$L/h = 20$	$L/h = 5$
حل تحلیلی	۲,۸۷۴۹	۲,۸۶۰۰	۲,۶۸۲۷
دو سر مفصل	۲,۸۳۹	۲,۸۲۶	۲,۶۶۳
اختلاف (%)	۱,۲۶۴	۱,۲۰۴	۰,۷۴۱
حل تحلیلی	۶,۴۵۳۲	۶,۳۲۰۳	۵,۱۵۰۲
دو سر گیردار	۶,۴۰۸	۶,۲۷۷	۵,۱۲۸
اختلاف (%)	۰,۷۰۵	۰,۶۹۰	۰,۴۳۲
یکسر آزاد و یکسر گیردار	۰,۸۶۵۸	۰,۸۶۱۹	۰,۸۳۵۶
اجزا محدود	۰,۸۵۷	۰,۸۵۳	۰,۸۳۰
اختلاف (%)	۱,۰۳۱	۱,۰۴۴	۰,۶۷۹

در شکل ۳، نمودار تغییرات فرکانس طبیعی بدون بعد برحسب نسبت طول به ضخامت تیر برای تیر ساخته شده از ماده تابعی دو بعدی تحت شرط مرزی دو سر گیردار نشان داده شده است. مقایسه نتایج حاصل از حل تحلیلی و اجزا محدود، تقارب خوبی را نشان می دهد.

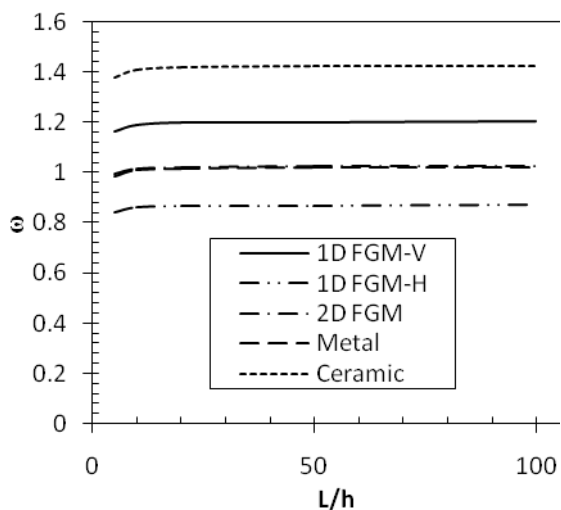


شکل ۳: نمودار مقایسه حل تحلیلی و المان محدود برای تیر از ماده تابعی دو بعدی تحت شرط مرزی دو سر گیردار

با توجه به جدول ۲ دیده می شود که اختلاف بسیار ناچیزی میان نتایج بدست آمده در این تحقیق و نتایج ارائه شده در مرجع [۸] وجود دارد که صحت روش ارائه شده را نشان می دهد.

مقادیر فرکانس طبیعی بدون بعد برای تیر ساخته شده از ماده تابعی دو بعدی که تغییرات خواص مواد در هر دو جهت طول و ضخامت تیر تغییر می کند، در جدول ۳ ارائه شده است. جهت نشان دادن صحت محاسبات، نتایج با مقادیر فرکانس طبیعی بدون بعد که از نرم افزار اجزا محدود آباکوس بدست آورده شده مقایسه گردیده است.

خواص آن تنها در جهت طول آن صورت گیرد از همه کمتر می باشد.

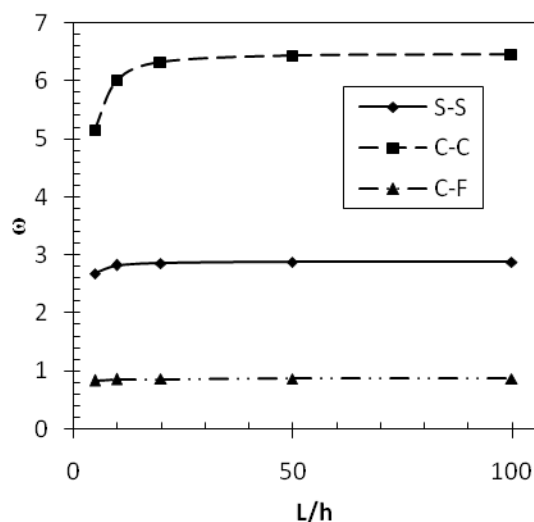


شکل ۵: فرکانس های طبیعی بدون بعد تیر یکسر گیردار بر حسب تغییرات پارامترهای غیر همگونی

