فصلنامــه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گــذاری
سال نهم/ شماره سی‌وششم/ زمستان ۱۳۹۹

بهینه‌سازی پرتفوی سهام با استفاده از رویکرد قابلیت اطمینان

میرسیدمحمد محسن امامت
دانشکده مدیریت و حسابداری، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران (نویسنده مسئول)
emamat@atu.ac.ir

پیام حنفی‌زاده
دانشکده مدیریت و حسابداری، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران
hanafizadeh@gmail.com

تاریخ دریافت: ۹۸/۱۱/۲۴ تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۶/۱۸

چکیده

هدف این پژوهش بهینه‌سازی پرتفوی سهام با در نظر گرفتن بازده احتمالی و تابع مطلوبیت سرمایه‌گذار در بورس اوراق بهادار تهران می‌باشد. بدین منظور از یک الگوریتم بازگشتی و دو مرحله‌ای استفاده شده است و یک تابع مطلوبیت به عنوان تابع عمومی الگوریتم احتمالی در نظر گرفته شده است. در این پژوهش با توجه به لیست ۵۰ شرکت فعال که بطور فصلی توسط سازمان بورس اوراق بهادار اعلام و در طی بازه زمانی سال ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۴ منتشر شده است، شرکت‌های برتر انتخاب شدند. با در نظر گرفتن بازدهی شرکت‌ها در دوره زمانی پنج ساله، بردار بازده و ماتریس کوواریانس تعیین و پس از حل الگوریتم پیشنهادی، پرتفوی بهینه ارائه شد. این پرتفوی، شامل سهام هفت شرکت ایران ترانسفو با وزن ۰/۱۵، بانک اقتصاد نوین با وزن ۰/۱، سایپا با وزن ۰/۱۵، سرمایه‌گذاری غدیر با وزن ۰/۱۵، فولاد مبارکه اصفهان با وزن ۰/۱۵، مخابرات ایران با وزن ۰/۱۵ و ملی صنایع مس ایران با وزن ۰/۱۵ می‌باشد. در این پژوهش کیفیت جواب الگوریتم پیشنهادی با داده‌های واقعی دوره بعد مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج پژوهش نشان از قدرت بالای الگوریتم دارد و روش ارائه شده تخصیص سرمایه را به شکل مناسبی انجام می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی احتمالی، برنامه‌ریزی غیر خطی، پرتفوی سهام، سرمایه‌گذاری.

۱- مقدمه

یکی از چالش‌های اصلی در مساله انتخاب پرتفوی، تعیین تعداد محدودی سرمایه در بازار است. اما مساله وقتی پیچیده‌تر می‌شود که می‌دانیم سرمایه‌گذاری دارای ریسک است و تحت شرایط عدم قطعیت صورت می‌گیرد (Sadjadi et al, 2012, 91). در بیست سال اخیر تحقیقات زیادی در زمینه بهینه‌سازی استوار پرتفوی انجام شده‌است. تحقیقات جدید حاکی از آن است که بازده و واریانس بدست آمده از تخمین‌های نقطه‌ای تکنیک‌های کلاسیک، کاملا قابل اعتماد نیستند و بازده و ریسک جنبه تصادفی دارند (Xidonas et al, 2017, 60). در ادبیات بهینه‌سازی پرتفوی تقریبا این اتفاق نظر وجود دارد که سرمایه‌گذاران به مدلی که عدم اطمینان را در مدل لحاظ کنند احتیاج دارند (Branger & Larsen, 2013, 5036). یکی از مهم‌ترین مسائل حوزه مالی بهینه‌سازی پرتفوی سهام است و تاکنون مطالعات زیادی در این زمینه انجام شده است. تا به حال رویکردهای مختلفی برای ارائه یک پرتفوی بهینه ارائه شده است که می‌توان از آن جمله به مدل‌های ریاضی همچون مدل‌های خطی، کوادراتیک، سایر مدل‌های غیر خطی، مدل‌های احتمالی و استوار اشاره کرد. در این پژوهش از الگوریتم احتمالی ارائه شده توسط حنفی‌زاده و پونامبالام[1] (۲۰۰۹) استفاده شده است. این الگوریتم مدلی عمومی ارائه می‌نماید که می‌توان با در نظر گرفتن انواع توابع مطلوبیت، مدل‌سازی را طی یک الگوریتم برگشتی دو بخشی انجام داد. در پژوهش حاضر از یک تابع مطلوبیت ریسک‌گریز برای نشان دادن رفتار سرمایه‌گذار در بازار استفاده شده است، ضمن این‌که به منظور کاهش ریسک سبد سهام، محدودیت سقف سرمایه‌گذاری به این الگوریتم اضافه شده است. چنان‌چه محدودیت سقف سرمایه‌گذاری اعمال نگردد ممکن است کل سرمایه تنها به یک و یا تعداد معدودی سهم تخصیص یابد که این مساله ریسک سرمایه‌گذاری را بسیار بالا می‌برد. بنابراین لازم است با در نظر گرفتن این محدودیت، ریسک سبد سهام کاهش داده شود که در این پژوهش لحاظ شده است. از جمله مزایای الگوریتم پیشنهادی می‌توان به در نظر گرفتن عدم قطعیت و لحاظ کردن تابع مطلوبیت متناسب با ترجیحات سرمایه‌گذار در مدل اشاره نمود. پژوهش حاضر اولین مطالعه‌ای است که کاربرد الگوریتم پیشنهادی را در انتخاب پرتفوی سهام در بورس اوراق بهادار تهران مورد بررسی و تحلیل قرار می‌دهد.

