فصلنامــه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گــذاری
سال هشتم/ شماره سی‌ودوم/ زمستان ۱۳۹۸

ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی با استفاده از روش عددی حداقل مربعات و بررسی همگرایی جواب

حامد حامدی نیا
دانشجوی دکتری مالی دانشگاه تهران، تهران، ایران (نویسنده مسئول)
hamedinia.hamed@ut.ac.ir

مهدی رضایتی
دانشجوی دکتری مالی دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران
mehdi.rezayati@gmail.com

تاریخ دریافت: ۹۶/۱۰/۰۳ تاریخ پذیرش: ۹۶/۱۲/۱۵

چکیده

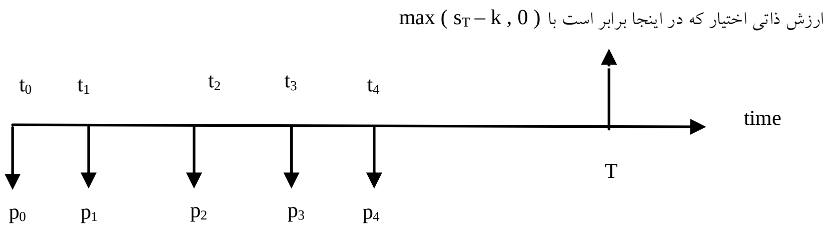
در اختیار معامله قسطی، دارنده اختیار به جای پرداخت یکباره مقادیر اولیه، آن را به صورت قسطی پرداخت می‌کند. اگر همه اقساط پرداخت شوند دارنده، حق اعمال آن را دارد، اما به محض عدم پرداخت هر یک از اقساط، معامله اختیار فسخ شده و تعهدات طرفین از بین می‌رود. در قسمت اول پژوهش به اهمیت اختیار معامله قسطی در دنیای مالی پرداخته شده است؛ ارتباط آن با ارزش‌گذاری صندوق سرمایه‌گذاری خطرپذیر عنوان شده و با بیان چگونگی ارتباط مدل بلک‌شولز با اختیار معامله قسطی، نواقص آن مدل (بلک‌شولز) در ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی ذکر شده است. از آنجایی که ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی به روش دقیق بسیار مشکل و در بسیاری از حالات نشدنی است، روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو با استفاده از حداقل مربعات را برای ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی کاربردی کرده و از آن برای ارزش‌گذاری اختیار مذکور استفاده شده است. در قسمت دوم پژوهش، مقادیر بهینه سه عامل موثر بر این روش یعنی نوع تابع، تعداد متغیرهای پایه و تعداد مسیرهای شبیه‌سازی مورد نیاز، محاسبه شده است؛ به طوری که ارزش روش عددی به ارزش روش دقیق همگرا شود.

واژه‌های کلیدی: اختیار غیرمعمول، اختیار معامله قسطی، شبیه سازی مونت‌کارلو، روش حداقل مربعات.

۱- مقدمه

اختیارهای معامله یکی از ابزارهای مشتقه هستند که برای پوشش ریسک به وجود آمده‌اند و از آن‌جایی که در بازارهای مالی مبادله می‌شوند، ارزش‌گذاریشان حائز اهمیت است. از طرفی ارزش‌گذاری بعضی از اختیارها وقتی اهمیت دوچندان می‌یابد که در بخش واقعی اقتصاد نیز به این ارزش‌گذاری‌ها نیاز پیدا کنیم. یکی از این اختیارها، اختیار معامله قسطی است. اختیار معامله قسطی، اختیاری است که دارنده آن به پرداخت‌های مقادیر اولیه به صورت قسطی (و نه یک‌جا) در طول زمان می‌پردازد و اگر تمامی پرداخت‌ها انجام شد، دارنده، حق دارد اختیار را اعمال کند و در صورتی که هر یک از پرداخت‌ها انجام نشود، اختیار معامله فسخ شده و تعهد طرفین از بین خواهد رفت.

به عنوان مثال شکل (۱) یک اختیار قسطی ۵ مرحله‌ای از نوع اروپایی را نشان می‌دهد.



شکل ۱- اختیار معامله قسطی ۵ مرحله ای با ارزش ذاتی اختیار ساده اروپایی

خریدار اختیار در زمان حال t_0 (زمان فعلی) مبلغ P_0 را پرداخت کرده و قرارداد منعقد می‌شود. سپس در زمان‌های t_1 تا t_4 اگر مقادیر P_1 تا P_4 را پرداخت کند، در زمان سررسید ($t_5 = T$) مقدار ارزش ذاتی اختیار را دریافت می‌کند (در این مورد به خصوص فرض شده است که دارنده، ارزش ذاتی اختیار ساده اروپایی را دریافت کند که البته می‌تواند غیر این باشد). به وضوح مشخص است که اگر هر یک از پرداخت‌ها انجام نشود، اختیار معامله فسخ شده و تعهدات فروشنده از بین می‌رود. اختیار توضیح داده شده، شبیه به سرمایه‌گذاری‌های مرحله‌ای است؛ به این صورت که شرکت‌های مخاطره‌پذیر سرمایه‌گذاری بر روی طرح یا شرکت سرمایه‌پذیر را به صورت مرحله‌ای انجام می‌دهند. در شروع به کار سرمایه اولیه پرداخت شده و با گذشت زمان در صورتی که شرایط خاصی رعایت شده بود، سرمایه‌گذاری بعدی را انجام خواهند داد. در سررسید با هزینه انتشاری معادل k، سهام شرکت را به صورت عرضه اولیه وارد بورس کرده و S_t را که قیمت شرکت است، دریافت می‌کند. طبیعتاً اگر هر یک از سرمایه‌گذاری‌ها انجام نشود، شرکت به سررسید نخواهد رسید و سرمایه‌گذاری‌های انجام شده از بین می‌رود. بنابراین اگر بتوان ارزش اختیار معامله قسطی را به دست آورد، می‌توان ارزش طرح‌های (شرکت‌های) نوپا را که شرکت‌های مخاطره‌پذیر روی آن سرمایه‌گذاری می‌کنند، به دست آورد[1].

بنابراین یکی از موارد حائز اهمیت در ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی، هم‌سو بودن آن برای ارزش‌گذاری شرکت‌های استارت‌آپی و نوپا است.

اهمیت دیگر ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی به مقاله قدیمی ارزشگذاری سهام به وسیله اختیار مرکب باز می‌گردد. در مقاله مذکور جسکه نشان داد که ارزش سهام شرکت‌ها از یک اختیار مرکب (حالت دو مرحله‌ای اختیار معامله قسطی) به دست می‌آید. همچنین ثابت کرد که فرم بسته جواب اختیار معامله که با استفاده از فرمول بلک-شولز به دست می‌آید، فقط تحت شرایط خاصی به عنوان جواب صحیح در نظر گرفته می‌شود. بنابراین لازم است از روش‌های عددی برای ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی استفاده شود. این مورد در بخش دوم و در قسمت مرور ادبیات بیشتر توضیح داده خواهد شد.

اهمیت دیگر اختیار معامله قسطی به ذات قسطی بودن آن بر می‌گردد که جذابیت خاصی برای سرمایه‌گذارانی دارد که از عهده پرداخت یک‌جای مقدار اولیه بر نمی‌آیند.

به دست آوردن ارزش دقیق اختیار معامله، همواره با پیچیدگی‌های زیادی همراه بوده است. اگرچه اختیار ساده اروپایی، اختیار بازگشت و ... به صورت دقیق ارزش‌گذاری شده‌اند اما اولاً تعداد آن‌ها انگشت شمار بوده است، ثانیاً ارزش آن‌ها تحت فروض خاصی مانند پیروی قیمت سهام از حرکت براونی هندسی به دست آمده است که به هیچ عنوان فرض معقولی نیست و چه بسا علم ریاضیات مالی آن را رد کرده است و از روش‌های جایگزین مانند حرکت با پرش، تغییرات رژیم و ... استفاده می‌کند. همین دو عامل باعث می‌شود نتوان به ارزش دقیق به دست آمده اکتفا نمود و نیاز به محاسبه ارزش اختیار مورد نیاز با استفاده از روش‌های عددی است. روش‌های عددی، روش‌هایی هستند که جواب ابزار مشتقه را با تقریب خوبی به دست می‌آورند و به سه گروه کلی زیر تقسیم می‌شوند:

۱) روش‌های دوجمله‌ای و سه جمله‌ای
۲) روش تفاضلات متناهی
۳) روش‌های مبتنی به شبیه‌سازی مونت‌کارلو
- درخت تصادفی
- روش بافت تصادفی
- روش کمترین مربعات خطا یا روش لانگ اشتاف – شوارتز

دراین بین، روش‌های مبتنی بر شبیه‌سازی مونت‌کارلو به دلیل سادگی و کارایی قابل توجه، بیشتر مورد استقبال واقع شده است. در بین روش‌های مبتنی بر شبیه‌سازی مونت‌کارلو نیز، روش کمترین مربعات قدرت قابل توجهی دارد.

