تحلیل عددی ورق های نازک مستطیلی ایزوتروپ و ارتوتروپ مبتنی بر تئوری کلاسیک صفحات به روش درون یابی نقاط به کمک توابع پایه شعاعی- چند جمله ای (RPIM)

سید محمد مهدی نجفی زاده[1]، سیدمجید علوی[2]، علیرضا نظام آبادی[3]، محسن کوگانی[4] و مهدی عباسی[5]
M-najafizadeh@iau-arak.ac.ir

(دریافت مقاله: ۸۸/۰۸/۰۱ پذیرش مقاله: ۸۹/۰۲/۲۵)

چکیده
در مقاله حاضر یکی از روش های عددی بدون المان جهت تحلیل استاتیکی جابجایی ورق های نازک مبتنی بر تئوری کلاسیک ورقها (CPT) ارائه گردیده است .در این روش ناحیه حل مسئله، تنها توسط مجموعه ای از گره ها نمایش داده می شود و به هیچگونه مش بندی و یا المان نیاز نیست. یکی از انواع روش های بدون المان که در اینجا از آن استفاده می شود، روش درون یابی نقاط به کمک توابع پایه شعاعی- چند جمله ای (RPIM) می باشد. جهت دستیابی به معادلات حاکم از اصل همیلتون، به شکل انتگرالی تضعیف یافته گالرکین استفاده می شود. با استفاده از توابع درون یاب میدان تغییرات را تقریب زده وبا قرار دادن در معادلات تعادل، همگرائی و دقت روش حاضر بررسی خواهند شد. در ادامه جوابهای روش حاضر با جوابهای حاصل از حل دقیق روشهای تحلیلی ورقها و نیز روش اجزاء محدود (FEM) مقایسه خواهد شد، همچنین تاثیرات نسبت ضخامت به طول، ضریب ظاهری و توزیع گره بررسی می شوند.

کلیدواژه:
روشهای بدون المان- تئوری کلاسیک ورقها- روش درون یابی نقاط- شکل تضعیف یافته معادله گالرکین- تحلیل عددی

۱- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاداسلامی واحد اراک
۲- استادیار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاداسلامی واحد اراک
۳- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاداسلامی واحد اراک
۴- کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاداسلامی واحد اراک
۵- کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاداسلامی واحد اراک

۱- مقدمه

روش المان محدود در دهه‌های اخیر توانایی خـود را در عرصـه‌هـای مختلف محاسباتی نشان داده و به همـین دلیـل بـه عنـوان یکـی از متداول‌ترین روش‌های حل معادلات دیفرانسیل جزیی مورد اسـتفاده محققـین و متخصـصین مختلـف قـرار گرفتـه اسـت. علـی‌رغـم موفقیت‌های چشمگیری که این روش در حل مسائل مختلف خطـی و غیرخطی از خود نشان داده موارد مختلفی نیز وجود دارد که ایـن روش در آنها بـا مـشکلاتی همـراه مـی‌شـود [۱]. علـت بـروز ایـن مشکلات به ارتباط تنگاتنگ روش المان‌های محدود بـا المـان‌بنـدی مسأله بر می‌گردد.

در طـی سـال‌هـای اخیـر بـرای ایـن مـشکلات، دسـته جدیـدی از روش‌های محاسباتی ارائه شده است که به خـلاف روش المـان‌هـای محدود، برای حل مسأله به شبکه‌بندی ناحیه مسأله احتیـاج ندارنـد. این دسته از روش‌ها را روش‌های بدون المـان یـا روش‌هـای بـدون مش می‌نامند. در اینگونه از روش‌ها، تنها از مجموعه‌ای از گره‌ها کـه در ناحیه مسأله توزیع شده، برای ساخت توابع تقریب، گسسته‌سازی و حل معادلات دیفرانسیل جزئی استفاده می‌شود. مزایای روش‌هـای بدون المان باعـث شـده کـه در سـال‌هـای اخیـر توجـه بـسیاری از محققین در زمینه مکانیک محاسباتی به این دسته از روش‌ها جلـب شده و تحقیقات گسترده‌ای در زمینه خواص و کاربردهای اینگونه از روش‌ها انجام شود.

پیدایش ایده‌ی روش‌های بـدون المـان بـه دهـه ۱۹۸۰ مـیلادی بـر می‌گردد. اولین نمونه از چنین روش‌هایی در سال ۱۹۷۷ معرفی شد. این روش اساساً برای مدل‌سازی اثرات متقابل ذرات در مسائل اخیـر فیزیک مورد استفاده قرار گرفت و به روش SPH[1] معـروف شـد کـه البته بیشتر در مورد مسائل دینامیک و مکانیک سیالات مورد توجـه واقع گردید [۲]. از آن به بعد در حدود ۲ دهه تغییر و تحول خاصی در ارائه روش‌هایی از این دست حاصل نگردید. ولی در سال ۱۹۹۴ با ابداع روش EFG[2] فصل جدیدی در ابداع روش‌های بـدون مـش بـاز گردیـد. [۳] و توجـه بـسیاری از افـرادی کـه در زمینـه مکانیـک محاسباتی کار می‌کردند به این بخش از مکانیک جلب شد و همـین امر باعث ابداع روزافزون روش‌های متعدد بدون المان شد. به طـوری که در سال ۱۹۹۹ روش MLPG[3] [۴]، در سال ۱۹۹۹ روش PIM[4]، [۵] در سـال ۲۰۰۱ روش RPIM[5] [۶] و در سـال ۲۰۰۷ روش LCPIM[6]، [۷] ابداع گردیده‌اند و به نظر می‌رسد این روشها خواهنـد توانست باتوجه به عمر کم خویش به رقابت بـا روش المـان محـدود پرداخته و جایگاه خاصی را برای خود در مکانیک محاسـباتی فـراهم سازند.