در ادامه این پژوهش، ابتدا در بخش بعد به بررسی مبانی نظری و پیشینه تحقیق پرداخته می‌شود. در بخش سوم روش‌شناسی پژوهش ارائه می‌شود. در بخش چهارم به نحوه مدل‌سازی و اجزای مدل پیشنهادی پرداخته می‌شود. در بخش پنجم الگوریتم پیشنهادی بصورت گام به گام تشریح می‌شود. در بخش ششم الگوریتم پیشنهادی در یک مساله واقعی برای بهینه‌سازی پرتفوی سهام که در بورس اوراق بهادار تهران انجام شده است تشریح می‌شود و یافته‌های پژوهش مورد بحث قرار می‌گیرد و در بخش هفتم نتیجه‌گیری و پیشنهادات پژوهش ارائه می‌شود.

۲- مبانی نظری و پیشینه تحقیق

اولین مدل ریاضی برای بهینه‌سازی پرتفوی توسط مارکویتز[2] (۱۹۵۲) ارائه شد و این مدل سنگ بنای توسعه‌های تئوری مالی نوین از آن سال به بعد بوده است. ایده اصلی روش میانگین واریانس مارکویتز، در نظر

گرفتن بازده مورد انتظار پرتفوی به عنوان بازدهی و در نظر گرفتن واریانس بازده، به عنوان ریسک می‌باشد. مدل مارکویتز طبق رابطه ۱ می‌باشد.

$$\begin{aligned} &\max \quad z = \boldsymbol{\mu}^T - \lambda \boldsymbol{x}^T \Sigma \boldsymbol{x} \\ &s.t. \\ &\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{e} = 1 \\ &\boldsymbol{x} \ \geq 0 \end{aligned} \qquad (۱)$$

در رابطه ۱، $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ بردار وزن‌های دارایی‌ها در پورتفوی است، $\boldsymbol{\mu} \in \Re^n$ بردار بازدهی مورد انتظار و $\Sigma \in \Re^{nxn}$ ماتریس کوواریانس بازده می‌باشد. بردار $\boldsymbol{e}$ بردار یکه و λ مقداری ثابت با توجه به سطح ریسک پذیری فرد می‌باشد. در مدل مارکویتز فرض بر این است که سرمایه‌گذار دارای دو هدف بازدهی بالا و حداقل سطح ریسک است.