در بخش‌های آینده نحوه کاربردی کردن روش حداقل مربعات برای ارزش‌گذاری اختیار معامله را به تفصیل شرح خواهیم داد.

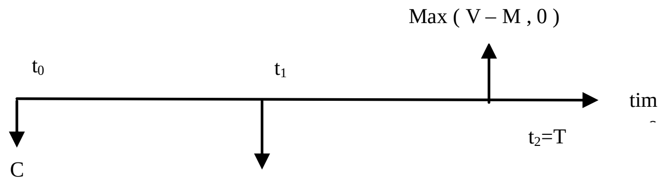
در بخش دوم به بیان ادبیات موضوع خواهیم پرداخت. در فصل سوم نحوه کاربردی کردن روش حداقل مربعات شرح داده می‌شود و به بیان فرضیه تحقیق برای تعمیم نتایج می‌پردازیم. همچنین در مورد پارامترهای

روش حداقل مربعات، به تفصیل بحث خواهیم کرد چرا که در فصول آتی مورد نیاز خواهد بود. در فصل چهارم در مورد ابزار تصمیم‌گیری جهت انتخاب مقادیر بهینه با توجه به کاهش معیار خطا و همچنین تعیین حداقل مقادیر لازم برای این که جواب عددی به سمت جواب دقیق همگرا شود، بحث خواهد شد. در نهایت در فصل پنج به ارائه خلاصه و نتیجه‌گیری می‌پردازیم و راه‌کارهایی برای تحقیقات آتی ارائه می‌شود.

۲- پیشینه پژوهش

ادبیات موضوع در زمینه ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی به دو دسته کلی تقسیم می‌شود. دسته اول مربوط به بیان اختیار قسطی و روش‌های ارزش‌گذاری آن می‌شود. دسته دوم مربوط به استفاده از اختیار معامله قسطی جهت ارزش‌گذاری طرح سرمایه‌گذاری خطرپذیر است.

جسکه اولین بار موضوع اختیار معامله دو مرحله‌ای (اختیار مرکب) را مطرح کرده و به ارزش‌گذاری آن در شرایطی که قیمت سهام از حرکت براونی هندسی تبعیت کند، پرداخته است.



شکل ۲- تفسیر اختیار معامله ساده اروپایی به عنوان اختیار معامله قسطی دو مرحله ای یا اختیار مرکب

M : ارزش نهایی بدهی‌های شرکت

V : ارزش بازاری شرکت

K : قیمت اعمال اختیار معامله

C : قیمت اولیه اختیار معامله

در زمان t_0، خریدار با پرداخت مبلغ C اختیار معامله را روی سهم X به دست می‌آورد. در زمان t_1 می‌تواند با پرداخت قیمت اعمال (K)، سهم مورد نظر را به دست آورد. از نقطه نظر تئوریک، قیمت سهام برابر است با ارزش نهایی شرکت در زمان فروش سهام منهای ارزش نهایی بدهی‌ها در زمان فروش (t_2). بنابراین در هر زمانی مانند t_2 (زمان فروش سهام) قیمت سهام به صورت $Max(V-M,0)$ است (چون خریدار اختیار معامله سهام-داری با شراکت محدود است، به این معنی که اگر بدهی شرکت از ارزش آن بیشتر باشد قیمت آن برای سهام‌دار با شراکت محدود، صفر بوده و منفی نخواهد شد).

همان‌طور که از شکل ۲ مشخص است این حالت شبیه به اختیار معامله قسطی دو مرحله‌ای است. جسکه نشان داد که اگر شرکت بدهی نداشته باشد و یا زمان فروش سهام (t_2) خیلی طولانی باشد (به سمت بی‌نهایت میل کند) فرمول ارزش‌گذاری بلک-شولز صحیح است در غیر این صورت باید از ارزش‌گذاری اختیار دو مرحله‌ای

(مرکب) استفاده کرد. جسکه هم‌چنین ثابت کرد فرض ثبات ریسک، در این حالت برقرار نیست. به عبارت دیگر عدم صحت یکی از فروض اساسی بلک–شولز که ثابت فرض کردن نوسان است، عملاً در این رویکرد تایید نمی-شود. همان‌طور که گفته شد این مورد نیز یکی از دلایل نیاز مبرم به ارزش‌گذاری عددی اختیار معامله قسطی است.

پس از ارزش‌گذاری دقیق اختیار قسطی دو مرحله‌ای به وسیله جسکه، تلاش‌ها برای ارزش‌گذاری دقیق اختیار معامله قسطی چند مرحله‌ای تا سال ۲۰۰۲ بی‌نتیجه ماند. تنها چند روش ارزش‌گذاری عددی مثل روش دوجمله‌ای مورد استفاده قرار گرفتند که کارایی لازم را نداشتند. در سال ۲۰۰۲ دیویس و همکارانش فقط با تکیه بر فرض عدم وجود آربیتراژ در بازارهای مالی (که البته در دنیای واقعی نیز فرض تقریباً معقولی است)، موفق شدند برای ارزش اختیار معامله قسطی چند مرحله‌ای، کران بالا و پایینی به دست آورند به طوری که اگر ارزش اختیار در محدوده این کران‌ها قرار نگیرد، شرایط آربیتراژ به وجود می‌آید.

آرمر با استفاده از یک برنامه‌ریزی پویا به محاسبه اختیار معامله قسطی پرداخته است. سرلیا یک پوشش ریسک پویا تشکیل داده و با استفاده از معادله دیفرانسیل تصادفی بلک شولز به ارزش‌گذاری اختیار معامله آمریکایی پرداخته است. در نهایت ویستاپ و همکارش در سال ۲۰۰۷ ارزش دقیق اختیار معامله قسطی چند مرحله‌ای را به دست آورده اند. کیمورا اختیار معامله قسطی آمریکایی، روی سهامی که سود پرداخت می‌کند را محاسبه نموده است. و در نهایت فروش باستانی و حامدی‌نیا (۲۰۱۵) کران‌های محاسبه شده توسط دیویس و همکارانش را بهبود دادند.

ممکن است این سوال مطرح شود که اگر جواب دقیق اختیار معامله قسطی چند مرحله‌ای به دست آمده است دیگر چه نیازی به استفاده از روش‌های عددی است؟ همان‌طور که قبلاً گفته شد پاسخ در فروضی نهفته است که روش‌های دقیق استفاده می‌کنند. تمامی این روش‌ها بر اساس فرض نادرست تبعیت قیمت سهام از حرکت براونی هندسی هستند که تحقیقات آکادمیک به طور قاطع این فرض را رد کرده‌اند. به هر جهت نیاز داریم برای ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی از فروضی دقیق‌تر در حرکت قیمت سهام مانند حرکت قیمتی سهام با پرش، تغییرات رژیم و ... استفاده کنیم. در صورت استفاده از این روش‌ها، به طور قطع ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی به طور دقیق قابل حصول نیست. از طرف دیگر موضوع وقتی بغرنج‌تر می‌گردد که اختیار معامله، از نوع آمریکایی باشد؛ در این صورت حتی با فرض GBM (حرکت براونی هندسی) بودن حرکت قیمت سهام، امکان برآورد ارزش تحلیلی و دقیق وجود ندارد. همان‌طور که گفته شد روش‌های عددی به خصوص شبیه‌سازی مونت‌کارلو چاره حل این مشکلات است.

از انواع روش‌های عددی مبتنی بر شبیه‌سازی، روش حداقل مربعات کارایی بالاتری دارد. لانگ اشتاف – شوارتز آن را در سال ۲۰۰۰ ابداع کرده و از آن برای ارزش‌گذاری اختیار معامله آمریکایی استفاده کرده‌اند. مشکل این‌گونه روش‌ها همگرایی آن است که گلاسرمن و همکارش به صورت ریاضی به اثبات همگرایی آن برای اختیار معامله آمریکایی پرداخته‌اند. یکی از رویکردهای این پژوهش بررسی همگرایی روش حداقل مربعات برای اختیار معامله قسطی است.

در واقع زمانی که ارزشگذاری اختیار معامله به روش تحلیلی (اصطلاحاً *فرم بسته*) بسیار سخت و گاهی ناشدنی باشد، استفاده از روش‌های عددی چاره‌ساز است. این روش‌ها دارای پارامترهای متعدد هستند که در ارزش‌گذاری نهایی تاثیرگذار هستند. هدف بسیاری از بهینه کردن روش‌های عددی بوده است به نحوی که خطای این روش‌ها حداقل گردد. به عبارت دیگر از روش عددی خاصی برای ارزشگذاری اختیاری که جواب تحلیلی آن را دارند استفاده کرده و پارامترهای تاثیرگذار بر روش عددی را به نحوی تعیین می‌کنند که جواب عددی به جواب تحلیلی نزدیک شود (در واقع پارامترها را طوری تعیین می‌کنند که مقدار خطا یا اختلاف بین ارزش عددی و ارزش تحلیلی کمینه شود)؛ سپس از پارامترهای تخمین زده شده برای ارزشگذاری اختیاری پیچیده‌تر که جواب تحلیلی آن مشخص نیست، استفاده می‌کنند.

