فصلنامــه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گــذاری
سال ششم/ شماره بیست‌ویکم/ بهار ۱۳۹۶

ارزش‌گذاری طرح‌های خطرپذیر با استفاده از اختیارات طبیعی و اختیار معامله قسطی

علی فروش باستانی
استادیار ریاضیات مالی، دانشگاه علوم پایه زنجان، دانشکده ریاضی
bastani@iasbs.ac.ir

حامد حامدی نیا
دانشجوی دکتری مهندسی مالی، دانشگاه تهران، دانشکده مدیریت
hamedinia.hamed@ut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۵/۰۷/۱۲ تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۹/۰۵

چکیده

ارزش طرح‌هایی که سرمایه‌گذار خطرپذیر در آن سرمایه‌گذاری می‌کند، به مثابه آورده صاحب آن قلمداد می‌شود؛ از این رو برآورد ارزش دقیق طرح از اهمیت بسزایی برخوردار می‌باشد. در این پژوهش به ارزش‌گذاری طرح خطرپذیر با استفاده از اختیارات طبیعی و اختیار معامله قسطی پرداخته‌ایم. بدین صورت که تنها با در نظر گرفتن فرض عدم آربیتراژ، کران بالا و پایینی برای ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی در دو حالت گسسته و پیوسته، به دست آورده‌ایم و از آن کران‌ها برای ارزش‌گذاری طرح‌های سرمایه‌گذاری خطرپذیر استفاده کرده‌ایم. با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو نشان داده‌ایم که کران‌های به دست آمده در این مقاله از کران به دست آمده توسط دیویس و همکارنش کاراتر است. همچنین با استفاده از روش عددی مونت‌کارلو و رویه حداقل مربعات (لانگ اشتاف-شوارتز)، ارزش اختیار معامله قسطی را محاسبه کرده و با کران‌های به دست آمده مقایسه نموده‌ایم که ارزش تقریباً دقیق این روش عددی، در داخل کران‌های به دست آمده جای گرفته است که این خود دلیلی بر تایید کران‌هاست.

واژه‌های کلیدی: اختیارات طبیعی، اختیار معامله قسطی، سرمایه‌گذار خطرپذیر، شبیه‌سازی مونت‌کارلو، کران بدون آربیتراژ.

۱- مقدمه

با توجه به پیشرفت روز افزون صنعت و رقابت گسترده در اکثـر صـنعت‌هـای جهـان، دیگـر دوران مـدیریت غیرفعال به سر آمده است. در مدیریت غیر فعال، اصولاً مـدیران قـدرت ریسـک بسـیار کمـی دارنـد و سـعی در تحصیل شاخص‌ها در صنعت مربوطه می‌کنند. این مدیران به دنبال ایده‌های تازه‌ای نیستند ولی به این نکته نیز توجه نمی‌کنند که هر صنعتی در صورت عدم نوآوری، مطمئناً در بلند مدت جایگاه خود را به شرکت‌های رقیـب واگذار می‌کند.

برای اجتناب از این معظل، ایجاد طرح‌های نوآورانه و خلاقانه مورد نیاز است. ولی وارد شدن به یک صـنعت نو، حاوی ریسک‌های بسیاری است که باعث می‌شود هر کسی نتواند به این صنعت پـر خطـر رو بیـاورد. تـامین مالی شرکت‌ها برای ورود به این طرح‌ها از یک سو و عدم مهارت کافی برای مواجهه با خطـرات پرشـمار امـا پـر سود آن از دیگر سو، اساسی‌ترین مشکلات این تجارت بزرگ است. اینجاست که شرکت‌های مخاطره پـذیر[1] وارد عمل می شوند تا از یک طرف کار تامین مالی طرح مورد نظر را به عهده بگیرند و از طـرف دیگـر بـا تخصـص و تجربه فراوانی که در زمینه طرح‌های مخاطره پذیر دارند، پروژه نوپا را به سرمنزل مقصود برسانند و از این طریق سود بسیار زیادی کسب کنند. بسیاری از شرکت‌های بزرگ به وسیله شـرکت‌هـای سـرمایه گـذاری خطرپـذیر سرمایه‌گذاری شده‌اند که به عنوان نمونه می‌توان به اوراکل، گوگل، سان مایکرو سیستم، اینتل و سیسـکو اشـاره کرد.

اگرچه عمر زیادی از ایجاد شرکت های مخاطره پذیر در دنیای مالی مـی‌گـذرد، امـا ایـن شـرکت هـا هنـوز نتوانستند به صورت تمام و کمال در کشور ما نهادینه بشوند. تک محصولی بودن اقتصاد ایران و وابستگی شـدید آن به فروش نفت و گاز، نیاز به تولید محصولات مبتکرانه و قابل رقابت با دنیای خارج را بیش از هر نیاز دیگـری ملموس می‌کند. خوشبختانه در کشور ایران، طرح های خلاقانه مناسب با پتانسیل رشد بالا، بسیار به چشم مـی خورد اما متاسفانه اجرایی نمی شوند. دلیل اصلی آن هزینه بالای طرح های جدید و بالتبع تـامین مـالی سـخت اینگونه طرح هاست.

اکثر تامین مالی‌ها به وسیله گرفتن وام از بانک‌ها تامین می‌شوند کـه در مقایسـه بـا تـامین مـالی از طریـق شرکت‌های سرمایه گذاری مخاطره پذیر کارایی کمتری دارند چرا که از یک طرف، شرکت تامین مالی شونده، از مزایای کمک‌های مدیریتی بسیار زیاد و کاهش اهرم مالی خود (وام همان بدهی است که اهرم مـالی را افـزایش می‌دهد اما تامین مالی مخاطره پذیر مانند مشارکت است و بدهی تلقی نمی‌شود)، بی‌بهره می‌ماند؛ از طرف دیگر بانک‌ها که طبق دستور العملشان نباید ریسک زیادی متحمل شوند از دادن وام برای طرح‌های نوبنیاد خودداری به عمل می‌آورند. اینجاست که نیاز به تامین مالی خصوصی که در زمینه انتخاب و ارزش‌گذاری طـرح‌هـا خبـره هستند، احساس می‌شود. خوشبختانه اخیراً این شرکت‌های خطرپذیر در ایران تشکیل شده‌اند و نرخ افـزایش در تعدادشان اگرچه ملموس اما هنوز تعداد آن‌ها بسیار کم است. برخی از این شرکت‌ها که کمابیش کار خطرپذیرها را انجام می‌دهند عبارتند از: پارک علم و فناوری دانشگاه تهران، دانشگاه صنعتی شریف، موسسه توسعه فنـاوری نخبگان به نمایندگی از دفتر همکاری های فناوری ریاست جمهوری، سازمان مدیریت و برنامه ریزی کشور و ...

همان‌طور که انتظار می‌رود بازده بالای این طرح‌ها را ریسک زیاد آن‌ها توجیح مـی‌کنـد و اصـل اول دنیـای مالی یعنی: ریسک بیشتر سود مورد انتظار بیشتر، اینجا نیز مصداق پیدا می‌کند. برخی از ریسک‌های این صنعت ریشه در ذات آن دارد و غیر قابل حذف هستند. اما بسیاری از ریسک‌ها بـه دلیـل عـدم انتخـاب طـرح مناسـب، تخمین نادرست پارامترها، استفاده اشتباه از مدل و ... است که با مهارت بسیاری که شرکت هـای مخـاطره‌پـذیر دارند می‌توانند این ریسک‌ها را کمابیش کنترل کنند. اگر دستور العمل مناسبی برای انتخاب طرح‌های مناسب و ارزشگذاری آن‌ها وجود داشته باشد، مطمئناً ریسک‌های قابل کنترل، کاهش می‌یابد.

برای تحقق این امر، پژوهش‌های زیادی پیرامون روش انتخاب و ارزش‌گذاری طرح‌های مخاطره‌پـذیر انجـام شده است. در این مقاله بر ارزش‌گذاری طرح‌ها متمرکز می‌شویم تا روشی برای ارزش‌گذاری طرح‌ها پیدا کرده و این ریسک‌های غیر سیستماتیک را کاهش دهیم.

کلیات کارهای انجام شده در این پژوهش به صورت ذیل است:

در سرفصل پیشیه پژوهش به تحقیقات و کارهای انجام شده در زمینه ارزش‌گذاری اختیار معامله قسـطی و استفاده از آن در قیمت‌گذاری طرح‌های مخاطره پذیر می‌پردازیم. همان‌طور که نشان داده شده است، دیـویس و همکارانش[2] کران بالا و پایین برای ارزش‌گذاری اختیار قسطی به دست آوردند و از آن، برای ارزش‌گذاری طـرح‌های خطرپذیر تحت فرض عدم وجود آربیتراژ، استفاده کردند. در فصل ارائه مدل، کران بالا و پایین جدیـدی در دو حالت پیوسته و گسسته ارائه و آن را اثبات می‌کنیم و در فصل تحلیل نتایج با استفاده از شبیه سازی قیمـت سهام نشان خواهیم داد که کران‌های ارائه شده در این پژوهش از کـارایی بیشـتری برخـوردار اسـت. در نهایـت نتیجه‌گیری و پیشنهاد برای تحقیقات بعدی ارائه می‌شود.

۲- پیشینه پژوهش

بنابر گفته کوزین ۲۰۰۲ عمده تحقیقات انجام شده پیرامون طرح‌های سرمایه‌گذاری مخاطره پذیر در سه دسته زیر خلاصه می‌شود.

۱) قرارداد بهینه بین کارآفرین (دارنده طرح) و شرکت سرمایه گذار مخاطره پذیر ، چگونه تعیین می‌شود؟ تحقیقات بی‌شماری در این حوزه با استفاده از نظریه بازی‌ها[3] انجام شده است.