توسعه‌های انجام شده پس از پیشنهاد مدل میانگین واریانس مارکویتز عمدتا در جهات زیر بوده‌اند (Kolm et al, 2014, 358):

- در نظر گرفتن تاثیرات هزینه مبادله و مالیات
- اضافه کردن انواع محدودیت به مدل
- مدل‌سازی و کمی‌سازی تاثیر خطاهای تخمینی در پیش‌بینی ریسک و بازده پرتفوی با استفاده از تکنیک‌های بیزین[۳]، بهینه‌سازی تصادفی[۴] و رویکردهای بهینه‌سازی استوار[۵]
- مدل‌های چند دوره‌ای میانگین واریانس برای وارد کردن تاثیرات موقتی

مدل برنامه‌ریزی تصادفی میتنی بر سناریو برای در نظر گرفتن عدم اطمینان در بازده ارائه شده است.(Ziemba & Mulvey, 1998). راکفلر و اوریسو[۶] (۲۰۰۰) با استفاده از یک مدل برنامه‌ریزی خطی، ارزش در معرض ریسک[۷] را بدست آوردند، اما این مدل بسیار بزرگ بود؛ چراکه در عمل این مدل، مبتنی بر سناریوهای متعددی بود و زمانی که تعداد سرمایه‌ها زیاد بود، این مدل اثربخشی لازم را نداشت (Goldfarb and Iyengar, 2003).

کاربرد بهینه‌سازی استوار در مدل‌های مالی، شامل پارامترهایی نظیر میانگین و کوواریانس بازده سهام (با توجه به وجود ابهام در پارامترها) است (Gabrel, 2014, 476). بهینه‌سازی استوار برای مواجهه با عدم قطعیت ارائه شده و توجه پژوهشگران زیادی را به خود جلب کرده است (Ghaoui et al, 1998; Ben-Tal & Nemirovski, 1998,1999; Bertsimas & Sim, 2006). در رویکرد استوار فرض بر این است که پارامترهای غیر قطعی در یک فاصله و یا منطقه بیضوی قرار دارند و این ناحیه غیر قطعی معمولا با بردار میانگین بازده و ماتریس کوواریانس تعریف می‌شود. نوع داده‌های مورد نیاز در بهینه‌سازی استوار همچون مدل میانگین واریانس مارکویتز است.

بهینه‌سازی استوار میزان عدم قطعیت بهینه‌سازی پرتفوی را با کانترپارت استوارش حفظ می‌کند (Hanafizadeh & Seifi, 2004).

گابرل و همکاران[8] (۲۰۱۴) معتقدند که بیشتر توسعه‌های که در حوزه بهینه‌سازی استوار از سال ۲۰۰۷ به بعد رخ داده است متاثر از این موارد بوده است: ۱-کار بر روی تصمیم‌گیری استوار در شرایط عدم اطمینان با توزیع‌های غیر قطعی، ۲-ارتباط بیشتر با دانش تصمیم با ترکیب مجموعه‌های غیر قطعی و تئوری ریسک، ۳-کار بر روی بهینه‌سازی غیر خطی و تصمیم‌گیری پی در پی، ۴- توسعه کاربردی پژوهش‌ها (Gabrel et al., 2014, 471). در ادامه پژوهش‌های پیشین در حوزه انتخاب پرتفوی سهام مورد بررسی قرار می‌گیرد.

گائویی و همکاران[9] (۲۰۰۳) مساله انتخاب پرتفوی سهام را به منظور حداکثر کردن نسبت ارزش در معرض ریسک مدل‌سازی کردند و این مساله تحت عنوان برنامه‌ریزی نیمه معین، مدل‌سازی مجدد شد. هالدورسون و توتونکو[10] (۲۰۰۳) از بردار میانگین بازده و ماتریس کوواریانس مدل میانگین واریانس مارکویتز استفاده کردند و برنامه‌ریزی غیر خطی زینی را توسعه دادند. گلدفارب و لینگار[11] (۲۰۰۳) با استفاده از بهینه‌سازی استوار در انتخاب پرتفوی سهام و با در نظر گرفتن میانگین واریانس، حداکثر نسبت شارپ و ارزش در معرض ریسک نشان داد کانترپارت‌های استوارشان، برنامه‌ریزی مرتبه دوم مخروطی[12] است. توتونکو و کوینگ[13] (۲۰۰۴) مدل جدیدی برای تعیین پرتفوهای استوار با بیشترین نسبت شارپ ارائه نمودند. چن و همکاران[14] (۲۰۱۰) مدلی برای تقریب مسائل با محدودیت با شانس مشترک پیشنهاد دادند. آن‌ها محدودیت‌های مشترک را به مجموعه‌ای از مسائل تجزیه کردند که هر کدام دارای محدودیت‌های مستقل بودند و در نهایت برای هر یک از مسائل از تقریب بهینه‌سازی استوار استفاده نمودند.