به عنوان مثال ارزشگذاری اختیار معامله آمریکایی به روش‌های تحلیلی امکان‌پذیر نبوده است (حداقل تا زمان نگارش این مقاله) و تنها روش‌های عددی کارساز است. یکی از روش‌های مناسب عددی، روش حداقل مربعات (لانگ اشتاف-شوارتز) است. در ادامه راجع به عوامل و ساز و کار روش حداقل مربعات به تفصیل بحث خواهد شد اما در این قسمت به ذکر همین نکته بسنده می‌کنیم که در استفاده از این روش سه پارامتر وجود دارد که تخمین متفاوت آن‌ها منجر به ارزش‌گذاری‌های متفاوت می‌شود. بنابراین تعیین مناسب پارامترها، سوال اصلی و مهم در استفاده از روش عددی می‌باشد.

یک راه‌حل منطقی این است که روش عددی حداقل مربعات را برای ارزشگذاری اختیار معامله اروپایی (که جواب تحلیلی و دقیق آن را می‌دانیم) به کار برده و پارامترها را به نحوی تعیین کنیم که ارزش تخمین زده شده به ارزش تحلیلی نزدیک شود. در این صورت می‌توان از همان پارامترهای تخمین زده شده برای ارزشگذاری اختیار معامله اروپایی استفاده کرد. این راه‌حل برای ارزشگذاری اختیار معامله آمریکایی به روش عددی حداقل مربعات در تحقیقات پیشین مورد استفاده قرار گرفته است. به دست آوردن مقادیر بهینه پارامترها به ترتیب ذکر شده، برای اختیار معامله قسطی در این پژوهش بررسی شده است.

۳- روش‌شناسی پژوهش و کاربردی کردن روش حداقل مربعات

همان‌طور که گفته شد لانگ اشتاف – شوارتز، روشی مبتنی بر رگرسیون و شبیه‌سازی مونت‌کارلو ابداع کرده و از آن برای ارزش‌گذاری اختیار معامله امریکایی استفاده کرده‌اند. ابتدا به بیان روش حداقل مربعات برای اختیار معامله آمریکایی پرداخته[۲] و در ادامه نحوه کاربردی کردن روش مذکور را برای اختیار معامله قسطی شرح می‌دهیم.

۳-۱- روش حداقل مربعات برای اختیار معامله آمریکایی

در مواجهه با اختیار آمریکایی مهم‌ترین مشکل شناخت زمان اعمال اختیار است. طبق متون مالی بهینه‌ترین استراژی مقایسه قیمت آنی اختیار و ارزش آتی مورد انتظار است و در صورتی که ارزش آتی مورد انتظار کمتر از ارزش آنی آن باشد، اختیار را اجرا می‌کنیم. اما به دست آوردن ارزش آتی مورد انتظار ساده نیست. در روش

دوجمله‌ای این ارزش مورد انتظار، از تنزیل عایدی اختیار در پایان دوره بعد (البته تحت اندازه احتمال ریسک خنثی) به دست می‌آید. در روش بافت تصادفی، این ارزش با میانگین گرفتن از تمامی عایدات آتی به دست می‌آید و در روش درخت تصادفی با میانگین گرفتن از اعدادی که در هر مرحله شبیه‌سازی می‌شود. همه روش‌های ارائه شده به نوعی این مقایسه را انجام می‌دهند و روش حداقل مربعات از رگرسیون عایدات آتی استفاده می‌کند. البته فهم این روش‌ها به سادگی بیان آن‌ها نیست و همگرایی هر روش که به صورت ریاضی قابل اثبات است جنبه‌ای به مراتب مهم‌تر دارد.

به هر حال از بین روش‌های موجود، روش حداقل مربعات، به دلیل انعطاف بالا در ارزش‌گذاری انواع اختیارهای پیچیده و حجم محاسبات پایین مورد استقبال جوامع آکادمیک قرار گرفته است. اگر قیمت دارایی پایه را S_t تابع پرداخت عایدی را $P(S_t,t)$ فرض کنیم، استراتژی بهینه در زمان t_i به صورت زیر است:

$$Exercise = \begin{cases} Yes & if\ \ P\left(S_{t_i},t_i\right) > E_{t_i}[P\left(S_{t_{i+1}},t_{i+1}\right)|F_{t_i}] \\ No & if\ \ P\left(S_{t_i},t_i\right) < E_{t_i}[P\left(S_{t_{i+1}},t_{i+1}\right)|F_{t_i}] \end{cases}$$ رابطه(۱)

که $E_{t_i}[P(S_t,t)|F_{t_i}]$، امید ریاضی عایدی تنزیل شده تحت اندازه احتمال ریسک خنثی است و F_t را اصطلاحاً فیلتریشن می‌نامند که به بیان ساده‌تر همان اطلاعات در دسترس تا زمان t است. همان‌طور که مشخص است برای تصمیم‌گیری راجع به اعمال کردن یا نکردن اختیار، نیاز به برآورد امید ریاضی داریم. روش حداقل مربعات برای این تخمین به شرح زیر است:

با استفاده یک روش دلخواه به تولید M مسیر تصادفی برای قیمت سهام می‌پردازیم (هر مسیر تصادفی شامل N گام گسسته است (در واقع طبق معمول زمان را به N گام تقسیم می‌کنیم). برای هر مسیر، احتیاج داریم که عایدات آتی را روی یک تابع پایه برازش کنیم. اگر تنزیل شده عایدات آتی را با Y و تابع پایه را با $(1,F_1(\mathrm{s}),F_2(\mathrm{s}))$ نماش دهیم، داریم:

$$E[Y|s] = a + bF_1(\mathrm{s}) + cF_2(\mathrm{s})$$ رابطه (۲)

رابطه (۲) برآوردی از ضرایب را به دست می‌دهد. حال اگر قیمت سهام را در رابطه بالا جای‌گذاری کنیم ارزش آنی یا عدم اجرا اختیار به دست می‌آید و با استفاده از رابطه (۱) نسبت به اجرا یا عدم اجرا تصمیم می‌گیریم. این فرایند برای هر گام به صورت بازگشتی تکرار می‌شود و در نهایت برای هر مسیر عایدی اختیار را تنزیل کرده و از M ارزش به دست آمده، میانگین می‌گیریم که این مقدار معادل ارزش اختیار آمریکایی است.
همان‌طور که ملاحظه گردید توابع خاصی برای روش حداقل مربعات مورد احتیاج است. بنابراین قبل از این‌که به کاربردی کردن این روش برای اختیار معامله قسطی بپردازیم، انواع توابع قابل استفاده را تعریف می‌نماییم.

۳-۲- معرفی توابع پایه

چهار نوع پرکاربرد توابع پایه که در روش حداقل مربعات استفاده شده است عبارتند از:

چند جمله‌ای ساده $F_k(x) = \sum_{i=1}^{k} x^{i-1}$

چندجمله‌ای لاگورا با وزن e^{-x} $L_k(x) = \frac{e^x}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^k e^{-x})$

چند جمله‌ای چبیشف با وزن $(1-(2x-1)^2)^{-0.5}$ $T_k(x) = \cos(k\, cos^{-1}(2x-1))$

چندجمله‌ای لژاندر با وزن ۱ $P_k(x) = \frac{(-1)^k}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}((1-(2x-1)^2)^k)$

۳-۳- کاربردی کردن روش حداقل مربعات برای اختیار معامله قسطی

ابتدا کلیات مسئله را به صورت ریاضی مدل‌سازی می‌کنیم و سپس با یک مثال عددی به تبیین بهتر مدل خواهیم پرداخت.