۲) مطالعه تجربی در مورد قراردادهای مخاطره پذیر.

۳) ارزش‌گذاری قراردادها یا طرح‌ها: اکثر این طرح‌ها با استفاده از اختیارات طبیعی ارزش‌گذاری شده‌اند.

همان طور که مشخص است، خیل عظیمی از تحقیقات در حوزه ارزش‌گذاری طرح‌ها بوده است چرا که این ارزش‌گذاری به مثابه آورده کارآفرین در نسبت مالکیت از سهام شرکت در زمان عرضه اولیه است. نقیصه ناتوانی در ارزش‌گذاری طرح‌های خطرپذیر نه تنها باعث نشد که تعداد این شرکت‌ها کم شود بلکه هر روز به تعدادشان افزوده می‌شد. سالمن ۱۹۹۰ به جست وجوی علت پرداخت و نشان داد که در شرایط عدم اطمینان، سرمایه‌گذار خطرپذیر، مکانیزم قردادها را به صورتی تعیین می‌کند که کمی توزیع سود را به نفع خودش نامتقارن کند. برای نا اریب کردن سود، سه روش زیر در قراردادها استفاده می‌شد:

۱) سرمایه‌گذاری به صورت مرحله‌ای
۲) استفاده از اوراق قابل تبدیل به جای سهام مستقیم
۳) شرط عدم رقیق شدگی [۴] قیمت سهام

پس از بررسی‌های فراوان به این نتیجه رسیدند که بهترین روش کنترلی همان سرمایه‌گذاری مرحله‌ای است. در واقع به جای این که همه سرمایه را در ابتدای کار در اختیار پروژه بگذارند آن را به صورت مرحله به مرحله وارد طرح می‌کنند.

جنی و ولز ۲۰۰۰ دریافتند که بهترین روش خروج از طرح برای سرمایه‌گذاران خطر پذیر، روش عرضه اولیه سهام [۵] است.

بران و بیسون ۲۰۰۱ ثابت کردند که با شروع طرح‌های سرمایه‌گذاری مخاطره‌آمیز، موقعیت‌های بسیار جالب سرمایه‌گذاری به وجود می‌آید که باید عایدات ناشی از آن موقعیت‌های سرمایه‌گذاری را هم در ارزش فعلی طرح در نظر بگیریم (همان بحث اختیارات طبیعی). از این رو اختیار مرکب به وجود آمد و جسکه ۱۹۹۷ به قیمت‌گذاری آن پرداخت و جواب تحلیلی آن را به دست آورد. اما در مورد بیش از دو مرحله (همان اختیار قسطی) به صورت تحلیلی تا آن زمان (۲۰۰۲) نتیجه‌ای حاصل نشده بود. برخی روش‌های عددی مانند ارزش-گذاری با استفاده از مدل دو جمله‌ای ارائه شده است.

مقاله کوزین ۲۰۰۲ ارزش طرح‌های سرمایه گذاری خطر پذیر را شبیه به ارزش سبدی از دارایی‌ها در نظر می‌گیرد ولی هیچگاه به صراحت ترکیب آن سبد را ارائه نمی‌کند. دیویس و همکارانش ۲۰۰۲ نشان دادند که آن سبد از دارایی‌ها همان اختیار معامله قسطی است و کران بالا و پایینی برای ارزش این اختیار قسطی به دست آورده و نشان دادند که اگر ارزش اولین پرداخت (قیمت ارزش اختیار معامله قسطی) در آن محدوده نباشد، فرصت آربیتراژ پیش می‌آید و سپس ثابت کردند که در شرایط خاص ارزش طرح سرمایه‌گذار خطر پذیر با ارزش اختیار معامله قسطی مشابه برابر است. سپس با استفاده از همان روش، کرانی برای ارزش‌گذاری طرح سرمایه-گذاری خطر پذیر به دست آوردند.

از سال ۲۰۰۲ تاکنون تلاشی برای ارزش‌گذاری طرح‌های خطر پذیر به روش اختیار معامله قسطی صورت نگرفته است اما تحقیقاتی پیرامون ارزش‌گذاری اختیارهای قسطی صورت پذیرفته است که به صورت مختصر به ذکر آنها می‌پردازیم:

آرمر ۲۰۰۴ با استفاده از یک برنامه‌ریزی پویا به محاسبه اختیار معامله قسطی پرداخته است.

سرلیا ۲۰۰۴ یک پوشش ریسک پویا تشکیل داده و با استفاده از معادله دیفرانسیل تصادفی بلک شولز به ارزش‌گذاری اختیار معامله آمریکایی پرداخته است.

در نهایت ویستاپ ۲۰۰۷ جواب تحلیلی اختیار معامله قسطی را به دست آورده است. از طرف دیگر وی و همکارانش به ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی پیوسته (با نرخ q تا زمان سررسید پرداخت شود) مبادرت ورزیده و نشان داده‌اند که در شرایط حدی به جواب خاصی می‌توان رسید.

کیمورا ۲۰۰۷ اختیار قسطی آمریکایی روی سهامی که سود پرداخت می‌کند را محاسبه نموده است. البته چون به صورت معمول شرکت‌های سرمایه‌گذار خطر پذیر سود پرداخت نمی‌کنند (چرا که سهامشان در بورس معامله نمی شود) این تحقیق وارد حیطه کاری ما نمی‌شود.

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، تقریباً تمامی مقالات که به ارزش‌گذاری طرح‌های خطرپذیر پرداخته‌اند از روش بلک- شولز استفاده کرده‌اند که مستلزم استفاده از فروض بلک- شولزی است که تحقیقات بسیاری این فروض را رد کرده‌اند. از طرف دیگر برای قیمت‌گذاری طرح خطرپذیر، تخمین پارامترهایی مثل نوسان‌پذیری، غیر قابل حذف است که این تخمینات ممکن است قابلیت اتکا به نتایج را مورد تردید قرار دهد. تخمین پارامتر نوسان حتی به صورت تاریخی برای طرح‌های خطرپذیر به علت عدم وجود اطلاعات کاری بسیار سخت و به عبارتی ناممکن است.

از این رو دیویس و همکارانش در سال ۲۰۰۲ به ارزش‌گذاری این طرح‌ها با استفاده از اختیار معامله قسطی پرداختند و با در نظر گرفتن فروضی منطقی (در مقالات قبلی نشان داده‌شده بود که این فروض قابل استناد هستند)، ثابت کردند که در دنیای بدون آربیتراژ ارزش یک طرح خطرپذیر با ارزش اختیار قسطی مشابه آن معادل است. بنابراین اگر اختیار قسطی را بتوان ارزش‌گذاری کرد، می‌توان ارزش طرح خطرپذیر را نیز به دست آورد. همان‌طور که گفته شد ارزش اختیار معامله قسطی در بسیاری از تحقیقات به دست آمده، اما متکی به فروض غیر قابل اعتماد بلک- شولزی بود. بنابراین دیویس و همکارانش کران بالا و پایینی برای ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی به دست آوردند و از آن برای ارزش‌گذاری طرح خطرپذیر استفاده کردند. در این روش تنها از فرض عدم وجود آربیتراژ که یک فرض منطقی در بازار است، استفاده کرده‌اند. کران آن‌ها اگرچه برای ارزش-گذاری اختیار معامله قسطی مناسب است اما نشان خواهیم داد که کارایی خود را در مواجهه با طرح خطرپذیر از دست می‌دهد؛ از این رو کران جدیدی در این پژوهش ارائه شده است که از کارایی بیشتری نسبت به کران دیویس و همکارانش برخوردار است.

۳- ارائه مدل

روند معمولی فرایند سرمایه‌گذاری به این شکل است که کارآفرین برای تامین‌مالی طرحش به سرمایه‌گذار خطرپذیر مراجعه می‌کند. پس از انجام مذاکرات ارزش طرح برآورد می‌شود که این مبلغ به مثابه آورده کارآفرین می‌باشد. یعنی در زمان خروج، سرمایه‌گذار خطرپذیر به نسبت سرمایه‌ای کـه وارد پـروژه کـرده و کـارآفرین بـه اندازه مبلغ ارزش برآوردی طرح، از مزایای آن استفاده می‌کنند. از ایـن رو ارزش‌گـذاری تقریبـاً دقیـق طـرح از اهمیت به سزایی برخوردار می‌باشد.

پس به طور خلاصه می‌توان عنوان داشت اهمیت کسب و کارهای کوچک، فواید آن‌ها و ایده‌های نو و خلاقانه‌ای که در دل آن‌ها نهفته است، بر هیچ‌کس پوشیده نیست. تامین‌مالی، مهم‌ترین نیاز آن‌ها برای رشد و توسعه است و بانک راه‌حل مناسبی برای این کار نیست. بنابراین نیاز مبرم به وجود سرمایه‌گذار خطرپذیر

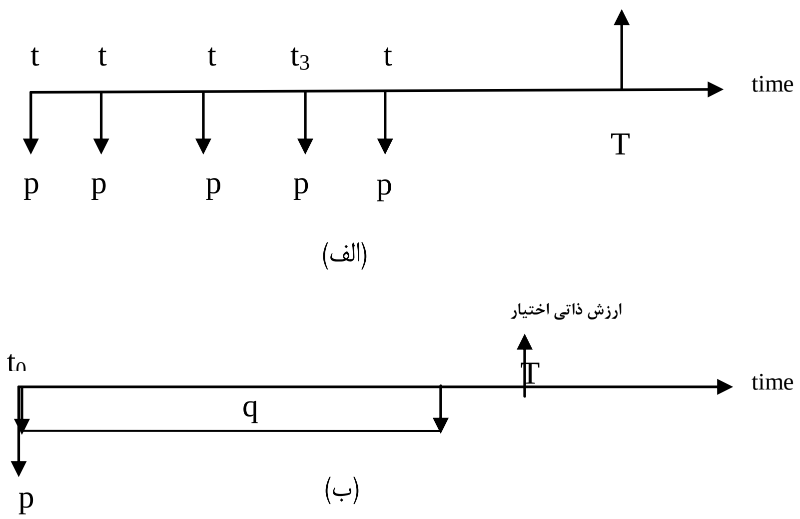
احساس می‌شود. در صورت نیاز به سرمایه‌گذار خطرپذیر به سه دلیل زیر که به طور کامل تشریح شد، ارزش-گذاری طرح‌های خطرپذیر ضرورت می‌یابد:

۱) ارزش طرح به مثابه آورده کارآفرین است و در زمان خروج به همان نسبت بازده دریافت می‌کند.
۲) ارزش‌گذاری در انتخاب طرح مورد نظر کمک می‌کند. اگر ارزش طرح به صورت کمی (حتی به صورت تقریبی) قابل اندازه‌گیری باشد در انتخاب طرح بهینه می‌تواند موثر باشد.
۳) با ارزش‌گذاری درست طرح، می‌توان کمی از ریسک‌های غیر سیستماتیک وارده بر صنعت را کاهش داد.