یکی ازمسائلی که درمهندسـی مکانیـک همیـشه مـورد توجـه بـوده تحلیل ورق هاست برای تحلیل صفحات تئوری های مختلفی موجود است که ابتدایی ترین آنها ,تئوری کلاسیک می باشد.باتوجه به اینکه برای تحلیل ورق باید معادلات دیفرانـسیل بامـشتقات جزئـی راحـل نمودوحل این معادلات دربسیاری ازموارد غیـرممکن است,اسـتفاده ازروشـهای عـددی مـورد توجـه قرارگرفتـه اسـت,درسـالهای اخیـر بااستفاده از روشهای بدون المان به تحلیل صـفحات پرداختـه شـده است ومقالاتی دراین زمینه ارایه گردیده است ازجملـه تحلیـل ورق نازک توسط روش EFG [۸]، تحلیل استاتیکی وارتعاشـات آزاد ورق نازک با اشکال پیچیـده [۹]، تحلیـل حرارتـی ورق FGM بااسـتفاده ازروش EFG [۱۰]، بررسی پایداری ورق پیزو FGM تحـت بارهـای مکانیکی ،حرارتی و ولتاژ در مرجع[۱۱] می باشد .

بعلت سـخت بـودن اعمـال شـرایط مـرزی اساسـی درروش EFG و ویژگی های روش درون یابی نقاط [۱۲] درمقاله حاضـر بـه تحلیـل استاتیکی ورق با استفاده ازروش RPIM پرداخته شده اسـت ونتـایج حاصل با جوابهای دقیق و اجزا محدود مقایسه گردیده و در قیاس با روش EFG دارای حداقل ۱۰برابردقت بیشتر می باشد.

۲- روش درون یابی نقاط به کمک توابع پایه شعاعی- چند جمله ای

این روش توسط تابع درون‌یاب که از مقادیر تابع در گره‌های داخل ناحیه حل عبور می‌کند، تقریبی از تابع را ارائه می‌دهد. تابع $u^h(x)$ را در دامنه Ω تعریف شده را در نظر بگیرید. این روش تابع $u^h(x)$ را با استفاده از مقادیر گره‌ای در گره‌های داخل ناحیه اثر نقطه دلخواه x_Q (که نقطه گاوس است)، درون یابی می‌کند. تابع $u^h(x)$ را می‌توان بصورت سری محدود زیر نمایش داد[۱۳] :

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{n} R_i(x) a_i + \sum_{j=1}^{m} p_j(x) b_j = R^T(x) a + p^T(x) b \quad (۱)$$

در رابطه فوق a_i ضرایب توابع شعاعی $R_i(x)$ و b_j ضرایب توابع پایه چند جمله‌ای $P_j(x)$ می‌باشند.

$$a^T = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \quad (۲)$$
$$b^T = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$$

1 - Smoothed Particle Hydrodynamic
2- Element Free Galerkin
3- Meshless Local Petrov-Galerkin
4- Point Interpolation Method
5- Radial Point Interpolation Method
6- Linearly conforming Point Interpolation Method

توابع پایه $p_j(x)$ معمولا بصورت تک جمله‌هایی با حداقل مرتبه انتخاب می‌شوند. $p^T(x)$ نیز بردار شامل این تک جمله ای ها ست. در حالت دوبعدی:

$$p^T(x)=p^T(x,y) =\left\{1 \quad x \quad y \quad xy \quad x^2 \quad y^2 \quad \dots \quad x^m \quad y^m\right\} \tag{۳}$$

که m تعداد این جمله ای ها می باشد. n نیز تعداد گره واقع شده در ناحیه اثر نقطه گاوس می باشد. $R_i(x)$ بعنوان توابع پایه شعاعی معرفی می شوند.

روشهای مختلفی برای تعریف توابع پایه وجود دارد[۱۴] یکی از روش‌های متداول روش مرتبه چهار می‌باشد که اولین بار جهت تقریب زدن جواب معادلات دیفرانسیل جزئی بکار گرفته شد. در این روش توابع پایه شعاعی بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$R_i(x,y)=\left(r_i^2+c^2\right)^q =\left[\left(x-x_i\right)^2+\left(y-y_i\right)^2+c^2\right]^q \tag{۴}$$

که در آن c و q پارامترهای شکل نامیده می‌شوند و توسط آنها شکل توابع کنترل می‌گردد. مقادیر انتخابی این دو پارامترجهت مسائل گوناگون، متفاوت می باشد[۱۵] در این روش برای دستیابی به تابع شکل می‌بایست تعداد چند جمله‌ای توابع پایه به مراتب کمتر از تعداد گره داخل ناحیه اثر باشد (m < n) رابطه (۱) بصورت زیر برای نقطه k ام قابل بیان است:

$$u_k=\sum_{i=1}^{n} a_i R_i(x_k,y_k)+\sum_{j=1}^{m} b_j p_j(x_k,y_k) \tag{۵}$$

رابطه بالا بصورت ماتریسی زیر بازنویسی می‌شود:

$$U_s=R_Q a+P_m b \tag{۶}$$

که در آن ماتریس R_Q ماتریس متقارن و معکوس پذیر زیر می‌باشد:

$$R_Q=\begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \cdots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \cdots & R_n(r_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \cdots & R_n(r_n) \end{bmatrix}_{n\times n} \tag{۷}$$