همان‌طور که می‌دانیم امکان اجرا کردن اختیار ساده اروپایی قبل از زمان سررسید وجود ندارد؛ اما در اختیار قسطی آمریکایی، این امکان برای دارنده اختیار وجود دارد که در هر یک از زمان‌های مجاز، از ادامه پرداخت اقساط خودداری کند. هر چند در این صورت عایدی کسب شده از اختیار، صفر خواهد بود؛ اما به دلیل عدم پرداخت بقیه اقساط ممکن است این اقدام اقتصادی باشد. از این رو دارنده اختیار با تصمیمی مبنی بر ادامه دادن یا ندادن اختیار معامله مواجه است. او در صورتی ادامه می‌دهد که ارزش آتی مورد انتظار اختیار ($E_{t_i}[P(S_{t_{i+1}}, t_{i+1})|F_{t_i}]$) بیشتر از صفر باشد. یعنی:

$$Terminate = \begin{cases} Yes & if\ \ 0 > E_{t_i}[P(S_{t_{i+1}}, t_{i+1})|F_{t_i}] \\ No & if\ \ 0 < E_{t_i}[P(S_{t_{i+1}}, t_{i+1})|F_{t_i}] \end{cases}$$ رابطه(۳)

شبیه به حالت اختیار اروپایی معمولی به تولید M مسیر تصادفی برای قیمت سهام (هر مسیر شامل N گام است که تعداد مراحل اختیار قسطی است) می‌پردازیم. مطابق روش قبل، قیمت سهام را با استفاده از یک تابع پایه ($(1, F_1(\mathrm{s}), F_2(\mathrm{s}))$) روی ارزش آتی مورد انتظار y برازش می‌کنیم که در آن $y = e^{-rz}\, E_Q[V] \sum_{i>z} e^{-ri} P_1$ است. در واقع y برابر است با ارزش عایدی آتی مورد انتظار منهای اقساطی که قرار است در آینده پرداخت شود. پس داریم:

$$E[Y|s] = a + bF_1(\mathrm{s}) + cF_2(\mathrm{s})$$ رابطه (۴)

ضرایب را برآورد کرده و با قرار دادن قیمت سهام در رابطه مورد نظر، ارزش عدم اجرا آنی (یا ارزش مورد انتظار آتی و یا ارزش ادامه) به دست می‌آید که می‌توان با توجه به رابطه (۳) نسبت به فسخ کردن یا ادامه دادن قرارداد اقدام کرد. در نهایت پس از طی کردن یک رابطه بازگشتی، به جدولی از عایدات و زمان کسب آن عایدات می‌رسیم. با تنزیل کردن هر عایدی و کسر کردن پرداخت‌های انجام شده تا آن زمان و میانگین‌گیری روی تمامی مسیرها، ارزش اختیار قسطی به دست می‌آید.

لانگ اشتاف-شوارتز برای اختیار ساده آمریکایی در هر زمان، فقط قیمت سهام‌هایی را وارد محاسبات کردند که اختیار در آن‌ها با قیمت است و ادعا کردند این حالت تخمین بهتری نسبت به حالتی که تمام قیمت‌ها وارد محاسبات شوند، می‌دهد. ما نیز در قسمت ارائه مثال عددی فقط قیمت‌هایی را بررسی کرده‌ایم که ارزش اختیار در آن‌ها، بی‌قیمت است (چرا که هدف در اینجا تصمیم برای فسخ کردن قرارداد است). با مقایسه‌ای که نویسندگان در پژوهش‌های قبل انجام داده‌اند متوجه شده‌اند که این حالت تخمین بهتری از ارزش اختیار قسطی (هر چند خیلی اندک) نسبت به حالتی که تمام قیمت‌ها را وارد محاسبات کنیم، ارائه می‌دهد.

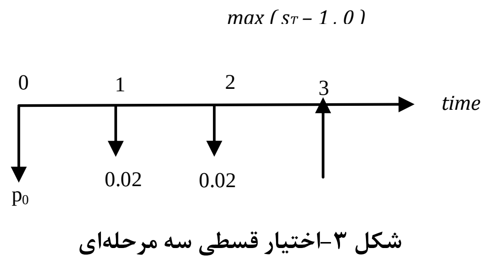
دقت شود در این روش از شبیه‌سازی مونت‌کارلو مبتنی بر حرکت براونی استفاده شده است؛ در صورتی که فرض GBM بودن قیمت سهام اجباری نیست و می‌توان از انواع حرکت قیمتی سهام که فروض واقعی‌تر را در پی دارد، استفاده کرد. نکته مهم در استفاده از این روش سه متغیر اساسی زیر است.

۱) نوع تابع پایه

۲) تعداد متغیرهای پایه

۳) تعداد مسیرهای شبیه‌سازی شده

متاسفانه افزایش در تعداد متغیرهای پایه و تعداد مسیرهای شبیه‌سازی شده لزوماً به کارایی جواب، نمی-افزاید. لانگ اشتاف-شوارتز تابع لاگورا با ۳ متغیر پایه و شبیه‌سازی ۱۰۰،۰۰۰ مسیر مختلف را برای ارزش-گذاری اختیار آمریکایی مناسب دانسته‌اند و گلاسرمن-یو نشان دادند که اگر رابطه خاصی بین تعداد متغیرهای پایه و تعداد مسیرهای شبیه‌سازی شده برقرار باشد، ارزش عددی به سمت ارزش دقیق، همگرا می‌شود. در مورد مقادیر بهینه و روابطی که منجر به همگرایی در اختیار قسطی می‌شود در فصل ۴ مفصلاً بحث خواهیم کرد. حال با ذکر یک مثال به کاربردی کردن این روش برای اختیار معامله قسطی می‌پردازیم.



شکل ۳-اختیار قسطی سه مرحله‌ای

۳-۴- مثال عددی

مطابق شکل(۳) اختیار معامله قسطی با قیمت اولیه $S_0 = 100\$$ ، زمان تا سررسید $T = 3$ که در هر از زمان‌های ۱و۲ پرداختی معادل $P_1 = 0.02\$$ انجام می‌شود، قیمت اعمال در سررسید $k = 0.95\$$ و نرخ بهره بدون ریسک $r = 5\%$ را در نظر بگیرید. برای حل $M = 8$ مسیر تصادفی قیمت تولید می‌کنیم. فرض کنید تابع پایه چند جمله‌ای ساده با تعداد ۳ پایه است $\{1, x, x^2\}$. جدول زیر اعداد تصادفی تولیدی جهت شبیه‌سازی قیمت سهام را نمایش می‌دهد.

جدول ۱- اعداد تصادفی تولید شده با استفاده از حرکت براونی هندسی (GBM)

Number	t=0	t=1	t=2	t=3
1	1.00	1.22	1.29	1.12
2	1.00	1.23	1.16	1.10
3	1.00	0.83	0.92	0.78
4	1.00	1.07	0.74	0.66
5	1.00	0.92	0.81	1.04
6	1.00	0.91	0.89	0.87
7	1.00	0.74	0.52	0.60
8	1.00	0.87	0.58	0.50

در زمان ۳ ارزش ذاتی اختیار برابر است با: $Max(S_t - k, 0)$

جدول ۲- ارزش ذاتی یا عایدی اختیار در زمان ۳ با توجه به جدول اعداد تصادفی و قیمت اعمال ۱

Number	t=1	t=2	t=3
1	-	-	0.12
2	-	-	0.09
3	-	-	0.00
4	-	-	0.00
5	-	-	0.04
6	-	-	0.00
7	-	-	0.00
8	-	-	0.00

در زمان ۲ فقط قیمت‌هایی را بررسی می‌کنیم که ارزش اختیار در آن‌ها بی‌قیمت است؛ بنابراین داریم:

جدول ۳- زمان۲ : داده‌هایی که اختیار را بی قیمت می‌کنند

Number	S	Y
1	-	-
2	-	-
3	0.92	0.00*0.9512-0.02=-0.0200
4	0.74	0.00*0.9512-0.02=-0.0200
5	0.81	0.04*0.9512-0.02=0.0163
6	0.89	0.00*0.9512-0.02=-0.0200
7	0.52	0.00*0.9512-0.02=-0.0200
8	0.58	0.00*0.9512-0.02=-0.0200

تخمین رگرسیون با استفاده از رابطه (۴):

$$E[Y|S] = -0.2257 + 0.5927\, S - 0.3996\, S^2$$

مقایسه ارزش عدم فسخ و فسخ اختیار با استفاده از رابطه (۳):

جدول ۴- مقایسه ارزش فسخ (Exercise) و یا عدم فسخ یا ارزش ادامه

Number	Exercise	Continue
1	-	-
2	-	-
3	0	-0.0180
4	0	-0.0052
5	0	-0.0068
6	0	-0.0141
7	0	-0.0246
8	0	-0.0151

مشاهده می‌شود در هر شش مسیر فسخ قرارداد در زمان ۲ مقرون به صرفه است جدول عایدی در جدول (۵) به روز شده است.

جدول ۵- درآمد یا عایدی اختیار در زمان ۳ و ۲ . علامت ستاره نشان‌دهنده اعمال در آن زمان است.