تنزیل جریان وجوه نقد آتی، نرخ بازگشت و دوره بازگشت از جمله روش‌های قدیمی ارزش‌گذاری طرح‌های اقتصادی هستند که ضعف آن‌ها باعث گردید در جوامع آکادمیک روش ارزش‌گذاری دیگری تحت عنوان اختیارات طبیعی[۶] (اختیارات حقیقی) مطرح گردد. به طور کلی این روش، ارزش تصمیمات آتی که در دل هر سرمایه‌گذاری وجود دارد را در ارزش‌گذاری پروژه در نظر می‌گیرد. به عنوان مثال فرض کنید که توانایی تولید دو محصول الف و ب را داریم و در سال آینده اگر شرایط بازار خوب نباشد می‌توانیم از تولید محصولات خودداری کرده و ماشین‌آلات تولید را بفروشیم. حال فرض کنید که ماشین‌آلات محصول الف به راحتی قابلیت نقد شدن را دارند اما این امکان برای محصول ب وجود ندارد. پس محصول الف یک اختیار با ارزش به نام اختیار خروج در اختیار دارد. این اختیار ارزشمند است چرا که امکان انصراف دادن و خارج شدن از تولید محصول الف در مقایسه با محصول ب راحتتر است چرا که می‌توان با ضرر کمتری ماشین آلات را فروخت. ارزش‌گذاری به روش اختیارات طبیعی بیان می‌کند که اختیاراتی از این دست باید در ارزش‌گذاری یک پروژه در نظر گرفته شود. یکی از انواع اختیارات طبیعی، به مرور ساختن[۷] است. این اختیار در شرایط رقم می‌خورد که به جای پرداخت تمام سرمایه به صورت یک‌جا، آن را به صورت مرحله‌ای پرداخت کرد. معمولا نقاط هدفی در نظر گرفته می‌شود که اگر پروژه به آن نقاط رسید و شرایط مهیا باشد، ادامه سرمایه‌گذاری صورت می‌گیرد.

نوع خاصی از اختیار که رفتاری شبیه به اختیارات طبیعی (نوع به مرور ساختن) دارد، تحت عنوان اختیار معامله قسطی[۸] شناخته می‌شود. به طور کلی تنها تفاوت اختیار قسطی با دیگر اختیارها در پرداخت اولیه آن است. در اختیار قسطی به جای پرداخت یکباره هزینه اولیه اختیار[۹]، آن را به صورت قسطی و در چند مرحله پرداخت می‌کنیم. برای آشنایی مقدماتی با این نوع اختیار، مدل ۵ مرحله‌ای گسسته (الف) و پیوسته (ب) در شکل شماره ۱ نشان داده شده است.

ارزش ذاتی اختیار که در اینجا برابر است با $\max(s_T - k, 0)$



شکل ۱-الف اختیار قسطی ۵ مرحله ای در حالت گسسته با نرخ p، ب اختیار قسطی پیوسته با نرخ q

همان‌طور که در شکل مشخص شده است اگر دارنده اختیار تمامی پرداخت‌ها را تا زمـان t_4 انجـام دهـد، در زمان T از ارزش ذاتی اختیار بهره‌مند می‌شود که این مقدار لزوماً یک اختیار ساده[10] نیست بلکه مـی‌توانـد یـک اختیار غیرمعمول[11] نیز باشد. اگر در هر یک از زمان‌های t_1 تا t_4 دارنده اختیار از پرداخت سر باز زد اختیار معامله فسخ شده و تعهدات منتشر کننده اختیار لغو می‌شود. واضح است پرداخت‌های قبلی دارنده اختیار قابل برگشت نیست. در حالت پیوسته پرداخت‌ها به صورت پیوسته شکل می‌گیرد و دارنده اختیار در هر زمان می‌تواند نسـبت به عدم پرداخت مقادیر اقدام کند؛ بدیهی است پس از عدم پرداخت معامله اختیار فسخ و تعهدات ملغی می‌شود.

همان‌طور که مشخص است با وارد شدن در این اختیار، حق تصمیم‌گیری در آینده را داریم. ارزش این حـق تصمیم‌گیری در مقدار فعلی p_0 (یا همان ارزش اختیار معامله قسطی) مشهود است. بنابراین اختیار قسطی شبیه به اختیارات طبیعی عمل می‌کند.

همان‌طور که توضیح داده شد اگر بتوانیم ارزش اختیار قسطی مشابه با طرح سرمایه‌گذاری خطرپذیر را داشته باشیم، می‌توانیم ارزش طرح سرمایه‌گذاری خطرپذیر را به دست آوریم. در این قسمت در دو حالت گسسته و پیوسته به ارائه مدل DTS (دیویس و همکاران) و مدل ارائه شده در این پژوهش (تحت عنوان روش جدید) می‌پردازیم و درستی مدل ارائه شده را به صورت ریاضی نشان می‌دهیم.

۳-۱- حالت گسسته

در این حالت فرض می‌شود که پرداخت‌ها از طرف سرمایه‌گذاران خطر پذیر به صورت گسسته انجام می‌شود. این حالت به وفور در طرح‌های سرمایه‌گذاری اتفاق می‌افتد.

۳-۱-۱- محدوده بدون آربیتراژ دیویس و همکارانش (DTS)

اگر اختیار معامله قسطی خرید n مرحله‌ای (با ارزش ذاتی اختیار ساده اروپایی و قیمت اعمال k) و با پرداخت اولیه p_0 و پرداخت‌های متوالی p_1 در زمان های $t_1,t_2,...,t_{n-1}$، در کران‌های بالا و پایین مدل زیر صدق نکنند، شرایط آربیتراژ اتفاق می‌افتد.

$$C(t_0,T,k+\hat{p}) \geq p_0 > [C(t_0,T,k) - \hat{p}\, e^{r(T-t_0)} + P_{Ber}(k_1,\mathrm{k}_2,...,\mathrm{k}_{n-1})]_+$$
$$where:$$
$$\hat{p} = p_1 \sum_{i=1}^{n-1} e^{r(T-t_i)} \qquad (۱)$$
$$k_i = p_1 \sum_{i=j}^{n-1} e^{-r(t_j-t_i)}$$

که در آن $[.]_+$ نماد $Max(.,0)$ است و $P_{Ber}(.)$ اختیار فروش برمودایی در زمان‌های $t_1,t_2,...,t_{n-1}$ با مقادیر اعمال k_i است. هم‌چنین $C(t_0,T,k)$ ارزش اختیار خرید اروپایی در زمان t_0 است که زمان سررسید آن T و قیمت اعمال آن k باشد.

۳-۱-۲- محدوده بدون آربیتراژ جدید (NewBound)

قضیه ۱: اگر اختیار معامله قسطی خرید nمرحله‌ای (با ارزش اختیار ساده اروپایی و با قیمت اعمال k) و با پرداخت اولیه p_0 و پرداخت‌های متوالی p_1 در زمان‌های $t_1,t_2,...,t_{n-1}$، در کران‌های بالا و پایین زیر صدق نکند، شرایط آربیتراژ اتفاق می‌افتد.

$$\begin{cases} [C(t_0,T,k) - p_1 \sum_{i=1}^{n-1} e^{-r(t_i-\mathrm{t}_0)} + P_{Ber}(k_1,\mathrm{k}_2,...,\mathrm{k}_{n-1})]_+ < p_0 & \text{(الف)} \\ C(t_0,T,k) - p_1 \sum_{i=1}^{n-1} e^{-r(t_i-\mathrm{t}_0)} + P_{Ber}(k_1',\mathrm{k}_2',...,\mathrm{k}_{n-1}') > p_0 & \text{(ب)} \end{cases} \qquad (۲)$$

که در آن $[.]_+$ نماد $Max(.,0)$ است و $P_{Ber}(.)$ اختیار فروش برمودایی در زمان‌هـای $t_1,t_2,...,t_{n-1}$ بـا مقادیر اعمال k_i و k_i' است که از رابطه‌های زیر به دست می‌آید.

اثبات:

رابطه (۲) را برای اختیار قسطی سه مرحله‌ای اثبات می‌کنیم (برای اختیار با تعداد مراحل بالاتر، با استفاده از همین رویه، قابل تعمیم است).

از نماد $\delta t = T/3$ جهت راحتی در نوشتار استفاده می‌کنیم.