در رابطه (۶) ماتریس P_m، ماتریس ممان نام دارد و عبارتست از:

$$P_m=\begin{bmatrix} p_1(x_1,y_1) & p_2(x_1,y_1) & \cdots & p_m(x_1,y_1) \\ p_1(x_2,y_2) & p_2(x_2,y_2) & \cdots & p_m(x_2,y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_n,y_n) & p_2(x_n,y_n) & \cdots & p_m(x_n,y_n) \end{bmatrix}_{n\times m} \tag{۸}$$

توابع پایه شامل چند جمله ای $P_j(x)$ جهت گره‌های داخل یک ناحیه اثر خاصیت زیر را خواهند داشت [۳]:

$$\sum_{i=1}^{n} p_j(x_i,y_i)a_i=0 \tag{۹}$$

و یا به شکل ماتریسی:

$$P_m{}^T a=0 \tag{۱۰}$$

به علت معکوس پذیر بودن ماتریس R_Q و با استفاده از روابط (۶) و (۱۰) بردارهای ضرایب a و b به ترتیب زیر بدست می آیند :

$$a=R_Q{}^{-1}U_s-R_Q{}^{-1}P_m b \tag{۱۱}$$

$$b=S_b U_s=S_b U_s \tag{۱۲}$$

که در آن:

$$S_b=\left[P_m{}^T R_Q{}^{-1}P_m\right]^{-1}P_m{}^T R_Q{}^{-1} \tag{۱۳}$$

در رابطه فوق عبارت $P_m{}^T R_Q{}^{-1}P_m$، ماتریس ممان انتقالی نامیده می‌شود. با جاگذاری رابطه (۱۲) در رابطه (۱۱) خواهیم داشت:

$$a=S_a U_s=S_a U_s \tag{۱۴}$$

که در آن

$$S_a=R_Q{}^{-1}\left[I-P_m S_b\right]=R_Q{}^{-1}-R_Q{}^{-1}P_m S_b \tag{۱۵}$$

بنابراین رابطه ۵ بصورت زیر بیان خواهد شد:

$$u(x)=\left[R^T(x)S_a+p^T(x)S_b\right]U_s =\Phi(x)U_s \tag{۱۶}$$

که در آن $\Phi(x)$ ماتریس توابع شکل با n تابع شکل زیر می‌باشد:

$$\Phi(x) = \left[R^T(x) S_a + P^T(x) S_b \right] = \left[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x) \right] \tag{۱۷}$$

$\varphi_i(x)$ تابع شکل گره i ام واقع شده در ناحیه اثر نقطه X_Q بوده و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi_k(x) = \sum_{i=1}^{n} R_i(x) S^a{}_{ik} + \sum_{j=1}^{m} P_j(x) S^b{}_{jk} \tag{۱۸}$$

در رابطه بالا S^a_{ik} بیانگر مؤلفه سطر i ام و ستون k ام ماتریس S_a می‌باشد. S^b_{jk} نیز به مؤلفه سطر j ام و ستون k ام ماتریس S_a اشاره می‌کند.

مشتقات توابع شکل نیز به راحتی قابل محاسبه‌اند:

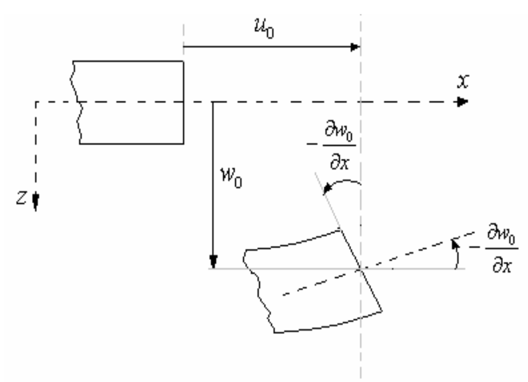
$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R_i}{\partial x} S^a{}_{ik} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial p_j}{\partial x} S^b{}_{jk} \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R_i}{\partial y} S^a{}_{ik} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial p_j}{\partial y} S^b{}_{jk} \end{aligned} \tag{۱۹}$$

با در نظر گرفتن توابع پایه شعاعی MQ، مشتقات R_i نیز بصورت زیر محاسبه خواهند شد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i}{\partial x} &= 2q\left(r_i^2 + c^2\right)^{q-1}(x - x_i) \\ \frac{\partial R_i}{\partial y} &= 2q\left(r_i^2 + c^2\right)^{q-1}(y - y_i) \end{aligned} \tag{۲۰}$$

۳- تئوری کلاسیک ورقها

یک ورق با دامنه Ω را مطابق با شکل (۱) در نظر بگیرید. جابجایی های u، v و w در جهات x، y و z مفروضند.