Number	t=1	t=2	t=3
1	-	0.00	0.12*
2	-	0.00	0.09*
3	-	0.00*	0.00
4	-	0.00*	0.00
5	-	0.00*	0.00
6	-	0.00*	0.00
7	-	0.00*	0.00
8	-	0.00*	0.00

در زمان ۱ قیمت‌هایی که اختیار را بی‌قیمت می‌کنند، بررسی می‌کنیم:

جدول ۶- زمان ۱: قیمت‌هایی که اختیار را بی‌قیمت می‌کنند و تنزیل شده عایدات آتی

Number	S	Y
1	-	-
2	-	-
3	0.83	0.00*0.95122-0.02-0.9512*0.02=-0.0390
4	-	-
5	0.92	0.00*0.95122-0.02-0.9512*0.02=-0.0390
6	0.91	0.00*0.95122-0.02-0.9512*0.02=-0.0390
7	0.74	0.00*0.95122-0.02-0.9512*0.02=-0.0390
8	0.87	0.00*0.95122-0.02-0.9512*0.02=-0.0390

مقایسه ارزش عدم فسخ و فسخ اختیار:

جدول ۷- زمان ۱: مقایسه ارزش فسخ قرارداد و عدم فسخ یا ارزش اجرا

Number	Exercise	Continue
1	-	-
2	-	-
3	0	-0.0390
4	-	-
5	0	-0.0390
6	0	-0.0390
7	0	-0.0390
8	0	-0.0390

جدول عایدات کلی به صورت زیر است: (ستاره محل فسخ یا اجرای اختیار است)

جدول ۸- عایدات کلی اختیار که به ازای هر مسیر مشخص شده است. به عنوان مثال ارزش اختیار در مسیر ۱، با قیمت ۰,۱۲ در زمان اجرای آن زمان ۳ است، مشخص شده است.

Number	t=1	t=2	t=3
1	0.00	0.00	0.12*
2	0.00	0.00	0.09*
3	0.00	0.00	0.00
4	0.00	0.00*	0.00
5	0.00*	0.00	0.00
6	0.00*	0.00	0.00
7	0.00*	0.00	0.00
8	0.00*	0.00	0.00

با میانگین‌گیری از تنزیل شده عایدات، ارزش اختیار قسطی به دست می‌آید که برای مثال فوق، این مقدار برابر با ۰/۰۱۱۳ می‌باشد. به همان روش قبل می‌توان فاصله اطمینان $(1-a)\%$ به دست آورد. این فاصله ۹۵% برای مثال فوق عبارت است از: (که البته با افزایش تعداد مسیرهای شبیه‌سازی این فاصله کاهش می‌یابد)

$$0.0113 - 1.96 * \frac{0.0280}{\sqrt{8}} < \mu < 0.0113 + 1.96 * \frac{0.0280}{\sqrt{8}}$$

۴- یافته‌های پژوهش

همان‌طور که گفته شد روش حداقل مربعات (لانگ اشتاف-شوارتز) اگرچه روش بسیار مناسبی در ارزش‌گذاری انواع اختیار می‌باشد اما سه عامل تاثیرگذار، ارزش‌گذاری آن را با ابهام مواجه می‌کند و چه بسا همگرایی آن به جواب دقیق را مورد تردید قرار دهد. بنابراین در این فصل با تکیه بر مقایسه جواب‌های عددی به دست آمده از روش حداقل مربعات به ازای سه عامل تاثیرگذار (نوع پایه – تعداد متغیر پایه – تعداد مسیرهای شبیه‌سازی شده) و جواب دقیق، تلاش می‌شود مقادیری بهینه برای ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی، به دست آوریم. اما برای مقایسه باید جواب دقیق را بدانیم. همان‌طور که گفته شد جسکه و ویستاپ به ارزش‌گذاری دقیق اختیار معامله قسطی، البته تحت فرض GBM بودن حرکت سهام پرداختند.

یک بار دیگر تاکید می‌کنیم که ممکن است این ابهام پیش آید که اگر جواب دقیق اختیار قسطی وجود دارد، حتی نیازی به استفاده از روش‌های عددی تقریباً دقیق هم وجود ندارد تا چه برسد به این‌که مقادیر بهینه برای همگرایی محاسبه شود؟! پاسخ این ابهام در استفاده روش‌های دقیق از فروض بلک-شولزی، مخصوصاً پیروی حرکت سهام از حرکت براونی هندسی (GBM) است؛ همان‌طور که می‌دانیم عدم صحت این روش در پژوهش‌های علمی تایید شده است. بنابراین روش عددی حداقل مربعات که هیچ فرضی در مورد حرکت قیمت سهام ندارد، می‌تواند بسیار مفید باشد.

به هر صورت برای این‌که مقایسه مذکور بین روش عددی و روش دقیق را بررسی کنیم، باید شبیه‌سازی مسیر سهام را با فرض تبعیت قیمت سهام از حرکت براونی هندسی انجام دهیم چرا که تنها تحت این فرض است که مقدار دقیق به دست آمده است. از نتایج به دست آمده می‌توان مقدار بهینه سه عامل بیان شده را به دست آورد و از آن پارامترها برای ارزش‌گذاری عددی اختیارهای قسطی پیشرفته‌تر استفاده کرد. لازم به ذکر است که در ارزش‌گذاری طرح سرمایه‌گذاری خطرپذیر - یکی از استفاده‌های اختیار معامله قسطی است- نشان داده شده است که از یک طرف، حرکت قیمت این‌گونه طرح‌ها دارای پرش است و از طرف دیگر معمولاً ارزش نهایی آن‌ها به صورت ارزش ساده اروپایی نیست. بنابر دو دلیل فوق استفاده از روش جسکه و ویستاپ را در عمل با مشکل مواجه می‌کند. اما با داشتن یک روش عددی مطمئن (روش حداقل مربعات) به طوری که پارامترهای آن با روش ذکر شده بهینه گردد، می‌توان بر این مشکل فائق آمد.

برای مقایسه احتیاج به یک سنگ محک است که معیار خطای زیر انتخاب شده است.

رابطه (۶) $RMSE = E_P(P_{lsm}) - P$

در رابطه (۶)، P_{lsm} بیانگر مقادیر به دست آمده از روش حداقل مربعات و P مقدار دقیق ارزش اختیار قسطی است.

یافته‌های پژوهش در دو قسمت بیان می‌شود. در قسمت اول عوامل موثر بر روش حداقل مربعات را به گونه-ای به دست می‌آوریم که علاوه بر کاهش مقدار خطای RMSE، صرفه‌جویی در تعداد پایه و تعداد مسیرهای شبیه‌سازی شده را داشته باشیم. به تعبیری دیگر از روش عددی حداقل مربعات که در قسمت‌های قبل برای برآورد اختیار معامله قسطی کاربردی شد، استفاده کرده و با تغییر عوامل موثر (یعنی تعداد پایه و تعداد مسیرهای شبیه‌سازی، تابع مورد استفاده و ...) قیمت عددی اختیار معامله قسطی را طوری برآورد می‌کنیم که مقدار محاسبه شده نزدیک به قیمت واقعی اختیار معامله باشد یا به عبارت دیگر خطای حاصل از اختلاف مقدار عددی و مقدار دقیق کمینه شود. اما باید مطمئن باشیم که عوامل موثر، بگونه‌ای تعیین شود که مقدار عددی به مقدار دقیق همگرا شود بنابراین در قسمت دوم تلاش می‌شود کمینه مقادیر (تعداد پایه و تعداد مسیرهای شبیه‌سازی شده و یا رابطه بین این دو) به گونه‌ای تعیین شود که مطمئن شویم جواب به سمت ارزش دقیق همگرا می‌شود و یا به عبارتی مقدار RMSE به سمت صفر میل کند.

در نهایت با به دست آوردن مقادیر بهینه، می‌توان از آن برای ارزش‌گذاری اختیار قسطی آمریکایی، اختیار قسطی اروپایی (تحت شرایطی که حرکت قیمتی سهام GBM نیست)، اختیار قسطی اروپایی که ارزش ذاتی آن برابر با اختیار ساده اروپایی نیست و ... استفاده نمود. در اختیارات قسطی نامتعارف که از نوع اختیار معامله قسطی ساده اروپایی نیستند مقدار دقیقی نداریم که بتوان ارزش اختیار را با آن به دست آورد. بنابراین تنها باید به روش عددی متوسل شویم که در این پژوهش این راهکار عنوان شده است. خوشبختانه با در نظر گرفتن مقادیر مناسب برای عوامل موثر بر روش حداقل مربعات، از کارایی روش اطمینان خواهیم یافت.

۴-۱- مقادیر بهینه متغیرها

هدف تعیین سه عامل نوع تابع، تعداد متغیرهای تابع (M) و تعداد مسیرهای شبیه‌سازی (N) شده است. برای این‌کار ابتدا به بررسی دو نوع تابع مختلف می‌پردازیم[۳]:

۱) چند جمله‌ای ساده

۲) لاگورا

در تمامی محاسبات، اختیار معامله قسطی ۵ مرحله‌ای با پرداخت‌های برابر ۲ واحد (p=2) و قیمت اعمال ۹۵ واحد (k=95) در نظر گرفته شده است. همچنین برای شبیه‌سازی قیمت سهام از قیمت اولیه ۱۰۰ واحد (S0=100)، نرخ بهره بدون ریسک ۵ درصد (r=0.05) و نوسان ۰/۲، زمان سررسید ۱ سال (T=1) و زمان‌های پرداخت برابر (یعنی زمان هر پرداخت ۰/۲ سال)، استفاده شده است. لازم به ذکر است در این حالت مقدار دقیق ارزش اختیار معامله قسطی با استفاده از فرمول ویستاپ برابر با ۶/۲۴۹۱ است.