اگر رابطه (۲) قسمت الف، برقرار نباشد، داریم:

$$C(t_0,T,k)+P_{Ber}(k_1,k_2)-p_1e^{-r.\delta t}-p_1e^{-2r.\delta t}\geq p_0$$
$$k_1=p_1+p_1e^{-r.\delta t} \qquad (۳)$$
$$k_2=p_1$$

اگر رابطه (۳) برقرار باشد بدین معنی است که اختیار قسطی ارزان و اختیارهای برمودایی و اروپایی، گران قیمت‌گذاری شده‌اند. بنابراین با خرید اختیار قسطی و فروش دو اختیار برمودایی و اروپایی سبدی از دارایی‌ها تشکیل می‌دهیم و عایدی زیر را در زمان صفر کسب می‌کنیم (x_0). سپس آن را در نرخ بهره بدون ریسک r سرمایه گذاری می‌کنیم.

$$x_0=C+P-p_0\geq p_1e^{-r.\delta t}+p_1e^{-2r.\delta t}$$

به صورت کلی سه حالت زیر در زمان‌های t_1 و t_2 می‌تواند اتفاق بیفتد:

a) در زمان t_1 : $C(t_1,T,k)\geq p_1+p_1e^{-r.\delta t}$ و در زمان t_2: $C(t_2,T,k)\geq p_1$

b) در زمان t_1 : $C(t_1,T,k)\geq p_1+p_1e^{-r.\delta t}$ و در زمان t_2: $C(t_2,T,k)< p_1$

c) در زمان t_1 : $C(t_1,T,k)< p_1+p_1e^{-r.\delta t}$

حالت *a*:

در زمان t_1 موجودی ما به $x_1=x_0e^{r.\delta t}$ می‌رسد؛ بنابراین داریم $x_1\geq p_1+p_1e^{-r.\delta t}$. چون $C(t_1,T,k)\geq p_1+p_1e^{-r.\delta t}$ برقرار است p_1 را پرداخت کرده و هم‌چنان اختیار قسطی را نگه می‌داریم و موجودی ما به $x_1\geq p_1+p_1e^{-r.\delta t}-p_1=p_1e^{-r.\delta t}$ کاهش می‌یابد. ارزش اختیار برمودایی در این زمان به صورت $Max(k_1-S_{t_1},0)=Max(p_1+p_1e^{-r.\delta t}-S_{t_1},0)$ است که با توجه به رابطه زیر هیچوقت اعمال نمی‌شود. $p_1+p_1e^{-r.\delta t}\leq C(t_1,T,k)\leq S_{t_1}$ (قیمت اختیار خرید همیشه از قیمت دارایی پایه کمتر است).

در زمان t_2 موجودی ما به $x_2=x_1e^{r.\delta t}\geq p_1$ می‌رسد. چون $C(t_2,T,k)\geq p_1$ برقرار است، p_1 را پرداخت کرده و اختیار برمودایی اعمال نمی‌شود ($p_1\leq C(t_2,T,k)\leq S_{t_2}$).

در زمان T با داشتن اختیار قسطی یا همان اختیار اروپایی با قیمت اعمال k، می‌توانیم اختیار فروخته شده را پوشش دهیم(همان‌طور که نشان داده شد اختیار برمودایی اعمال نمی‌شود).

حالت *b*:

با استدلال مشابه به پرداخت p_1 در زمان t_1 اقدام کرده و در زمان t_2 موجودی ما برابر $x_2 \ge p_1$ مـی‌باشد. در این زمان چون $C(t_2,T,k) < p_1$ برقرار است، از پرداخت p_1 خودداری کـرده و اجـازه مـی‌دهـیم اختیـار قسـطی فسـخ شـود و اختیـار خریـد $C(t_2,T,k)$ را مـی‌خـریم. در ایـن حالـت موجـودی مـا بـه $x_2 - C(t_2,T,k)$ کاهش می‌یابد که این مقدار نیز کفایت ارزش اختیار برمودایی را می‌کند، چرا که:

$$x_2 - C(t_2,T,k) \ge p_1 - C(t_2,T,k) \ge p_1 - S_{t_2} = k_2 - S_{t_2} = \text{the value of Bermudan option}$$

و در زمان T یک اختیار اروپایی با قیمت اعمال k فروخته‌ایم و یک اختیار اروپایی مشابه در اختیار داریم.

حالت c:

در این حالت موجودی ما در زمان t_1 به $x_1 \ge p_1 + p_1 e^{-r.\delta t}$ می‌رسد و چون $C(t_1,T,k) < p_1 + p_1 e^{-r.\delta t}$ برقرار است، بنابراین از پرداخت اختیار قسطی خودداری کرده و اختیار خرید $C(t_1,T,k)$ را خریداری می‌کنیم. موجودی ما به $x_1 - C(t_1,T,k)$ کاهش می‌یابد که این مقدار همچنان کفایت پرداخت ارزش اختیار برمودایی را در زمان t_1 می‌کند چرا که:

$$x_1 - C(t_1,T,k) \ge p_1 + p_1 e^{-r.\delta t} - C(t_1,T,k) \ge p_1 + p_1 e^{-r.\delta t} - S_{t_1} = k_1 - S_{t_1} = \text{Bermudan value}$$

و در زمان T ارزش یک اختیارخرید اروپایی با قیمت اعمال k بدهکار هستیم و یک اختیار اروپـایی بـا قیمـت اعمال مشابه در اختیار داریم.

نکته: اگر دارنده اختیار برمودایی در زمان t_1 نسبت به اعمال اختیار اقدام نکرد، با پرداخت p_1 به زمان t_2 مـی‌رویم. در آن زمان اگر $C(t_2,T,k) \ge p_1$ بود، مشابه حالت <u>a</u> و اگر $C(t_2,T,k) < p_1$ بود، مشابه حالت <u>b</u> عمل می‌کنیم.

همان‌طور که مشخص است در تمامی حالات شرایط آربیتراژ وجود دارد. بنـابراین رابطـه (۲) قسـمت الـف بایـد برقرار باشد تا شرایط آربیتراژ پیش نیاید.

اگر رابطه (۲) قسمت ب برقرار نباشد، در این صورت رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} &C(t_0,T,k) + P_{Ber}(k_1',k_2') - p_1 e^{-r.\delta t} - p_1 e^{-2r.\delta t} \le p_0 \\ &k_1' = p_1 + p_1 e^{-r.\delta t} + k\, e^{-r(T-t_1)} = p_1 + p_1 e^{-r.\delta t} + k\, e^{-2r.\delta t} \\ &k_2' = p_1 + k\, e^{-r(T-t_2)} = p_1 + k\, e^{-r.\delta t} \end{aligned} \tag{۴}$$

اگر رابطه (۴) برقرار باشد، بدین معنی است که اختیار قسطی گران و دو اختیار برمودایی و اروپایی ارزان قیمت‌گذاری شده است. بنابراین اقدام به فروش اختیار قسطی و خرید دو اختیار برمودایی و اروپایی می‌کنیم. برای این کار نیاز به دریافت وام از بانک به مبلغ $y_0 = p_1 e^{-2r.\delta t} + p_1 e^{-r.\delta t}$ داریم. به صورت کلی سه حالت زیر در زمان‌های t_1 و t_2 می‌تواند اتفاق بیفتد:

a) دارنده اختیار قسطی در زمان‌های t_1 و t_2 نسبت به پرداخت p_1 اقدام کند.

b) دارنده اختیار در زمان t_1، p_1 را پرداخت کند، اما در زمان t_2، p_1 را پرداخت نکند.

c) دارنده اختیار در زمان t_1، از پرداخت p_1 خودداری کند.

حالت *a*:

در زمان t_1 مبلغ $y_1 = y_0 e^{r.\delta t} = p_1 e^{-r.\delta t} + p_1$ به بانک بدهکار هستیم. طبق فرض این حالت، دارنده اختیار قسطی مبلغ p_1 را به ما پرداخت می‌کند. آن مبلغ را به بانک پرداخت کرده و بدهی ما به $y_1 = p_1 e^{-r.\delta t}$ کاهش می‌یابد.

در زمان t_2 مبلغی معادل $y_2 = y_1 e^{r.\delta t} = p_1$ به بانک بدهکار هستیم که با دریافت p_1 از دارنده اختیار قسطی، آن را به بانک پرداخت کرده و بدهی ما به بانک به صفر می‌رسد. در زمان T سبد ذکر شده دارای یک اختیار برمودایی - با ارزش نامنفی است که قابلیت اعمال آن را در هر یک از زمان‌های t_1 و t_2 داشتیم (آن را در یکی از دو زمان مجاز اعمال، بدون نگرانی از بابت پوشش ریسک می‌توانیم اعمال کنیم)- و یک اختیار خرید با ارزش ذاتی $Max\,(S_T - k, 0)$است. از طرفی یک اختیار قسطی با ارزش ذاتی $Max\,(S_T - k, 0)$ بدهکار است. از آن‌جایی که ارزش اختیار اروپایی با ارزش اختیار قسطی برابر است، به راحتی اختیار قسطی را پوشش می‌دهیم و همان‌طور که گفته شد و فارغ از هر اتفاقی که در زمان T قرار است بیفتد، می‌توانیم اختیار برمودایی را که به دلیل ماهیت اختیاریش همواره نامنفی است را در هر یک از زمان‌های t_1 یا t_2 اعمال کنیم.

رابطه ریاضی آن به شکل زیر است:

$$P_{Ber}\ [we\ can\ exercise\ it\ at\ t_1\ or\ t_2] + C\,(t_0, T, k) - installment\ option\,[Max\,(S_T - k, 0)] = P_{Ber} \geq 0$$

در واقع احتمال کسب سود از طریق اختیار برمودایی وجود دارد.