شکل (۱): نمای یک ورق و سیستم مختصات آن

جابجایی در تئوری کلاسیک ورقها برای حالت بدون کشش صفحه میانی بصورت زیر بیان می شود[۱۶]:

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \left\{ -z\frac{\partial}{\partial x} \quad -z\frac{\partial}{\partial y} \quad 1 \right\}^T w = L_u w \tag{۲۱}$$

روابط کرنش- جابجایی در حالت جابجایی کم (بدون در نظر گرفتن ترمهای غیر خطی ون کارمن[۷]) عبارتند از:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = z\left\{ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right\}^T w = zLw \tag{۲۲}$$

روابط تنش-کرنش نیز بصورت زیر بیان شد:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma xy \end{Bmatrix} = c\varepsilon = zLw \tag{۲۳}$$

که c ماتریس سختی است و با فرض ورق از ماده ایزوتروپیک ساخته شده باشد، بصورت زیر بیان می شود:

$$c = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{۲۴}$$

برای مواد ارتوتروپیک این ماتریس برای حالت تنش صفحه ای بصورت زیر تعریف می گردد[۱۷]

$$\overline{Q} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q}_{45} & \overline{Q}_{55} \end{bmatrix} \tag{۲۵}$$

که $\overline{Q}_{ij}$ بااستفاده از ماتریس انتقال زیر محاسبه می شود:

7- von-kar'man

$$T=\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -\sin2\theta & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & \sin2\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

که θ زاویه پیچش الیاف می باشد. Q_{ij} نیز مولفه های ماتریس سختی در مختصات اصلی می باشند. این ماتریس برحسب خواص مادی ورق در جهات اصلی بصورت زیر بیان می شود:

$$Q=\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix} \qquad (۲۶)$$

که در آن

$$\begin{aligned} &Q_{11}=\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\quad Q_{12}=\frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \\ &Q_{22}=\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\ Q_{66}=G_{12}, \\ &Q_{44}=G_{13},\quad Q_{55}=G_{23},\quad \nu_{21}E_1=\nu_{12}E_2 \end{aligned} \qquad (۲۷)$$

در عبارات فوق (E_i, G_{ij}, ν_{ij}) مدول یانگ، مدول برشی و ضریب پواسون هستند. اندیس ۱ نیز بیانگر جهت الیاف می باشد.

۴- دستگاه معادلات مجزا[8]

شکل تضعیف یافته گالرکین معادله تعادل استاتیکی که مستقیما از اصل همیلتون استخراج می شود بصورت زیر بیان می شود:

$$\int_\Omega \delta\varepsilon^T\sigma\, d\Omega - \int_\Omega \delta u^T b\, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u^T \overline{td}\,\Gamma = 0 \qquad (۲۸)$$

که b نیروی جسمی وارد بر ورق و $\overline{t}$ بردار کشش سطحی وارد بر مرزهای طبیعی ورق هستند. با جاگذاری روابط (۲۰) تا (۲۲) در معادله تعادل فوق خواهیم داشت:

$$\int_\Omega \delta(zLw)^T c(zLw)\, d\Omega - \int_\Omega \delta(L_u w)^T b\, d\Omega - \int_{s_t} \delta(L_u w)^T \overline{t} ds = 0 \qquad (۲۹)$$

8- Weak form

تقریب خیز ورق مطابق روش PIM به صورت زیر در نظر گرفته می شود :

$$w^h(x_Q) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_Q)\, w_i \qquad (۳۰)$$

در نتیجه:

$$Lw = \sum_{i=1}^{n} L\varphi_i w_i = \sum_{i=1}^{n} B_i w_i \qquad (۳۱)$$

که در آن

$$\begin{aligned} B_i &= L\varphi_i \\ &= \left\{ -\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x\partial y} \right\}^T \end{aligned} \qquad (۳۲)$$

با قرار دادن تقریب فوق در معادله تعادل (۲۹) و ساده سازی، فرم ماتریسی معادله تعادل استاتیکی به دست می آید:

$$KU = F \qquad (۳۳)$$

که u بردار متغیرهای میدانی (با مرتبه n_t) می باشد. K نیز ماتریس سختی کل حاصل از اسمبل نمودن سختیهای گره ای (اسکالر) زیر می باشد:

$$k_{ij} = \int_A B_i^T D B_j\, dA \qquad (۳۴)$$

$$D = \int_{-h/2}^{h/2} c z^2\, dz \qquad (۳۵)$$

ماتریس سختی کل در این قسمت بصورت یک ماتریس با مرتبه $n_t \times n_t$ حاصل می شود که مولفه های آنرا سختی های گره ای تشکیل می دهند. n_t تعداد کل گره های موجود در ناحیه حل مسئله می باشد. باید توجه داشت که سختی گره ای k_{ij} جهت دو گره i و j داخل ناحیه اثر نقاط گاوس تعریف می شود. این سختی فقط در گره های داخل ناحیه اثر دارای مقدار بوده و اگر یک یا هر دو گره i یا j در ناحیه اثر نقطه گاوس x_Q قرار نگیرند مقدار k_{ij} بین این دو گره صفر خواهد شد (بدلیل صفر شدن تابع شکل در گره ای که خارج ناحیه اثر واقع می شود).

در معادله (۳۳)، F بردار نیروی کل (با مرتبه n_t) حاصل از مونتاژ نمودن نیروهای گره ای (اسکالر) بیان می شود. هر گاه نیروی جسمی وارد بر ورق تنها در اثر نیروی وزن b_z (و یا هر نیروی

عمودی در راستای ضخامت) باشد، نیروی گره ای را می توان بصورت زیر تعریف نمود[۱۵].