در جداول زیر مقادیر اصلی، اعداد به دست آمده از روش شبیه‌سازی حداقل مربعات هستند و اعداد داخل پرانتز نشان دهنده معیار خطای RMSE هستند.

جدول ۹- مقدار عددی ارزش اختیار قسطی بر مبنی تابع چندجمله‌ای ساده

M=6	M=4	M=2	N
5.6333 (0.6158)	5.6941 (0.5550)	5.7610 (0.4881)	1000
6.1530 (0.0961)	6.1263 (0.1228)	6.2504 (0.0013)	5000
6.2550 (0.059)	6.2636 (0.0145)	6.3445 (0.0954)	10000
6.3224 (0.0733)	6.3364 (0.0873)	6.4545 (0.2054)	25000
6.2000 (0.0491)	6.2192 (0.0299)	6.3482 (0.0991)	50000
6.2617 (0.0126)	6.2750 (0.0259)	6.4128 (0.1637)	100000

جدول ۱۰ - مقدار عددی ارزش اختیار قسطی بر مبنی تابع لاگورا

M=6	M=4	M=2	N
5.6352 (0.6139)	5.6980 (0.5511)	5.7878 (0.4613)	1000
6.1566 (0.0925)	6.1237 (0.1254)	6.2689 (0.0198)	5000
6.2451 (0.0040)	6.2626 (0.0135)	6.3751 (0.1260)	10000
6.3134 (0.0643)	6.3347 (0.0856)	6.4932 (0.2441)	25000
6.1941 (0.0550)	6.2079 (0.0412)	6.3726 (0.1235)	50000
6.2569 (0.0078)	6.2653 (0.0162)	6.4329 (0.1838)	100000

لازم به ذکر است توابع دیگری که مورد بررسی قرار گرفته‌اند، نتایج تقریباً مشابهی با جداول فوق داشتند. از نتایج جداول مشخص است که تابع لاگورا مقادیر بهتری (هر چند بسیار اندک) نسبت به تابع چند جمله‌ای ساده ارائه می‌دهد. در حالت کلی می‌توان عنوان کرد که نوع تابع تاثیر مهمی بر مقادیر محاسبه شده ندارد. در وهله بعد هدف یافتن مقادیر مناسب تعداد مسیرهای شبیه‌سازی (N) و تعداد متغیرهای پایه (M) می‌باشد. از آنجایی که تابع لاگورا مقادیر مناسب‌تری ارائه داده است از این به بعد از تابع مذکور برای انجام محاسبات استفاده شده است.

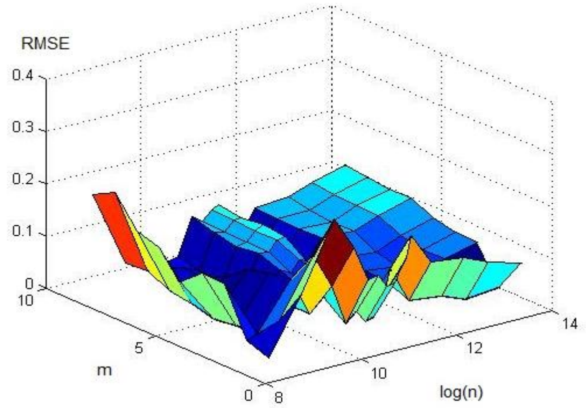
جدول ۱۱- تعیین مقدار بهینه M و N

N	M=1	M=2	M=3	M=4	M=5
5000	5.4973 (0.7518)	6.2689 (0.0198)	6.2140 (0.0351)	6.1237 (0.1254)	6.1228 (0.12630
10000	5.6390 (0.6101)	6.3751 (0.1260)	6.3061 (0.0570)	6.2626 (0.0135)	6.2577 (0.0086)
20000	5.7341 (0.5150)	6.5018 (0.2527)	6.4148 (0.1657)	6.3507 (0.1016)	6.3444 (0.0953)
30000	5.6451 (0.6040)	6.4384 (0.1893)	6.3464 (0.0973)	6.2736 (0.0245)	6.2727 (0.0236)
40000	5.5698 (0.6793)	6.3701 (0.1210)	6.2677 (0.0186)	6.1981 (0.0510)	6.1988 (0.0503)
50000	5.5769 (0.6722)	6.3726 (0.1235)	6.2855 (0.0364)	6.2079 (0.0412)	6.2075 (0.0416)
60000	5.5603 (0.6888)	6.3484 (0.0993)	6.2621 (0.0130)	6.1838 (0.0653)	6.1831 (0.0660)
70000	5.5657 (0.6834)	6.3505 (0.1014)	6.2641 (0.0150)	6.1851 (0.0640)	6.1851 (0.0640)
80000	5.5853 (0.6638)	6.3746 (0.1255)	6.2886 (0.0395)	6.2141 (0.0350)	6.2130 (0.0361)
90000	5.6034 (0.6457)	6.3935 (0.1444)	6.3061 (0.0570)	6.2283 (0.0208)	6.2270 (0.0221)
100000	5.6402 (0.6089)	6.4329 (0.1838)	6.3517 (0.1026)	6.2653 (0.0162)	6.2645 (0.0154)
150000	5.5801 (0.6690)	6.3719 (0.1228)	6.2797 (0.0306)	6.1970 (0.0521)	6.1974 (0.0517)
300000	5.5788 (0.6703)	6.3641 (0.1150)	6.2726 (0.0235)	6.2036 (0.0455)	6.2047 (0.0444)
500000	5.5614 (0.6877)	6.3444 (0.0953)	6.2538 (0.0047)	6.1838 (0.0653)	6.1851 (0.0640)
1000000	5.5441 (0.7050)	6.3272 (0.0781)	6.2368 (0.0123)	6.1679 (0.0812)	6.1687 (0.0804)

N	M=6	M=7	M=8	M=9	M=10
5000	6.1566 (0.0925)	6.1106 (0.1385)	6.0959 (0.1532)	6.0401 (0.2090)	6.0641 (0.1850)
10000	6.2451 (0.0040)	6.2337 (0.0154)	6.2261 (0.0230)	6.2065 (0.0426)	6.2100 (0.0391)
20000	6.3311 (0.0820)	6.2982 (0.0491)	6.2802 (0.0311)	6.2802 (0.0311)	6.2655 (0.0164)
30000	6.2640 (0.0149)	6.2344 (0.0147)	6.2355 (0.0136)	6.2335 (0.0156)	6.2242 (0.0249)
40000	6.1831 (0.0660)	6.1701 (0.0790)	6.1738 (0.0753)	6.1648 (0.0843)	6.1540 (0.0951)
50000	6.1941 (0.0550)	6.1731 (0.0760)	6.1722 (0.0769)	6.1708 (0.0783)	6.1679 (0.0812)
60000	6.1735 (0.0756)	6.1521 (0.0970)	6.1538 (0.0953)	6.1510 (0.0981)	6.1509 (0.0982)
70000	6.1780 (0.0711)	6.1497 (0.0994)	6.1460 (0.1031)	6.1506 (0.0985)	6.1430 (0.1061)

N	M=6	M=7	M=8	M=9	M=10
80000	6.2046 (0.0445)	6.1757 (0.0734)	6.1730 (0.0761)	6.1794 (0.0697)	6.1749 (0.0742)
90000	6.2196 (0.0295)	6.1917 (0.0574)	6.1890 (0.0601)	6.1950 (0.0541)	6.1880 (0.0611)
100000	6.2569 (0.0078)	6.2312 (0.0179)	6.2282 (0.0209)	6.2338 (0.0153)	6.2267 (0.0224)
150000	6.1902 (0.0589)	6.1698 (0.0793)	6.1713 (0.0778)	6.1710 (0.0781)	6.1679 (0.0812)
300000	6.1949 (0.0542)	6.1731 (0.0760)	6.1744 (0.0747)	6.1698 (0.0793)	6.1630 (0.0861)
500000	6.1753 (0.0738)	6.1557 (0.0934)	6.1566 (0.0925)	6.1523 (0.0968)	6.1482 (0.1009)
1000000	6.1592 (0.0899)	6.1386 (0.1105)	6.1393 (0.1098)	6.1352 (0.1139)	6.1303 (0.1188)

در جدول ۱۱، خانه‌هایی که به صورت پررنگ هستند مقادیر بهینه در گروه مربوطه را به خود اختصاص می‌دهند. به عبارت دیگر مقادیر پررنگ دارای کمترین مقدارخطا (RMSE) هستند که از این نظر بهینه هستند. همان‌طور که از شکل فوق مشخص است خطا در مرزها بیشتر است یعنی در شرایطی که تعداد متغیرهای تابع و تعداد مقادیر شبیه‌سازی هر دو کم باشند. بنابراین با انتخاب $M \geq 3$ و $N \geq 10000$ تقریباً می‌توان اطمینان داشت که میزان خطای مدل بسیار کم (به طوری که کران بالای خطا در حد ۰/۱ به ازای ۶/۲۴ که معادل ۱/۶ درصد است) خواهد بود. به عبارت دیگر اگر برای M و N مقادیر بالایی انتخاب شوند می‌توان مطمئن بود که حداکثر خطای ایجاد شده ۱/۶٪ خواهد بود.