حالت *b*:

در زمان t_1 شبیه به حالت قبل، با استفاده از پرداختی دارنده اختیار قسطی، به پرداخت بدهی بانک اقدام می‌کنیم. در زمان t_2 مبلغ $y_2 = y_1 e^{r.\delta t} = p_1$ را باید به بانک پرداخت کنیم. در این حالت چون p_1 از طرف

دارنده اختیار قسطی پرداخت نمی‌شود، پس اختیار فسخ می‌شود. و دارایی ما به شکل $C+P_{Ber}$ در می‌آید. برای این‌که شرایط آربیتراژ پیش بیاید کافی است که رابطه رو به رو در زمان t_2 برقرار باشد: $C+P_{Ber}\geq p_1$.

{ برای اثبات، از رابطه $S_t - k\,e^{-r(T-t)} \leq C(t,T,k) \leq S_t$ استفاده می‌کنیم که با توجه به شرایط عدم آربیتراژ به راحتی اثبات می‌شود[12].}

$$\begin{cases} C(t_2,T,k) \geq S_{t_2} - k\,e^{-r.\delta t} \\ P_{Ber}^{t_2}(.) = Max(k_2' - S_{t_2},0) \end{cases} \rightarrow \quad C+P_{Ber} \geq S_{t_2} - k\,e^{-r.\delta t} + Max(p_1 + k\,e^{-r.\delta t} - S_{t_2},0)$$

در این حالت، تنها ممکن است دو اتفاق بیفتد:

۱) ارزش اختیار مثبت است اگر $p_1 + k\,e^{-r.\delta t} \geq S_{t_2}$ باشد.

۲) صفر است اگر $p_1 + k\,e^{-r.\delta t} < S_{t_2}$ باشد.

بنابراین:

$$\begin{cases} if \quad \underbrace{p_1 + k\,e^{-r.\delta t} < S_{t_2}}_{p_1 < S_{t_2} - k\,e^{-r.\delta t}} \rightarrow C+P_{Ber} \geq S_{t_2} - k\,e^{-r.\delta t} + 0 > p_1 \\ if \quad p_1 + k\,e^{-r.\delta t} \geq S_{t_2} \rightarrow C+P_{Ber} \geq \cancel{S_{t_2}} - \cancel{k\,e^{-r.\delta t}} + p_1 + \cancel{k\,e^{-r.\delta t}} - \cancel{S_{t_2}} \geq p_1 \end{cases}$$

همان‌طور که دیدیم در دو اتفاق ممکن، $C+P_{Ber}\geq p_1$ برقرار است که همان‌طور که نشان داده شد اگر این عبارت برقرار باشد، شرایط آربیتراژ داریم.

حالت c:

با استدلال مشابه چون p_1 در زمان t_1 پرداخت نمی‌شود، دارایی ما به شکل $C+P_{Ber}$ است و بدهی ما به بانک برابر است با $y_1 = y_0 e^{r.\delta t} = p_1 e^{-r.\delta t} + p_1$.

بنابراین اگر در زمان t_1 رابطه زیر برقرار باشد شرایط آربیتراژ پیش می‌آید.

$$C+P_{Ber} \geq p_1 e^{-r.\delta t} + p_1$$

شبیه به حالت b داریم:

$$\begin{cases} C(t_1,T,k) \geq S_{t_1} - k\,e^{-2r.\delta t} \\ P_{Ber}^{t_1}(.) = Max(k_1' - S_{t_1},0) \end{cases} \rightarrow \quad C+P_{Ber} \geq S_{t_2} - k\,e^{-r.\delta t} + Max(p_1 + p_1 e^{-r.\delta t} + k\,e^{-r.\delta t} - S_{t_1},0)$$

در این حالت، تنها ممکن است دو اتفاق بیفتد:

۱- ارزش اختیار مثبت است اگر $p_1 + p_1 e^{-r.\delta t} + k\,e^{-r.\delta t} \geq S_{t_2}$ باشد.

۲- صفر است اگر $p_1 + p_1e^{-r.\delta t} + k\,e^{-r.\delta t} < S_{t_2}$ باشد.

بنابراین:

$$\begin{cases} if \;\; \underbrace{p_1 + p_1e^{-r.\delta t} + k\,e^{-r.\delta t} < S_{t_1}}_{p_1+p_1e^{-r.\delta t}<S_{t_1}-k\,e^{-r.\delta t}} \rightarrow C + P_{Ber} \geq S_{t_1} - k\,e^{-r.\delta t} + 0 > p_1 + p_1e^{-r.\delta t} \\ if \;\; p_1 + p_1e^{-r.\delta t} + k\,e^{-r.\delta t} \geq S_{t_1} \rightarrow C + P_{Ber} \geq \cancel{S_{t_1}} - \cancel{k\,e^{-r.\delta t}} + p_1 + p_1e^{-r.\delta t} + \cancel{k\,e^{-r.\delta t}} - \cancel{S_{t_1}} \geq p_1 + p_1e^{-r.\delta t} \end{cases}$$

همان‌طور که مشخص در تمامی حالات شرایط آربیتراژ وجود دارد. بنابراین رابطه (۲) قسمت ب نیز بایـد برقـرار باشد تا شرایط آربیتراژ پیش نیاید.

۳-۲- حالت پیوسته

همان‌طور که گفته شد در حالت پیوسته، پرداخت‌ها به صورت پیوسته با نرخ مشخصی بر زمان انجام می‌گیرد. در مورد اختیار قسطی، هر چند امکان این نوع پرداخت، در تئوری وجود دارد اما در عمل غیر ممکن است. به عنوان مثال حتی اگر پرداخت‌ها به صورت ساعتی هم باشد، باز هم حالت گسسته شکل گرفته است.

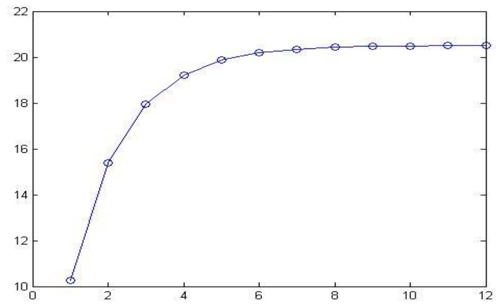
در مورد ارزش‌گذاری طرح‌های خطرپذیر قضیه متفاوت می‌شـود. پـیش‌تـر گفتـه شـد کـه سـرمایه‌گـذاران خطرپذیر با توجه به پرداخت‌های گسسته‌ای که قرار است در آینده به طـرح تزریـق کننـد، بـه ارزیـابی طـرح و ارزش‌گذاری آن می‌پردازند. نکته‌ای که قابل توجه است و در نظر گرفته نمی‌شود، هزینه‌های پیوسته‌ای است که سرمایه‌گذاران خطرپذیر متحمل می‌شوند و آن را در ارزیابی طرح در نظر نمی‌گیرند. هزینه‌هایی از این دست اگر چه زیاد نیست اما غیرمعمول هم نیست؛ به عنوان مثال کمک‌های مدیریتی که آن‌ها ارائه مـی‌دهنـد و مسـتلزم داشتن نیروهای متخصص با دستمزد بالاست، هزینه بررسی طرح‌های جدید که به صورت پیوسته انجام می‌شود و ... نمونه‌های از این نوع هزینه‌ها است.

۳-۲-۱- محدوده بدون آربیتراژ دیویس و همکارانش (DTS)

به طور معمول در دنیای مالی برای ارزش‌گذاری مسائل پیوسته زمان، آن را به صورت گسسته در نظر می‌گیرند و سپس ثابت می‌کنند که اگر تعداد مراحل به سمت بی‌نهایت میل کند، جواب مسئله گسسته، به حالت پیوسته زمان آن همگرا می‌گردد. DTS نیز از این قضیه کلی استفاده کردند. آن‌ها نشان دادند که اگر $V\,(t,S)$ بیانگر ارزش اختیار قسطی پیوسته و $V_n(t,S)$ بیانگر ارزش اختیار قسطی مشابه با n مرحله پرداخت باشد، رابطه (۵) برقرار است. به عبارتی اگر تعداد مراحل یک اختیار قسطی گسسته را زیاد کنیم به سمت ارزش پیوسته آن میل می‌کند.

$$\lim_{n \to \infty} V_n(t,S) = V(t,S) \qquad (۵)$$

بنابراین آن‌ها اختیار قسطی را به n مرحله تقسیم کردند و نشان دادند که وقتی n به مقدار بزرگـی مـی‌رسـد $\hat{p}$ موجود در رابطه (۱) به سمت عدد مشخصی میل می‌کند. شکل (۲) این حالت را نشان می‌دهد.

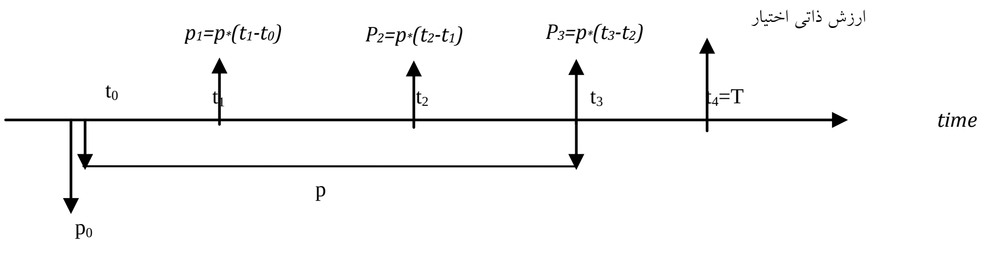


شکل ۲-همگرایی p به سمت مقدار مشخصی وقتی تعداد مراحل افزایش می‌یابد.

در این روش فقط کافی است که تعداد مراحل را بالا برده و از $\hat{p}$ همگرا شده در رابطه (۱) استفاده شود. در این صورت محدوده بدون آربیتراژ برای حالت پیوسته به دست می‌آید.