$$f_i = h \int_A \varphi_i b_z \, dA \quad (۳۶)$$

۵- اعمال شرایط مرزی اجباری

بکارگیری روش RPIM باعث می گرددکه شرایط مرزی مشابه روش اجـزاء محـدود اعمـال گـردد[۱۹و۱۸]. معادلـه تعـادل درشـرایط استاتیکی فرم عمومی ماتریسی رابطـه (۳۳) را دارد. شـرایط مـرزی اجباری روی مرزهای اجباری ($\Gamma_u = \Gamma_w + \Gamma_\theta$) را می توان به شکل زیر نمایش داد:

$$\tilde{u} = \overline{u} \quad (۳۷)$$

که $\overline{u}$ برداریست که شامل خیز وچرخش از قبـل تعریـف شـده (بـا توجه به نوع مرز) روی مرز اجباری ورق می باشد. این بردار بـصورت زیر بیان می شود:

$$\tilde{u} = L_b w \quad (۳۸)$$

که L_b بـردار اپراتورهـای دیفرانـسیلی بـوده و بـصورت زیـر تعریـف می شود:

برای مرز گیر دار

$$L_b = \begin{Bmatrix} 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial n} \end{Bmatrix} \quad (۳۹)$$

برای مرز مفصلی

$$L_b = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۴۰)$$

شرط مرزی $\tilde{u}_i = \overline{u}$ که بر روی گره i اعمال می گـردد را در نظـر گرفته می شود. بـرای اعمـال ایـن شـرط مـرزی، تمـامی سـطرها و ستونهای مربوط به گره i را صفر در نظر گرفته، به غیر از K_{ii} کـه برابر یک در نظر گرفته می شود. آنگـاه مـاتریس نیـرو بـصورت زیـر اصلاح می شود.

$$\begin{cases} F_j = F_j - K_{ij}\overline{u} \\ F_i = \overline{u}_i \end{cases} \quad (۴۱)$$

$$\begin{cases} K_{ji} = K_{ij} = 0 \\ K_{ii} = 1 \end{cases} \quad (۴۲)$$

۶- تعیین پارامترهای روش RPIM

در تعیین پارامتر های روش RPIM عوامل زیر موثر هستند:

۱- شبکه بندی زمینه
۲- تعدادنقاط گاوس
۳- مرتبه توابع چند جمله ای۴
۴- شعاع ناحیه اثر ۵
۵- پارامتر q
۶- پارامتر c،که در ادامه به شرح زیر بیان می شوند.

۱- شبکه بندی زمینه: برای انتگرال گیـری عـددی وتوزیـع نقـاط گاوس بکارمی رودومعمولا تعداد تقسیمات آن در هر بعد یکی کمتـر ازتقسیمات درنظر گرفته شده برای ایجاد گره ها است.

۲- تعدادنقاط گاوس: هرچه تعداد نقاط گاوس بیشتر باشـد ,دقـت انتگرال گیری بهتر می شود ولی افزایش این نقاط باعث خواهد شـد محاسبات سنگین گردد.لذا در مقاله حاضر تعداد این نقاط برای هـر سلول انتگرال گیری ۱۶ عدد درنظر گرفته شده است[۲۰].

۳- مرتبه توابع چند جمله ای: مرتبه این توابع تاثیر به سزایی در همگرایی جوابها وجلوگیری ازمعکـوس ناپذیرشـدن مـاتریس ممـان دارد.اگر درجه چند جمله ای ۳ درنظر گرفته شود این امکان وجـود داردکه ماتریس ممان معکوس ناپذیرگرددولی باتوجه به بررسی های صورت گرفته انتخاب m=۶ گزینه مناسب وقابل قبولی است[۱۵].

۴- شـــعاع ناحیـــه اثـــر: پیـــشنهادات زیـــادی دربـــاره ناحیـــه اثروجوداردبرای تحلیل ورق ها۴ ≤ d_s ≤ ۳/۵ ارایه گردیده است و شکل این ناحیه دراین مقاله چهار ضلعی در نظر گرفته شده است.

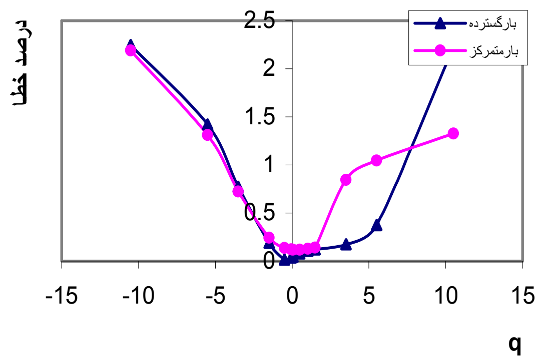
۵- پارامتر q: این پارامتر در اکثر مقالات برابر ۱/۰۳ در نظر گرفته شده است [۶]دراین قسمت با حل ورق بر اسـاس تئـوری کلاسـیک برای مقادیر مختلف q به بررسی مقدار این ضریب پرداخته می شود. باتوجه به جدول ۱ونمودار۱ مشاهده می شودکه با انتخاب پارامتر q بین ۱/۵- تا ۱/۵ می توان به نتایج خوبی دست یافت. درایـن مقالـه $q =$ ۱/۰۳ در نظر گرفته می شود.

۶- پارامتر: رای تعیین این ضریب نیـز دوبـاره ورقـی را بـا تئـوری کلاسیک برای مقـادیر مختلـف c حـل کـرده و خطاهـا بـا یکـدیگر مقایسه می شود.لازم به ذکـر اسـت کـه درایـن حالـت $q =$ ۱/۰۳

درنظر گرفته شده است. با توجه به جدول (۲) و شکل (۲) مشاهده می شود اگر $c = ۲$ فرض شود درصد خطا پایین می آید.