شکل ۴- لازم به ذکر است مقادیر ایجاد شده به وسیله پایه ۱ از شکل حذف شده است؛ چرا که به دلیل RMSE بالا، شکل را نامتوازن نشان می‌داد.

۴-۲- همگرایی جواب عددی به جواب دقیق

همان‌طور که از مقادیر جدول ۱۱ بر می‌آید با اطمینان نمی‌توان شرایطی را در نظر گرفت که لزوماً جواب عددی به جواب دقیق همگرا شود. حتی با افزایش قابل توجه تعداد مسیرهای شبیه‌سازی (بالاتر از ده میلیون مسیر شبیه‌سازی شده) باز هم نتایج مثبتی حاصل نشد. ما امیدوار بودیم که شبیه به پژوهش گلاسرمن و همکارش که عنوان کردند اگر رابطه خاصی بین M و N در مورد اختیار آمریکایی برقرار باشد، ارزش روش عددی به ارزش روش دقیق میل می‌کند، برای اختیار قسطی نیز این اتفاق رخ دهد اما نتایج حاکی از عدم وقوع آن است. جداول زیر مقادیر خطا (RMSE) را به ازای مقادیر مختلف تعداد پایه (M) و تعداد مسیرهای شبیه‌سازی (N) نشان می‌دهد.

جدول ۱۲- مقادیر خطا به ازای مقادیر مختلف تعداد پایه (M) و تعداد مسیرهای شبیه‌سازی شده (N)

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RMSE	9.855	1.8979	0.7083	0.8026	0.7898	0.8197	1.077	1.0834	1.1647	1.1907

(الف)

N	RMSE
5000	1.8366
10000	0.9393
20000	1.34
30000	1.0224
40000	1.3199

N	RMSE
50000	1.2823
60000	1.3966
70000	1.406
80000	1.2378
90000	1.1522

N	RMSE
100000	1.0112
150000	1.3015
300000	1.269
500000	1.3744
1000000	1.4999

(ب)

در بخش قبل مقدار بهینه تعداد مسیر شبیه‌سازی شده و تعداد متغیر پایه مورد بررسی قرار گرفت اما نمی‌توان اطمینان داشت که با انتخاب بهینه مقادیر، لزوماً جواب عددی به مقدار دقیق همگرا می‌شود. اما با دقت در جدول ۱۲ می‌توان به نتایج جالب توجهی رسید. در قسمت (الف) جدول ۱۲ با ثابت نگه داشتن تعداد شبیه‌سازی‌ها (N)، تعداد متغیرهای تابع پایه را از ۱ تا ۱۰ افزایش دادیم. همانطور که مشاهده می‌شود در این حالت لزوماً افزایش M، منجر به کاهش مقدار خطا و همگرایی نمی‌شود.

در قسمت (ب) جدول ۱۲ تعداد متغیرهای پایه (M) را ثابت نگه داشته و تعداد مسیرهای شبیه‌سازی شده (N) را افزایش داده‌ایم. باز هم نمی‌توان اطمینان داشت که با افزایش N لزوماً مقادیر به جواب دقیق همگرا شود. بنابراین در حالت کلی نمی‌توان اطمینان داشت که با افزایش M و N لزوماً جواب همگرا خواهد شد.

بنابراین اگرچه نمی‌توان مقادیر M و N را طوری تعیین کرد که با اطمینان کامل از همگرا بودن جواب عددی به جواب دقیق اطمینان یابیم، اما نتایج نشان داد با انتخاب تعداد پایه ۳،۴،۵ و تعداد مسیر شبیه‌سازی شده

۱۰۰،۰۰۰ عدد، کاهش قابل توجهی در معیار خطا خواهیم داشت و با درصد اطمینان قابل توجهی می‌توان گفت جواب عددی به جواب دقیق همگرا خواهد شد.

۴-۴- کاربرد مدل ارائه شده در ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی با دینامیک قیمتی با پرش

همانطور که گفته شد مطالعات بسیاری نشان داده‌اند که قیمت سهام همیشه از حرکت هندسی براونی (GBM) پیروی نمی‌کند. بنابراین مدل‌های دیگری مانند حرکت با پرش به وجود آمدند که شبیه‌سازی قیمت سهام را نزدیک‌تر به واقعیت انجام می‌دهد. فرض کنید می‌خواهیم ارزش اختیار معامله قسطی را بر روی سهامی بیابیم که قیمت سهام مورد نظر با پرش همراه است. در این شرایط جواب دقیقی برای ارزش اختیار وجود ندارد و تنها راه موجود، استفاده از روش‌های عددی است. از روش حداقل مربعات - با توجه به کاربردی کردن آن برای ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی – استفاده کرده و ارزش اختیار مذکور را با مفروضات زیر محاسبه می‌کنیم.

جدول ۱۳- مفروضات اختیار معامله قسطی

نوع اختیار	قیمت اعمال	دارایی پایه	قیمت اولیه سهام	تعداد اقساط	مبلغ هر قسط	سررسید
قسطی خرید	۱۰۵ ریال	سهام با دینامیک با پرش	۱۰۰ریال	۴	۲ ریال	۱ سال

برای ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی با مشخصات جدول ۱۳، لازم است قیمت دارایی پایه (سهام) را با استفاده از مدل با پرش شبیه‌سازی کنیم. مدل دینامیکی ریسک خنثی این روش به صورت زیر است.

$$dS_t/S_t = rdt + \sigma dw_t + q_t dJ_t \qquad \text{رابطه (۷)}$$

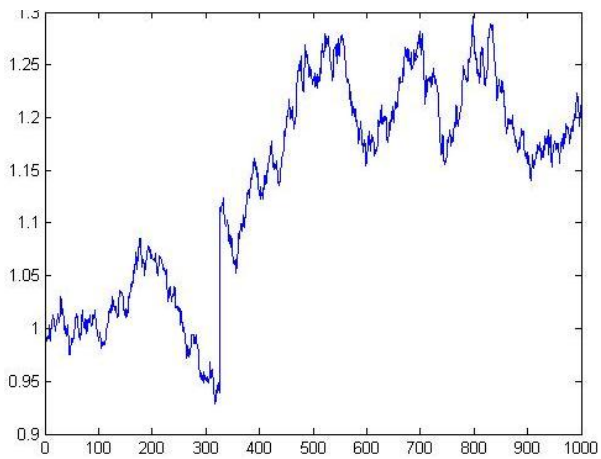
که در آن q اندازه پرش است و دارای توزیع نرمال با میانگین و واریانس مشخص است. عبارت dJ نیز نشان‌دهنده تعداد پرش‌ها است که دارای توزیع پواسون با پارامتر ثابت لاندا می‌باشد. شکل ۵، قیمت فرایند شبیه‌سازی شده را در حالت ریسک خنثی نمایش می‌دهد.

همانطور که در شکل ۵ قابل مشاهده است فرایند نشان‌داده شده، دارای یک پرش می‌باشد. با استفاده از روش حداقل مربعات که به تفصیل در مورد نحوه استفاده از آن برای ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی در بخش سوم پؤوهش بحث شد، به محاسبه ارزش اختیار معامله مذکور می‌پردازیم. ارزش اختیار معامله قسطی با مفروضات بیان شده در جدول ۱۳ و با مقدار اطمینان ۹۵٪ به صورت زیر است.

میانگین ارزش اختیار: ۵/۶۰

حد بالا با اطمینان ۹۵٪: ۵/۷۴

حد پایین با اطمینان ۹۵٪: ۵/۴۷



شکل ۵- شبیه‌سازی فرایند قیمتی سهام با مدل با پرش؛
تعداد پرش‌ها: پواسون با ضریب لاندای ۰/۵ ، اندازه پرش: نرمال با میانگین ۲۰ و واریانس ۵

همانطور که از نتایج مشخص است روش حداقل مربعات، ارزش اختیار معامله قسطی فوق را با خطای بسیار کم برآورد کرد. اختیاری که هیچ روش دقیقی تا لحظه نگارش این مقاله قابلیت به دست آوردن جواب را ندارد. حتی بسیاری از روش‌های عددی نیز در برآورد ارزش چنین اختیاری با مشکل روبرو هستند.

لازم به ذکر است با افزایش تعداد مسیرهای شبیه‌سازی می‌توان خطا را کم کرد اما با این کار احتمال همگرا بودن جواب عددی به جواب دقیق (واقعی) کم خواهد شد. بنابراین برای افزایش احتمال همگرایی و همچنین کاهش معقول معیار خطا، تعداد مسیرهای شبیه‌سازی شده و تعداد متغیرهای تابع را به ترتیب ۱۰۰،۰۰۰ و ۳ در نظر گرفته‌ایم. این مقادیر مطابق با محاسبات قسمت قبل در نظر گرفته شده است. کد متلب روش محاسبه اختیار معامله قسطی با دارایی پایه سهام که از مدل با پرش تبعیت می‌کند در پیوست ارائه شده است.