۶- نتیجه گیری و جمع بندی

در این تحقیق ارتعاشات آزاد تیر ساخته شده از ماده تابعی دو بعدی با در نظر گرفتن تئوری مرتبه اول برشی، بررسی شده است. تغییرات خواص مواد در دو جهت، ضخامت و طول تیر به صورت تابعی در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم بر ارتعاش تیر با استفاده از اصل همپلتون استخراج شده اند. مسئله تحت شرایط مرزی مختلف و نسبت طول به ضخامت های متفاوت به روش تحلیلی بررسی شده و نتایج با دست آورد های حاصل از کد تجاری نرم افزار اجزا محدود آباکوس، مقایسه شده است. مقادیر فرکانس های طبیعی بدون بعد برای تیر از ماده تابعی دو بعدی بین دو حالتی قرار می گیرد که تغییرات خواص مواد فقط در جهت ضخامت و یا فقط در جهت طول می باشد. با افزایش نسبت طول به ضخامت تیر حل مسئله تیر از تئوری تیموشینکو، دور و به تئوری اولر برنولی نزدیک شده است. به عبارت دیگر با افزایش نسبت طول به ضخامت تیر، اثر کرنش ها و تنش های برشی تیر در تغییر فرکانس طبیعی ناچیز است و با افزایش بیشتر نسبت طول به ضخامت آن، فرکانس طبیعی بدون بعد تابعی از این نسبت نخواهد بود.

شکل ۴ نمودار تغییرات فرکانس طبیعی بدون بعد بر حسب نسبت طول به ضخامت تیر از ماده تابعی دو بعدی را تحت شروط مرزی مختلف نمایش می دهد. نتایج نشان می دهد که مقادیر فرکانس های طبیعی بدون بعد هنگامی که تیر تحت شرط مرزی دو سر گیردار قرار می گیرد از نسبت به حالت شرط مرزی دو سر مفصل و همچنین شرط مرزی یک سر آزاد و یک سر گیردار بیشتر است.



شکل ۴: فرکانس های طبیعی بدون بعد تیر از ماده تابعی دو بعدی تحت شروط مرزی مختلف

نمودار های شکل ۵، فرکانس های طبیعی بدون بعد بر حسب نسبت طول به ضخامت را در حالتی که تیر تحت شرط مرزی یکسر گیردار قرار دارد نشان می دهد. در این شکل نتایج برای حالتی که جنس تیر از فلز خالص یا سرامیک خالص باشد با حالتی که جنس تیر از ماده تابعی با تغییرات خواص در جهت ضخامت (1D FGM-V) یا تغییرات خواص در جهت طول (1D FGM-H) و بالاخره تغییرات خواص در دو راستای ضخامت و طول (2D FGM) باشد، مقایسه شده است. فرکانس های طبیعی بدون بعد برای تیر از جنس سرامیک خالص از همه حالات بیشتر بوده و هنگامی که تغییرات خواص مواد تابعی در جهت ضخامت صورت گیرد، از حالتی که در جهت طول تغییرات خواص مواد تابعی صورت گیرد مقادیر بزرگتر است. همچنین فرکانس های طبیعی بدون بعد در دو حالت که تغییرات خواص مواد تابعی در دو بعد و تیر از فلز خالص ساخته شده باشد به هم نزدیک هستند. فرکانس های طبیعی بدون بعد برای تیری که تغییرات

- [6] C.F. Lu, W.Q. Chen, R.Q. Xu, C.W. Lim, "Semi-analytical elasticity solutions for bi-directional functionally graded beams", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 45, pp. 258-275, 2008.
- [7] M.R. Torshizian, M.H. Kargarnovin, C. Nasirai, "Mode III fracture of an arbitrary oriented crack in two dimensional functionally graded materials", *Mechanics Research Communications*, Vol. 38, pp. 164-169, 2011.
- [8] S.A. Sina, H.M. Navazi, H. Haddadpour, "An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams", *Materials and Design*, Vol. 30, pp. 741-747, 2009.
- [9] C.M. Wang, J.N. Reddy, K.H. Lee, "Shear deformable beams and plates", First Ed. Elsevier, 2000, pp. 11-37.
- [10] J.N. Reddy, "Energy principles and variational methods in applied mechanics", First Ed. John Wiley & Sons, 1984, pp. 177-204.
- [1] B.V. Sankar, "An elasticity solution for functionally graded beams", *Composites Science and Technology*, Vol. 61, pp. 689-696, 2001.
- [2] S.H. Chi, Y.L. Chung, "Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load-part I: Analysis", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 3657-3674, 2006.
- [3] M. Aydogdu, V. Taskin, "Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges", *Materials and Design*, Vol. 28, pp. 1651-1656, 2007.
- [4] H.J. Xiang, J. Yang, "Free and forced vibration of a laminated FGM Timoshenko beam of variable thickness under heat condition", *Composites: Part B*, Vol. 39, pp. 292-303, 2008.
- [5] M. Nemat-Alla, "Reduction of thermal stresses by developing two-dimensional functionally graded materials", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, pp. 7339-7356, 2003.