جدول (۱): اثرضریب q برروی خطا

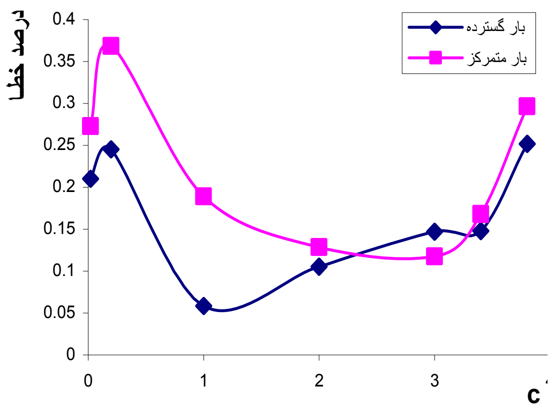
مقدار Q	خطا برای بار گسترده	خطا برای بار متمرکز
-۱۰/۵	۲/۲۲۶	۱/۳۲۴
-۵/۵	۰/۳۷۵۵	۱/۰۴۳۷
-۳/۵	۰/۱۷۵۱	۰/۸۴۶
-۱/۵	۰/۱۲۰۲	۰/۱۳۸۹
-/۵	۰/۱۰۵۳	۰/۱۲۸۴
-/۰۵	۰/۰۷۹۹	۰/۱۱۸۵
/۰۵	۰/۰۴۶۹	۰/۱۱۸۳
۰/۵	۰/۰۳۷۷	۰/۱۱۹۹
۱/۰۳	۰/۰۱۳۳	۰/۱۳۶۷
۱/۵	۰/۱۹۰۴	۰/۲۴۲۳
۳/۵	۰/۷۷۴	۰/۷۲۱۸
۵/۵	۱/۴۱۹	۱/۳۱۲۱
۱۰/۵	۲/۲۴۵	۲/۱۸۹۴



شکل (۲): اثرضریب q برروی خطا

جدول (۲): اثرضریب c برروی خطا

مقدار C	خطا برای بار گسترده	خطا برای بار متمرکز
۰/۰۲	۰/۲۱۰۱	۰/۲۷۲۶
۰/۲	۰/۲۴۵۱	۰/۳۶۸۶
۱	۰/۰۵۸۳	۰/۱۸۹
۲	۰/۱۰۵۳	۰/۱۲۸۴
۳	۰/۱۴۷	۰/۱۱۷۷
۳/۴	۰/۱۴۷۹	۰/۱۶۸۱
۳/۸	۰/۲۵۱۶	۰/۲۹۶۵



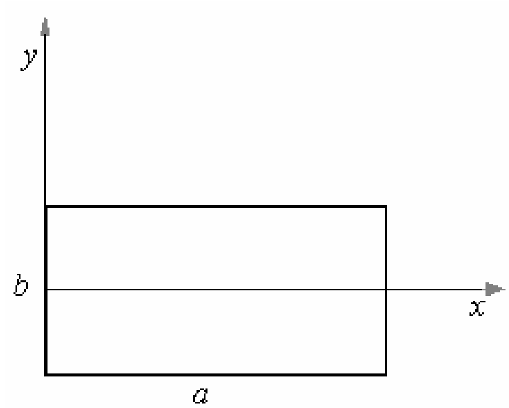
شکل (۳): اثرضریب c برروی خطا

۷- نتایج عددی

پس از استخراج معادلات و مشخص کردن پارامترهای لازم جهت بکارگیری روش RPIM، حال نوبت به آن می رسد تا با حل چند مثال دقت نتایج وکارآیی این روش را بررسی کرده و بتوان از این روش جهت حل مسائلی که تاکنون به آنها پرداخته نشده بهره برد. برای اجرایی کردن روش فوق برنامه ای در محیط نرم افزار Matlab 7.6.0 نوشته شده است [۲۱]. مشخصات ورقی که به آنالیز آن پرداخته خواهد شد درجدول زیر آمده است.

جدول (۳): مشخصات وخواص ورق ایزوتروپیک

ابعاد ورق(متر)	۱×۱
مدول یانگ(MPa)	۱۰۰۰
ضریب پواسون	۰/۳



شکل (۴): ورق مورد تحلیل

برای اینکه بتوان نتایج را عمومیت بخشید، خیزها بدون بعد می گردندکه در هر قسمت رابطه مربوطه بیان می شود, همچنین در کلیه محاسبات فرمول خطا به صورت زیر است:

$$Error = \frac{\varepsilon_{exat} - \varepsilon_p}{\varepsilon_{exat}} \times 100 \quad (۴۳)$$

ورق نازک مربعی با تکیه گاه ساده تحت بارگسترده:

بار $100 \frac{kN}{m}$ را به ورق وارد کرده وضخامت ورق ۰/۱ متر درنظر گرفته می شود.فرمول خیز بدون بعد شده دراین حالت به صورت زیراست: [۱۵]

$$\overline{w} = \frac{w_{max} D}{q b^4} \quad (۴۴)$$

که در رابطه فوق q نیرو، b ابعاد ورق

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (۴۵)$$

می باشد. نتایج حاصل در جدول (۴) آمده است. حل دقیق این مثال توسط تیموشنکو مقدار خیز بدون بعد را برابر ۰/۰۰۴۰۶ بدست آورده است[۲۲]. همچنین توسط تحلیل به روش اجزاء محدود (FEM)، این مقدار برابر ۰/۰۰۴۰۵ حاصل گردیده است[۲۳]. همانگونه که مشاهده می شود در توزیع گره ۹۰۰=۳۰×۳۰ نتایج حاصل از تحلیل به روش حاضر نسبت به روش اجزاء محدود از دقت بالاتری برخوردار است.