۵- خلاصه و نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این پژوهش ضمن معرفی اختیار معامله قسطی، دلیل اهمیت این نوع اختیار را عنوان کردیم. سپس به ذکر دلایل اهمیت ارزش‌گذاری آن پرداختیم. همان‌طور که گفته شد ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی، پیش درآمدی برای ارزش‌گذاری ارزش طرح‌های سرمایه‌گذاری خطرپذیر است. به هر ترتیب ارزش‌گذاری اختیار قسطی، به خودی خود نیز اهمیت بالایی دارد چرا که در بازارهای بین المللی این ابزار مالی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در استرالیا، این اختیار (مخصوصاً نوع دو مرحله‌ای آن یا اختیار مرکب) در واگذاری سهام بسیار مهم جلوه می‌کند؛ چرا که با توجه به نوع قرارداد، با پرداخت مبلغی، وارد اختیاری می‌شود که در زمان آتی می‌تواند با

پرداخت نصف مبلغ سهام و در زمان سررسید با پرداخت باقی قیمت، سهام مورد نظر را دریافت کند. همچنین شباهت شگرف این نوع اختیار (قسطی) با تامین مالی پروژه‌ها بسیار جالب توجه است.

در ادامه به انواع روش‌های ارزش‌گذاری اختیار معامله اشاره شد و عنوان کردیم که ارزش دقیق اختیار معامله قسطی حالت ساده و اروپایی آن، تحت فروض خاصی از جمله تبعیت قیمت سهام از حرکت براونی هندسی (GBM)، به دست آمده است. اما موضوع هنگامی که ارزش ذاتی اختیار قسطی، از نوع اختیار ساده نباشد و حرکت قیمت سهام GBM نباشد، بسیار پیچیده می‌شود که در آن صورت به دست آوردن ارزش دقیق آن تقریباً ناممکن (حداقل تا زمان نگارش این پژوهش) می‌باشد. اگر اختیار از نوع آمریکایی باشد، قضیه از این هم بغرنج‌تر می‌گردد. اینجاست که روش‌های عددی راه‌گشا هستند. بنابراین ضمن اشاره به انواع روش‌های عددی، به معرفی روش عددی مناسبتر به نام حداقل مربعات پرداختیم که این قسمت برای ارزش‌گذاری اختیار معامله قسطی گسسته، کاربردی شد. نکته مهم در استفاده از این روش، حساس بودن جواب به سه عامل انتخاب نوع تابع پایه، تعداد پایه و تعداد مسیرهای شبیه‌سازی بود. در این پژوهش ضمن به دست آوردن مقادیر بهینه این سه عامل (به طوری که خطای انحراف از مقدار دقیق را کاهش دهد)، تلاش شد به بررسی همگرایی روش عددی به روش دقیق، نیز مورد بررسی قرار گیرد. برای پیشنهادات آتی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- ✓ به دست آوردن مقادیر بهینه عوامل موثر به صورت ریاضیاتی و اثبات ریاضیاتی همگرایی این روش: همانطور که قبلا عنوان شد، در این پژوهش در ارزشگذاری اختیار معامله قسطی عوامل موثر بر همگرایی روش عددی به جواب دقیق با روش شبیه‌سازی به دست آمد. گلاسرمن و همکارانش با روش ریاضیاتی (و نه شبیه‌سازی) ثابت کردند که اگر رابطه خاصی بین عوامل تاثیرگذار (نوع تابع، تعداد مسیرهای شبیه‌سازی شده و تعداد متغیرهای تابع) برقرار باشد، ارزش حاصل شده از روش LS به ارزش تحلیلی و دقیق همگرا خواهد شد. پیشنهاد می‌گردد همین رویه برای همگرایی اختیار معامله قسطی به صورت ریاضیاتی انجام شود.
- ✓ استفاده از روش‌های شبیه‌سازی عددی متفاوت و مقایسه نتایج با پژوهش حاضر: در شبیه‌سازی قیمت سهام از دینامیک قیمتی براونی هندسی (GBM) استفاده شد و عوامل موثر به صورتی تعیین شد که ارزش عددی اختیار معامله قسطی به ارزش دقیق آن همگرا شود. پیشنهاد می‌شود از دینامیک‌های قیمتی دیگری مانند حرکت با پرش و رژیم متغیر استفاده شود و مقادیر بهینه عوامل به نحوی که ارزش عددی به ارزش تحلیلی همگرا شود به دست آورده شود. در نهایت نتایج با نتایج پژوهش حاضر مقایسه شود.

فهرست منابع

- * احمدی، زهرا (۱۳۹۰)، *قیمت‌گذاری ابزارهای مشتقه به کمک روش مونت‌کارلو- کمترین مربعات*. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، زنجان: دانشگاه علوم پایه زنجان
- * باقری، کامران و محبوبی، جواد (۱۳۸۳)، سرمایه‌گذاری خطرپذیر. تهران: بنیاد توسعه فردا

* حامدی نیا، حامد (۱۳۹۳)، ارزش‌گذاری صندوق سرمایه‌گذاری خطرپذیر با استفاده از اختیار معامله قسطی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، تهران، دانشگاه علوم اقتصادی
* رستمی، محمد و صیقلی، محسن (۱۳۹۱)، پاداش ریسک. تهران: انتشارات بورس
* فروش‌باستانی، علی و حامدی‌نیا، حامد (۱۳۹۴)، ارزش‌گذاری طرح‌های خطرپذیر با استفاده از اختیارات طبیعی و اختیار معامله *قسطی*، مجله دانش سرمایه‌گذاری، تهران، ایران
* Barola, A. (2013). Monte Carlo Methods for American Option Pricing. Working Paper, Copenhagen Business School.
* Broadie, M. and Glasserman, P. (1997). Pricing American-style securities by simulation. J. Econom. Dynam. Control 21 1323–1352.
* Broadie, M. and Glasserman, P. (1997). A stochastic mesh method for pricing high-dimensional American options. PaineWebber Series in Money, Economics and Finance. #PW9804, Columbia Business School, Columbia Univ
* Ciurlia, P. & Roko, I. (2005). Valuation of American Continuous-Installment Options. Computational Economics 1-2, 143-165.
* Cl´ ement, E., Lamberton, D. and Protter, P. (2002). An analysis of a least squares regression algorithm for American option pricing. Finance Stoch. 6 449– 471.
* Cortazar, G. (2002). Simulation and Numerical Methods in Real Options Valuation, Working Paper, Pontificia Universidad Católica de Chile.
* Geske, R. (1979). The Valuation of Compound Options. Journal of Financial Economics. Volume 7, Number 1 (March), pp. 63-81.
* Glasserman, P. & Yu, L. (2004). Number of paths versus number of basis functions in American option pricing, The annals of applied probability, New York, pp.2090-2119
* Griebsch, S & Wystup, U. (2007). Instalment Options: A Closed-Form Solution and the Limiting Case. Mathematical Control Theory and Finance, Springer-Verlag, Berlin, pp. 211–229.
* Longstaff, F. & Schwartz, E. (2001). Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach. Society for Financial Studies, Vol. IS. No. I, pp. 113-147.
* Rogers, L. C. G. (2002). Monte Carlo valuation of American options. Math. Finance 12 271–286.
* Tsitsiklis, J. and Van Roy, B. (1999). Optimal stopping of Markov processes: Hilbert space theory, approximation algorithms, and an application to pricing high-dimensional financial derivatives. IEEE Trans. Automat. Control 44 1840–1851.
* Wystup, U. (2006). FX Options and Structured Products. Wiley Finance.

یادداشت‌ها

[1] برای توضیحات دقیق‌تر به مقاله فروش باستانی، حامدی نیا تحت عنوان «ارزش‌گذاری طرح‌های خطرپذیر با استفاده از اختیارات طبیعی و اختیار معامله قسطی» چاپ شده در مجله دانش سرمایه‌گذاری مراجعه گردد.

[2] برای مشاهده مثال حل شده به مقاله لانگ اشتاف – شوارتز سال ۲۰۰۰ و یا به پایان نامه ارشد حامد حامدی نیا تحت عنوان ارزش‌گذاری صندوق سرمایه‌گذاری خطرپذیر به راهنمایی آقای دکتر باستانی، دانشگاه علوم اقتصادی تهران قسمت ۵-۲ مراجعه شود.

[3] لازم به ذکر است مقادیر محاسبه شده در توابع دیگر مانند لژندر، چبیشف و ...، از نظر عددی با مقادیر محاسبه شده توسط دو تابع مورد بررسی (چند جمله‌ای و لاگورا)، بسیار نزدیک بودند. بنابراین برای عدم تکرار، از آوردن نتایج خودداری به عمل آمد.