۲-۲-۳- محدوده بدون آربیتراژ جدید (NewBound)

برای این‌کار طبق معمول مسیر را به تعداد زمان‌های زیاد تقسیم و حالت پیوسته را به گسسته تبدیل می‌کنیم{اثبات همگرایی قبلاً صورت گرفته است، $\lim_{n\to\infty} V_n(t,S) = V(t,S)$ }. طبق شکل (۳) اگر پرداخت با نـرخ q بر سال صورت بگیرد، هر یک از پرداخت‌های آتی (p_1) برابر است با $p_1 = q.\delta t$ جایی که $\delta t = \frac{t_{n-1}}{n}$ که n تعداد مراحل است.



شکل ۳-تبدیل اختیار معامله قسطی گسسته به پیوسته

همان‌طور که از شکل مشخص است با افزایش تعداد مراحل، حالت گسسته به حالت پیوسته نزدیک می‌شود. روش کار این است که آن‌قدر تعداد مراحل را بالا ببریم تا اختلاف بین دو ارزش متوالی به دست آمده کمتر از مقدار خطای خاصی (x) شود و یا به عبارت دیگر:

$$\left|V_n(t,S) - V_{n-1}(t,S)\right| < x$$

۴- تحلیل نتایج

در این قسمت به مقایسه روش‌های ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی تشریح شده در فصل قبل، در دو حالت گسسته و پیوسته، می‌پردازیم. همانطور که گفته شد هدف از ارائه مدل جدید، ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی و به تبع آن ارزش‌گذاری طرح‌های خطرپذیر است. از آنجایی که ارزش‌گذاری دقیق طرح‌های خطرپذیر با مفروضاتی غیر واقعی همراه است، نیاز به مدل جدیدی بود تا با کاهش تعداد فروض ارزش مناسبی را برای طرح-های خطرپذیر ایجاد نماید. دیویس و همکاران این کران‌ها را به دست آورده بودند اما کران آن‌ها یک مشکل اساسی داشت؛ فاصله کران‌ها زیاد بود، در واقع ارزش طرح خطرپذیر هر مقداری در بین کران پایین و بالای دیویس و همکارانش قرار می‌گرفت. این معضل در ارزش‌گذاری خطرپذیر بیشتر نمود پیدا می‌کرد. بنابراین در این پژوهش کران‌هایی به دست آمد که فاصله کران بالا و پایین آن بسیار کمتر است. همانطور که از نتایج عددی مشخص است این کاهش در ارزش‌گذاری طرح خطرپذیر بیشتر نمود پیدا می‌کند. بنابراین لازم است برتری کران‌های به دست آمده در این پژوهش با کران‌های به دست آمده توسط دیویس و همکارانش به صورت عددی اثبات شود. برای این‌کار یا باید از داده‌های واقعی استفاده کنیم، یا با استفاده از شبیه‌سازی به تولید فرایند تصادفی به جهت شبیه‌سازی قیمت دارایی پایه اقدام نماییم. از آن‌جایی که دسترسی به داده‌هایی که در مدل‌ها استفاده شده‌اند (اختیار آمریکایی و اختیار برمودایی با قیمت‌های اعمال مختلف)، برای ما مقدور نیست، به اجبار از شبیه‌سازی مونت‌کارلو خام[۱۳] برای تولید فرایند تصادفی استفاده می‌کنیم.

در جداول زیر به ازای k و p های مختلف این دو محدوده را مقایسه کرده‌ایم.

جدول ۱- اختیار قسطی ۵ مرحله‌ای به ازای قسط ۲ واحد پول و قیمت اولیه ۱۰۰ واحد و نوسان ۰/۲

K	P=2					
	DTS Bound		New Bound		Least Square	
	Low	Up	low	up	low	Up
105	0	4.98	0.21	10.13	2.10	2.22
100	1.83	6.70	2.65	9.44	3.85	4.00
95	4.72	8.84	5.54	9.88	6.28	6.46
85	11.84	14.50	12.66	14.04	12.89	13.12
75	20.35	21.91	21.17	21.45	21.22	21.47
65	29.59	30.60	30.48	30.44	20.41	30.66
55	39.06	39.91	39.87	39.88	29.88	40.13
45	48.57	49.39	49.39	49.40	49.39	49.64
35	58.08	58.90	58.90	58.90	58.90	59.15

جدول ۲- اختیار قسطی ۵ مرحله‌ای به ازای قسط ۵ واحد پول و قیمت اولیه ۱۰۰ واحد و نوسان ۰/۲

K	P=5					
	DTS bound		New bound		Least Square	
	low	Up	Low	up	low	Up
105	0	2.24	0	8.05	0.06	0.09
100	0	3.14	0	6.00	0.23	0.28
95	0	4.33	0	4.73	0.65	0.72
85	0	7.80	0.96	5.26	3.52	3.67
75	7.41	13.03	9.46	10.47	9.94	10.16
65	16. 65	20.07	18.70	18.82	18.74	18.99
55	26.13	28.52	28.17	28.18	28.18	28.43
45	35.64	37.73	37.68	37.68	37.68	37.93
35	45.14	47.20	47.19	47.20	47.19	47.45

جداول فوق در واقع به صورت کلی به مقایسه روش ارائه شده در این پژوهش (New bound) و روش دیویس و همکارانش (DTS bound) می‌پردازد. اعداد ستون low کران پایین و اعداد ستون up کران بالای روش‌ها را نشان می‌دهد. با یک بررسی اجمالی مشخص می‌شود که فاصله کران بالا و پایین روش newbound در بسیاری از حالات از روش دیویس و همکارانش بهتر (در واقع کوچکتر) است و ارزش را دقیق‌تر مشخص می‌نماید. در قسمت ۳ به تفصیل راجع به پارامترهای قیمت اعمال و اقساط پرداختی صحبت کردیم. ستون سوم (lesat square) روشی عددی است که آن روش نیز کران‌های بالا و پایینی ارائه می‌دهد[۱۴] که نسبتاً دقیق‌تر هم هستند. اما دقت شود که روش‌های عددی مانند حداقل مربعات از فروضی غیر واقعی استفاده می‌کنند. مثلا فرض می‌کنند که دینامیک قیمت دارایی پایه از حرکت براونی هندسی تبعیت می‌کند. بنابراین ارائه کران‌های به دست آمده از روش حداقل مربعات صرفاً برای تاییدی بر کران‌های ارائه شده است. چرا که همانطور که توضیح داده شد به دلیل در دسترس نبودن داده‌های واقعی، برای مقایسه کران‌ها مجبور به شبیه‌سازی دینامیک قیمتی دارایی پایه شدیم. برای این کار از حرکت براونی هندسی استفاده کردیم و کران‌ها را به دست آوردیم. همانطور که ملاحظه می‌گردد کران به دست آمده از روش عددی در کران‌های هر دو روش (هم روش جدید و هم روش دیویس) قرار گرفت که خود تاییدی بر صحت کران‌های به دست آمده در این پژوهش است. ذکر عددی کران‌های روش عددی حداقل مربعات بر کران‌های به دست آمده توسط دیویس و همکارانش نیز صحه می‌گذارد و روش آن‌ها را مجددا تایید می‌کند.

در ادامه به صورت جزیی‌تر و همراه با تفسیر نحوه تاثیرگذاری دو پارمتر مذکور بر مدل ارائه شده، می‌پردازیم و نتایج مقایسه را دقیقتر شرح می‌دهیم.

همان‌طور که از نتایج مشخص است، کران پایین روش جدید همواره مساوی یا بزرگتر از کران پایین DTS است و این به منزله آن است که کران پایین روش جدید مقادیری دقیق‌تر نسبت به روش DTS ارائه می‌کند. در مورد کران بالا با قاطعیت نمی‌توان نظر داد چرا که به ازای بعضی از مقادیر اعمال، کران بالای DTS مقدار کمتری (در واقع بهتری چرا که مرز کوچکتر و دقیق‌تر می‌شود) ارائه و به ازای بعضی دیگر از مقادیر اعمال، کران

جدید مقادیر بهتری ارائه می‌کند. در واقع می‌توان گفت اگر قیمت اعمال، نزدیک به قیمت اولیه سهام باشد، کران DTS عملکرد بهتری خواهد داشت در غیر این صورت روش جدید بهتر عمل می‌کند.

در مورد اکثر اختیارها (اختیار قسطی هم از این قضیه مستثنی نیست) قیمت اعمال اختیار با قیمت اولیه سهام تفاوت چندانی ندارد؛ چرا که احتمال سقوط شدید قیمت سهام شرکتی که به مرز پختگی رسیده است، بسیار کم است. مثلاً ارزش اختیار فروش اروپایی به ازای قیمت‌های اعمال بسیار کم‌تر از قیمت اولیه سهام، مقدار کوچکی است. بنابراین یک فرض منطقی برای اختیار قسطی با قیمت اولیه $ ۱۰۰، در نظر گرفتن قیمت-های اعمال بین ۷۵ تا ۱۲۵ است. اما موارد گفته شده، نه تنها برای طرح‌های سرمایه‌گذاری خطر پذیر مصداق ندارد بلکه دقیقاً برعکس عمل می‌کند که در ادامه بیان می‌شود.