جدول (۴): خیز بدون بعد ورق نازک با تکیه گاه ساده تحت بار یکنواخت

گره	۸×۸	۱۰×۱۰	۱۶×۱۶	۲۰×۲۰	۳۰×۳۰
خیز بدون بعد	۰/۰۰۴۰۲۷	۰/۰۰۴۰۳	۰/۰۰۴۰۵	۰/۰۰۴۰۵۸	۰/۰۰۴۰۵۹۹
خطا(٪)	۰/۴۲۴۶	۰/۷۱۱۲	۰/۲۸۵۸	۰/۰۵۱۷	۰/۰۰۵۱

جدول (۵): مقادیر خیز ماکزیمم بدون بعد تک لایه ارتوتروپیک مربعی با تکیه گاه ساده تحت باریکنواخت

گره	۸×۸	۱۰×۱۰	۱۶×۱۶	۲۰×۲۰	۳۰×۳۰
خیز بدون بعد	۰/۰۱۱۴۳	۰/۰۱۱۴۶	۰/۰۱۱۵۵	۰/۰۱۱۵۸۶	۰/۰۱۱۵۹۶
خطا(٪)	۱/۴۲۷۲	۱/۱۸۴۹	۰/۴۲۱۲	۰/۱۱۸۳	۰/۰۳۴

جدول (۶): خیز بدون بعد ورق نازک با تکیه گاه ساده تحت بارهیدرو استاتیک

گره	۸×۸	۱۰×۱۰	۱۶×۱۶	۲۰×۲۰	۳۰×۳۰
خیز بدون بعد	۰/۰۰۲۰۲۱۳	۰/۰۰۲۰۱۶	۰/۰۰۲۰۲۴	۰/۰۰۲۰۲۸۹	۰/۰۰۲۰۲۹۹
خطا(٪)	۰/۴۲۴۶	۰/۷۱۱۲	۰/۲۸۵۸	۰/۰۵۱۷	۰/۰۰۵۱

جدول (۷): خیز بدون بعد ورق نازک با تکیه گاه ساده تحت بار سینوسی

گره	۸×۸	۱۰×۱۰	۱۶×۱۶	۲۰×۲۰	۳۰×۳۰
خیز بدون بعد	۰/۰۰۲۶۴۱	۰/۰۰۲۵۷۲	۰/۰۰۲۵۷۰	۰/۰۰۲۵۶۸۴	۰/۰۰۲۵۶۸
خطا(٪)	۲/۹	۰/۲۳	۰/۱۵	۰/۰۶	۰/۰۵

جدول (۸): مقادیر خیز ماکزیمم بدون بعد تک لایه ارتوتروپیک مربعی با تکیه گاه ساده تحت بار سینوسی

$\frac{b}{a}$	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲
تیموشنکو [۲۲]	۰/۰۱۳۵۳	۰/۰۱۴۸۴	۰/۰۱۵۷۰	۰/۰۱۶۲۰	۰/۰۱۶۵۱
[۲۴]G.R.Liu	۰/۰۱۳۴۴	۰/۰۱۴۷۶	۰/۰۱۵۵۶	۰/۰۱۶۰۳	۰/۰۱۶۳۲
روش حاضر	۰/۰۱۳۵۴	۰/۰۱۴۸۴	۰/۰۱۵۷۶	۰/۰۱۶۱۹	۰/۰۱۶۴۹

همچنین جدول (۵) نتایج حاصل از تحلیل ورق ارتوتروپیک را تحت همان شرایط را نشان می دهد. حل دقیق این مثال توسط Reddy ارائه گردیده و مقدار ۰/۵۴۳ را برای خیز بدون بعد بدست آورده است [۱۶]. مشاهده می شود که در توزیع گره ای اندک ۴۰۰=۲۰×۲۰، روش حاضر به جوابی عینا برابر با حل دقیق نائل می گردد.

ورق مربعی با تکیه گاه ساده با بارهیدرواستاتیک:

در این حالت ورق می شود تحت بار هیدرو استاتیکی زیر تحلیل می شود:

$$q = \frac{q_0 x}{b} \tag{۴۶}$$

معادله بی بعدخیز دراین حالت همان معادله (۴۴) است. نتایج درجدول ۶ آمده است. حل دقیق این مثال توسط تیموشنکو [۲۲]، مقدار خیز برابر با ۰/۰۰۲۰۳ را نتیجه داده است. مشاهده می شود در تحلیل به روش حاضر، در توزیع گره ۹۰۰=۳۰×۳۰ به مقدار ۰/۰۰۲۰۲۹۹ برای خیز بدون بعد دست می یابیم که دارای خطای بسیار پایینی می باشد.

ورق نازک مربعی با تکیه گاه ساده تحت بارسینوسی:

در این حالت ورق تحت بار سینوسی زیرقراردارد.

$$q = q_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right) \tag{۴۷}$$

درمعادله فوق $q_0 = 100$ نیوتن است ورابطه خیز بدون بعد همان رابطه ۲ می باشد. نتایج درجدول (۷) آمده است.
حل دقیق این روش توسط Reddy صورت پذیرفته [۱۶] که نتیجه آن مقدار ۰/۰۰۲۵۶۶ برای خیز بدون بعد بوده است. همچنین جدول (۸) نتایج حاصل از تحلیل ورق ارتوتروپیک را تحت همان شرایط را نشان می دهد. حل دقیق این مثال توسط Reddy ارائه گردیده و مقدار ۰/۳۰۶ را برای خیز بدون بعد بدست آورده است [۱۶]. مشاهده می شود که در توزیع گره ای ۴۰۰=۲۰×۲۰، روش حاضر جوابی عیناً برابر با حل دقیق را نتیجه می دهد.

۷- بحث و نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی تحلیل ورق های نازک ایزوترو پیک و ارتوتروپیک تحت اثر بار گذاری های مختلف بر اساس روش درون یابی نقاط به کمک توابع پایه شعاعی- چند جمله ای پرداخته شده است. از مزایای این روش می توان به عدم المان بندی ناحیه حل اشاره نمود که در ورق های FEM معمولاً این روش پروسه پیچیده ای تا به دست آوردن جوابهای دقیق دارد همانگونه که مشاهده گردید در تحلیل به روش RPIM نتایج سریعا همگرا می شوند و در توزیع گره ای پایین (توزیع۴۰۰ تا ۹۰۰ گره در ناحیه حل) به جوابهای بسیاردقیق (و حتی عینا برابر حل دقیق) منجر می شود.

۸- مراجع

[۱] کاظم زاده پارسی، م. ج.، "روش انتگرال تکمیلی برای اعمال شرایط مرزی اساسی در روش گالرکین بی المان و کاربرد آن در حل مسائل استاتیکی ودینامیکی"، فرهنگ دانشمند، ۱۳۸۴ .

[2] Monaghan, J. J., "An introduction to SPH", Computer Physis Communications, Vol.48, 1982, pp.89-96.

[3] Belytschko, T., Lu, Y. Y., Gu, L.,"Element-free Galerkin method.International", Journal of Numerical Method in Engineering, Vol. 37, 1994, pp. 229-256.

[4] Atluri ,SN., Zhu ,T., "A new meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics", Computational Mechanics, Vol. 22, 1998, pp. 117–127.

[5] Liu ,GR., Gu ,YT., "A Point Interpolation Method for two-dimensional solid", Int J Numer Meth Engng Vol. 50, 2001, pp. 937–51.

[6] Liu, GR., Wang, J G., "A Point Interpolation Meshless Method based on radial basis function", Int J Numer Meth Engng, Vol. 54, 2002, pp. 1623–48.

[7] Zhao, X., Liu, G. R., Dai, K.Y, Zhong, Z. H., Li, G. Y., Han, X., "Geometric nonlinear of plates and cylindrical shells via a linearly conforming radial point interpolation meyhod", Comput Mech, Vol. 42, 2008, pp. 133-144.

[8] Krysl, P., Belytschko, T., "Analysis of thin plates by the element-free Galerkin method", Computational Mechanics, Vol. 17, 1996, pp. 26–35.

[9] Liu , G. R., CHEN, X.L., "A Meshfree Method for static and free vibration analyses of thin plates of complicated shape", journal of sound and vibration, 2001, pp. 839-855.

[10] Dai, K.Y., Liu, G. R., "Thermomechnical analysis of functionally graded material (FGM) plates using element-free Galerkin method", Computers and structures, Vol. 83, 2005, pp. 1487-1502.

[11] Chen, X. L., Zhao, Z. Y., Liew, K. M., "Stability of piezoelectric FGM rectangular plates subjected to non-uniformly distributed load, heat and voltage", Advances in Engineering software, Vol. 39, 2008, pp. 121-131.

[12] Wang, J. G., Liu, G. R., "A point interpolation method based on radial basis function", int. J. Numer. Methodes Engrg.Vol. 54 , 2002, pp. 1623-1648.

[13] Liu, GR., Dai, K Y., MLim, K., Gu Y T., "A radial point interpolation method for simulation of two-dimensional piezoelectric structures", Smart Mater. Struct. Vol. 12, 2003, pp. 171–180.

[14] Schaback, R., Wendland, H., "Characterzation and construction of radial basis functions", 2000.

[15] Liu, GR., "Meshfree methods—moving beyond the Finite Element Method", Boca Raton: CRC Press, 2002.

[16] Reddy, J. N., "Theory and Analysis of Elastic Plates", Department of Mechanical Engineering Texas A&M University, College Station ,1999.

[17] Chen, X. L., Liu, G. R., Lim, S. P., "An element free Galerkin method for the free vibration analysis of composite laminates of complicated shape", Composite Structures, Vol. 59, 2003, pp. 279–289.

[18] Ochoa, O. O., Reddy, J. N., "Finite Element Analysis of Composite Laminates", Kluwer, Netherlands, 1992.

[19] Reddy, J. N., "Mechanics of Laminated Composite Plates—Theory and Analysis", CRC Press, New York, 1997.

[۲۰] واردچنـــی، د. ک.، ترجمــه: فــائزه توتونیــان," آنالیزعــددی"، دانشگاه امام رضا(ع)،۱۳۸۱.

[۲۱] استیفن.ج. چاپمن، ترجمه: سعدان زکـایی ," برنامـه نویـسی Matlab بـرای مهندسـین"، دانـشگاه خواجـه نـصیر الـدین طوسی، ۱۳۸۶.

[22] Timoshenko, S., "Theory of plates and shells", second edition, 1959.

[23] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., "The finite element method", fifth edition, Vol. 2, pp. 136.

[24] Liu, G. R., Chen, X. L., "A Mesh Free Method for static and free vibration analysis of thin plates of complicated shape", Journal of sound and vibration, 2001, pp. 839-855.