در پژوهش دیویس و همکارانش به این نکته مهم اشاره شد که سرمایه‌گذار خطرپذیر در لحظه خروج، سهام شرکت را به روش عرضه اولیه و با تقبل هزینه‌هایی که به هزینه انتشار معروفند (که آن را به عنوان k در نظر گرفتیم)، وارد بورس می‌کند و با قیمت S_T به فروش می‌رساند و عایدی معادل $Max(S_T - k, 0)$را کسب می‌کند. نکته حائز اهمیت قیمت اعمال یا همان هزینه انتشار است. با توجه به تحقیقات مالی صورت گرفته در زمینه هزینه‌های عرضه اولیه سهام، مقدار این هزینه‌ها زیاد نیست[۱۵]. به عنوان مثال اگر قیمت سهامی $ ۱۰۰ دلار باشد، هزینه انتشار آن حداکثر به ۲۰ الی ۶۰ دلار می‌رسد. البته این موضوع کاملاً منطقی است. اگر فرض کنید سهام شرکتی $ ۱۰۰ ارزش دارد و هزینه‌های انتشار آن ۹۰$ است، آیا کسی حاضر است سهام را وارد بورس کند و تنها ۱۰ دلار از سهامی که ۱۰۰ دلار می‌ارزد، به دست آورد؟

پس برای طرح‌های سرمایه‌گذاری خطرپذیر، در نظر گرفتن قیمت‌های اعمال پایین، منطقی‌تر است.

از طرفی با دقیق شدن در نتایج جداول مشاهده می‌گردد هر چه مقدار پرداخت‌های قسطی بیشتر می‌شود، کران بالای DTS خاصیت خود را از دست می‌دهد و در عوض کران بالای روش جدید عملکرد بهتری پیدا می-کند. همان‌طور که قبلاً گفته شد در دنیای سرمایه‌گذاران خطرپذیر، این پرداخت‌ها به منزله سرمایه‌گذاری روی طرح جدید است که قاعدتاً مقادیر بزرگی را شامل می‌شوند. به عنوان مثال ممکن است بر روی طرحی که دارای ارزش (قیمت سهام) اولیه ۱۰۰ دلار است، در هر مرحله، اقساطی معادل ۳۰ دلار پرداخت شود. و همان‌طور که گفته شد برای پرداخت‌هایی با مقادیر بالا، کران بالای روش جدید بهتر عمل می‌کند.

بنابراین می‌توان نتایج را این‌گونه بیان کرد:

۱) کران پایین روش جدید تحت هر شرایطی از روش DTS بهتر است.

۲) کران بالای DTS برای قیمت‌های اعمال نزدیک به قیمت اولیه سهام و پرداخت‌های قسطی کوچک (شرایطی که صرفاً در اختیار معامله قسطی برقرار است و برای طرح خطرپذیر مصداق ندارد)، بهتر عمی می‌کند اما کران بالای روش جدید برای قیمت‌های اعمال پایین‌تر و پرداخت‌های بالاتر (شرایط که در طرح خطرپذیر به وفور یافت می‌شود) مناسب‌تر است.

همانطور که گفته شد، هر چند با توجه به فرض عدم وجود آربیتراژ، صحت هر دو مدل کرانی (روش DTS و روش جدید) اثبات شد، اما به هر حال ممکن است اگر فقط از همان دو روش استفاده شود (به دلیل ماهیت

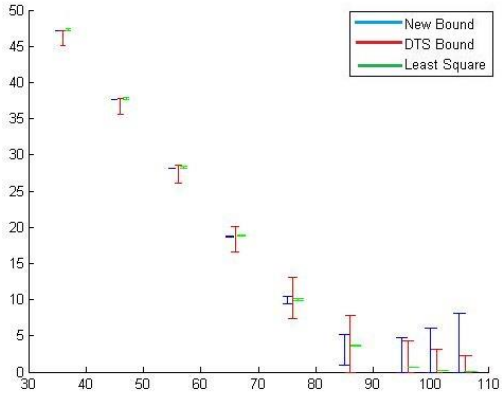
عملکردی مشابه) نتوان زیاد به نتایج اطمینان کرد. در واقع به دنبال یک تایید کننده‌ای برای اثبات مدل‌ها هستیم. از این رو با استفاده از روش عددی مونت‌کارلو و با کاربردی کردن رویه حداقل مربعات ، ارزش تقریباً دقیق اختیار معامله قسطی را به دست آوردیم که در جداول تحت عنوان Least Square نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است این محدوده‌های تقریباً دقیق، کران ما را تایید می‌کنند.

به صورت خلاصه می‌توان اذعان نمود:

۱) برای ارزش‌گذاری اختیار قسطی از کران پایین روش جدید و کران بالای DTS استفاده شود.

۲) برای ارزش‌گذاری طرح خطرپذیر از کران‌های روش جدید (NewBound)

برای مقایسه بهتر کران‌های به دست آمده، شکل زیر محدوده‌ها را به صورت شماتیک نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است محدوده‌های زیر به ازای سه روش مختلف ارائه شده است. برای قیمت‌های اعمال پایین‌تر (محور افقی) محدوده بدون آربیتراژ جدید حتی از روش عددی حداقل مربعات هم محدوده بهتری ارائه داده است.



شکل ۴- مقایسه نموداری سه روش ارزش‌گذاری طرح خطرپذیر- خطوط کشیده شده کران بالا و پایین سه روش توضیح داده شده را نشان می‌دهد.

۵- نتیجه‌گیری و بحث

ارزش‌گذاری طرح‌های نوآور همیشه دغدغه بسیار مهمی برای جامعه آکادمیک و حتی عملیاتی آن‌هاست. مطالعات تاکنون این ارزش‌گذاری را یا با استفاده از درخت‌های چندجمله‌ای و یا اختیارات حقیقی انجام داده‌اند. هر دو روش مذکور دارای ایرادات بسیار زیادی است. درخت چندجمله‌ای بسیار ساده انگارانه است و در انواع روش‌های اختیارات حقیقی، فرض می‌شود که دینامیک قیمتی طرح نوآور مشخص است. حتی روش‌های ریاضیاتی مطالعات پیشین، قادر نیست ارزش طرح‌های نوآور را با فرض دینامیک‌های پیچیده‌تر مانند رژیم سوئیچینگ، دینامیک همراه با پرش و ... به دست بیاورد و اکثر مطالعات فرض ساده تبعیت قیمت سهام از حرکت براونی هندسی را مد نظر قرار می‌دهند که به وضوح این فرض امروزه کارایی ندارد.

بنابراین نیاز به روشی نوین در ارزش‌گذاری احساس می‌شد که از تمامی فروض دست و پا گیر ذکر شده مبری باشند. دیویس و همکارانش (DTS) توانستند تا حدودی بر معضل فایق آمده و ارزشی برای اختیار معامله قسطی تخمین بزنند و از آن برای ارزش‌گذاری طرح‌های نوآور استفاده کنند. تنها فرض مورد استفاده آن‌ها، فرض عدم وجود آربیتراژ بود که یک فرض متعارف و معقول در بازار سرمایه است. اما مشکل اینجا بود که آن‌ها به یک عدد ثابت به عنوان ارزش نرسیدند بلکه کران پایین و بالایی ارائه دادند که ارزش اختیار قطعا در آن محدوده باید قرار می‌گرفت؛ در غیر این صورت شرایط آربیتراژ به وجود می‌آمد.

متاسفانه کران‌های DTS اگر چه برای تخمین اختیار معامله قسطی به نسبت مناسب بود اما با توجه به خصوصیات طرح‌های نوآور، ارزش مناسبی را برآورد نمی‌کرد. در واقع فاصله کران‌های به دست آمده توسط دیویس و همکارنش برای ارزش‌گذاری طرح‌های نوآور به قدری بزرگ بود که عملا کمک به تسبت کمی در تخمین ارزش آن‌ها داشت. بنابراین روش جدیدی در این پژوهش ارائه گردید که بدون اضافه کردن فرض جدیدی فاصله کران‌های ارزش‌گذار طرح نوآور به نحوی کوچک کرد که کارایی بسیار زیادی در ارزش‌گذاری داشته باشند. در واقع بعضاً فاصله کران بالا و پایین به دست آمده در این پژوهش به نحوی کم است که می‌توان آن را به عنوان ارزش دقیق در نظر گرفت.

برای اثبات این ادعا (برتری کران به دست آمده در این پژوهش نسبت به کران مشابه که به وسیله دیویس و همکارانش به دست آمد) نیاز به داده‌های واقعی داشتیم. به دلیل در دسترس نبودن داده‌های مورد نظر، از شبیه‌سازی عددی استفاده کرده و همراه با محاسبات کران‌های مذکور را مقایسه کردیم. از آنجایی که غیر از مقاله دیویس و همکارانش، مطالعه دیگری با چنین رویکردی وجود نداشت امکان مقایسه بیشتر وجود نداشت. بنابراین با استفاده از یک روش عددی دیگر تحت عنوان حداقل مربعات، ارزش طرح نوآور را تخمین زده[۱۶] و با مقایسه نتایج بر کران‌های هر دو روش (روش دیویس و روش ارائه شده در این پژوهش) صحه گذاشته شد.

در واقع با نتایج عددی نشان داده شد که فاصله کران‌های ارائه شده در این پژوهش برای ارزش‌گذاری طرح-های نوآور مناسبتر است چرا که این فاصله به مقدار قابل توجهی کوچک شده است و می‌تواند تخمین بهتری از ارزش طرح نوآور ارائه دهد. می‌توان نتایج این پژوهش را با تحقیقات زیر بهبود بخشید.

پیشنهادات زیر برای تحقیقات آتی توصیه می‌شود:

۱) می‌توان با توجه به استراتژی پوشش ریسک در دو حالت ثابت و پویا به بررسی کران به دست آمده جدید پرداخت و کارایی آن را در عمل به دست آورد. مقاله دیویس و همکارانش سال ۲۰۰۰ تحت عنوان ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی تحت شرایط عدم آربیتراژ می‌تواند راهگشا باشد.

۲) در ارزش‌گذاری طرح‌ها، وجود شرکت مشابه با هم بستگی کامل ($\rho=1$) یکی از فرضیات اساسی بود. می توان کران‌های بدون آربیتراژ را وقتی که یک چنین شرکتی با همبستگی کامل وجود ندارد، بررسی کرد.

۳) اگر اختیار مشابه در پورتفوی شرکت رقیب وجود داشته باشد، می توان فرض کرد که تاثیری بر ارزش اختیار پورتفوی طرح ندارد. اما بران و بیسون نشان دادند که این فرض درست نیست. پس می توان با

کنار گذاشتن این فرض به ارزش گذاری ها پرداخت. یعنی ارزش طرح‌های مشابه که ممکن است به وقوع بپیوندد را به صورت احتمالی در ارزش‌گذاری طرح وارد کرد.

۴) فرض شد که اگر در طرح خطر پذیر وجوه تامین مالی پرداخت نشود طرح باطل می‌شود و هیچ عایدی برای طرفین نخواهد داشت در صورتی که مطمئناً هر طرحی برای اجرایی شدنش دارای مقادیری دارایی (هر چند اندک) است که در صورت انحلال به طرفین می‌رسد. ازین رو می توان عایدی ناشی از انحلال پیش از موعد را در محاسبات، می‌توان به عنوان یک ارزش ذاتی اختیار (در صورت انحلال پیش از موعد) در نظر گرفت. البته ویستاپ اشاره‌ای به این قضیه می‌کند؛ او می گوید می توان در ارزش گذاری تحلیلی اختیار معامله قسطی به جای استفاده از اختیار معامله ساده در سررسید از اختیارات پیچیده استفاده کرد. اما استفاده از این قضیه در مورد طرح های خطر پذیر، کاربردی تر است. پس می توان یک اختیار پیچیده برای عایدات طرح در زمان انحلال در نظر گرفت و به ارزش گذاری طرح پرداخت.

۵) به دست آوردن کران‌ها در شرایط عدم آربیتراژ و وقتی که قیمت سهام دارای پرش است.

۶- فهرست منابع

* احمدی، زهرا (۱۳۹۰)، قیمت‌گذاری ابزارهای مشتقه به کمک روش مونت‌کارلو- کمترین مربعات. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، زنجان: دانشگاه علوم پایه زنجان
* باقری، کامران و محبوبی، جواد (۱۳۸۳)، سرمایه‌گذاری خطرپذیر. تهران: بنیاد توسعه فردا
* حامدی نیا، حامد (۱۳۹۳)، ارزش‌گذاری صندوق سرمایه‌گذاری خطرپذیر با استفاده از اختیار معامله قسطی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، تهران، دانشگاه علوم اقتصادی
* حنیفی، فرهاد (۱۳۹۱)، سرمایه خطرپذیر - ساختارها و کارکردها. تهران: مجله بورس
* رستمی، محمد و صیقلی، محسن (۱۳۹۱)، پاداش ریسک. تهران: انتشارات بورس
* ریاحی، حسین (۱۳۸۵)، مدیریت ریسک در صنعت سرمایه‌گذاری خطرپذیر. تهران: دومین کنفرانس ملی سرمایه‌گذاری مخاطره‌پذیر
* فروش باستانی، علی و حامدی نیا، حامد (۱۳۹۳)، ارزش‌گذاری صندوق سرمایه‌گذاری خطرپذیر با استفاده از اختیار معامله قسطی، تهران، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی: همایش ریاضیات مالی و بیم‌سنجی
* Barola, A. (2013). Monte Carlo Methods for American Option Pricing. Working Paper, Copenhagen Business School.
* Blum, P. (2013). Exploring Best Practice Skills to Predict Uncertainties in Venture Capital Investment. Working Paper, University of Walden. Decision-Making
* Brandimarte, P. (2014). Numerical Methods in Finance and Economics A MATLAB-Based Introduction.New Jersey: Wiley InterScience.
* Ciurlia, P. & Roko, I. (2005). Valuation of American Continuous-Installment Options. Computational Economics 1-2, 143-165.
* Cortazar, G. (2002) .Simulation and Numerical Methods in Real Options Valuation, Working Paper, Pontificia Universidad Católica de Chile.

* Cossin, D & Leleux, B. & Entela, S. (2002). Understanding the Economic Value of Legal Contracts in Investment Contracts: A Real Options Approach to Venture Equity Contracts. Working Paper, HEC, University of Lausanne, Switzerland.
* Davis, A. (1998). Estimating Volatility and Dividend Yield When Valuing Real Options to Invest or Abandon. Quarterly Review of Economics and Finance. Volume 38 (Special Issue), pp 725-754.
* Davis, Mark (2000) .Optimal Hedging with Basis Risk. Working Paper, University of Technology, Vienna.
* Davis, M. & Schachermayer, W. & Tompkins, R. (2001). Pricing, No-arbitrage Bounds and Robust Hedging of instalment Options. Quantitative Finance, Volume 1, Number 6, pp. 597-610.
* Davis, M. & Schachermayer, W. & Tompkins, R (2002) .Instalment Options and Static Hedging. The Journal of Risk Finance, Volume 3, Number 2, pp.46-52.
* Feld, B. & Mendelson, J. (2013). Venture Deal: Be Smarter than your Lawyer and Venture Capitalist. New Jersey: John Wiley and Sons.
* Geske, R. (1979) .The Valuation of Compound Options. Journal of Financial Economics. Volume 7, Number 1 (March), pp. 63-81.
* Griebsch, S & Wystup, U. (2007). Instalment Options: A Closed-Form Solution and the Limiting Case. Mathematical Control Theory and Finance, Springer-Verlag, Berlin, 2008, pp. 211–229.
* Gorman, M. & Sahlman W. (1989) .What do Venture Capitalists Do?. Journal of Business Venturing, Volume 4, pp. 231-248.
* Jagle, J. (1999) .Shareholder Value, Real Options and Innovations in Technology-Intensive Companies. R&D Management, Volume 29, Number 3, pp. 271-287.
* Kaplan, S. & Stromberg, P. (2001) .Financial Contracting Theory Meets the Real World: An Empirical Analysis of Venture Capital Contracts. Working Paper, University of Chicago.
* Kaplan, S. & Stromberg, P. (2002) .Characteristics, Contracts and Actions: Evidence From Venture Capitalist Analyses. Working Paper, University of Chicago.
* Lin, P. (2008). Monte Carlo simulation algorithms for the pricing of American options, Working Paper, University of Oxford.
* Longstaff, F. & Schwartz, E. (2001). Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach. Society for Financial Studies, Vol. IS. No. I, pp. 113-147.
* MacMillan, L & Siegel, R & Subbanarasimha, P (1985) .Criteria used by Venture Capitalists to Evaluate new Venture Proposals. Journal of Business Venturing, Volume 1, pp 119-128.
* Pennings, E. & Sereno, S. (2011). Evaluating pharmaceutical R&D under technical and economic uncertainty, European Journal of Operational Research, 374-385
* Ramsinghani, M. (2011). The Business of Venture Capital.New Jersey: Wiley Finance
* Sahlman, W. (1990) .The Structure and Governance of Venture Capital Organisations. Journal of Financial Economics, Volume 27, pp.473-524.
* Shreve, S. (2004). Stochastic Calculus for Finance 2. NewYork: Springer Science
* Schulmerich, M. (2005). Real Options Valuation: The Importance of Interest Rate Modelling in Theory and Practice, Springer Berlin Heidelberg New York.
* Wystup, U. (2006). FX Options and Structured Products. Wiley Finance.

یادداشت‌ها

[1]. Venture Capital Firms
[2]. Davis & Schachermayer & Tompkins 2000 (DTS)
[3]. Games Theory
[4]. Anti-dilution
[5]. IPO
[6]. Real Options
[7]. Time-to-Build
[8]. Installment Options
[9]. Permium
[10]. Vanilla Option
[11]. Exotic Option

[۱۲] اگر قیمت اختیار از دارایی پایه پیشتر باشد اختیار را می‌فروشیم و دارایی پایه را می‌خریم و مقدار $C(t,T,k)-S_t \geq 0$ موجودی به دست می‌آوریم. در سررسید با دارایی پایه‌ای که در اختیار داریم تعهد اختیار معامله را پوشش می‌دهیم. پس اگر قسمت سمت راست معادله برقرار نباشد شرایط آربیتراژ پیش می‌آید. اگر سمت چپ برقرار نباشد، دارایی پایه را به صورت استقراضی می‌فروشیم و اختیار معامله را می‌خریم و عایدی $S_t - C(t,T,k) \geq k\, e^{-r(T-t)}$ به دست آمده را در با نرخ بهره بدون ریسک سرمایه‌گذاری می‌کنیم. در سررسید ارزش موجودی به بیشتر از k $\geq k\, e^{-r(T-t)} \times e^{r(T-t)} = k$ .. می‌رسد. با استفاده از اختیار معامله‌ای که در اختیار داریم، مقدار k را پرداخت کرده و دارایی پایه را دریافت می‌کنیم، دارایی قرض کرده را پس می‌دهیم و همچنان ارزش سبد ما بزرگتر یا مساوی صفر است پس احتمال کسب سود بدون ریسک وجود دارد.

[13]. Crude Monte Carlo

[۱۴] برای مطالعه بیتشر در مورد نحوه کاربری کردن روش حداقل مربعات در ارزش‌گذاری خطرپذیر به مقاله ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی با استفاده از روش حداقل مربعات و بررسی همگرایی جواب نوشته علی فروش باستانی و حامد حامدی نیا (در دست بررسی) مراجعه شود.

[۱۵] برای مطالعه در مورد انواع هزینه‌های انتشار به کتابچه‌ای با عنوان " هزینه‌های انتشار ممکن است باعث تعجب شما شوند" انتشارات PwC's Deals practice مراجعه شود.

[۱۶]- دینامیک قیمتی استفاده شده در روش حداقل مربعات شبیه به همان دینامیک قیمتی است که برای مقایسه دو روش در نظر گرفته شده است.