چن و تان[15] (۲۰۰۹) با در نظر گرفتن عدم قطعیت فاصله‌ای در عناصر بردار بازده و ماتریس کوواریانس، مدل بهینه‌سازی میانگین واریانس استوار را با استفاده از الگوریتم ترکیبی پیشنهاد دادند. مون و یائو[16] (۲۰۱۱) یک مدل بهینه‌سازی استوار با استفاده از روش میانگین انحراف مطلق پیشنهاد دادند که این روش دارای پیچیدگی‌های کمتر در محاسبات است. چن و کوان[17] (۲۰۱۲) با استفاده از مدل بهینه‌سازی استوار و با در نظر گرفتن عدم قطعیت در تابع هدف، از یک مدل برنامه‌ریزی صفر و یک برای تعیین پرتفوی استفاده کردند. چوچولا و همکاران[18] (۲۰۱۴) روش زنجیره‌ای استوار برای شناسایی فرصت‌های ساختاری در یک مدل قیمت گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای[19] پیشنهاد دادند. ایوب و همکاران[20] (۲۰۱۵) در مدلی از ریسک نزول به جای واریانس برای در نظر گرفتن ریسک پرتفوی استفاده کردند و نتایج بهتری بدست آوردند.

کاکوریس و رستم[21] (۲۰۱۴) از رابطه‌ها[22] در چارچوب بهینه‌سازی پرتفوی ارزش در معرض ریسک شرطی[23] استفاده کردند و معتقدند برای رسیدن به یک جواب استوار، لازم است ریسک‌ها و وابستگی‌ها در مدل لحاظ شوند. هان و همکاران[24] (۲۰۱۶) از چارچوب ارائه شده در پژوهش کارکوریس و رستم (۲۰۱۴) استفاده کردند و مدل‌های بهینه‌سازی پرتفوی پویا را برای در نظر گرفتن پویایی های توزیع بازده ارائه کردند. لی و همکاران[25] (۲۰۱۶) با استفاده از چارچوب ارائه شده توسط چن و همکاران[26] (۲۰۰۷)، مدل میانگین انحراف مطلق را برای توزیع‌های نامتقارن (ARMAD)[27] ارائه نمودند.

فرناندز و همکاران[۲۸] (۲۰۱۶) با ارائه مدل بهینه‌سازی پرتفوی استوار تک دوره‌ای با در نظر گرفتن بازده در یک مجموعه داده محور چند سطحی، رویکرد نوینی را در بهینه‌سازی استوار پرتفوی مطرح کردند. ژیدوناس و همکاران[۲۹] (۲۰۱۷a) یک مدل بهینه‌سازی استوار برای کاهش واریانس پرتفوی با توجه به سناریوهای مختلف برای ماتریس کوواریانس، ارائه دادند. بدین منظور آن‌ها یک مدل غیر خطی مختلط با محدودیت‌های کوادراتیک را پیشنهاد دادند. ژیدوناس و همکاران (۲۰۱۷b) از تکنیک‌های استوار در مدل بهینه‌سازی چند هدفه استفاده کردند و مدل بهینه‌سازی چند هدفه پرتفوی استوار[۳۰] را ارائه کردند. در واقع در این پژوهش مدل سنتی حداقل حداکثر تاسف[۳۱] در برنامه‌ریزی چند هدفه مورد استفاده قرار گرفته است.

۳- روش‌شناسی تحقیق

این پژوهش از نظر هدف کاربردی می‌باشد و قلمرو تحقیق، حوزه مالی و تحقیق در عملیات را در بر می‌گیرد. قلمرو مکانی این پژوهش بورس اوراق بهادار تهران و از نظر زمانی ۵ سال (۱۳۹۰ تا ۱۳۹۴) را در بر می‌گیرد. در این پژوهش ابتدا برای انتخاب شرکت‌ها، با توجه به اطلاعات ۵۰ شرکت فعال بورس که به صورت فصلی توسط سازمان بورس اوراق بهادار تهران اعلام می‌شود، با در نظر گرفتن بازه زمانی ۵ ساله (۲۰ فصل)، ۱۰ شرکت برتر انتخاب شدند. رویه انتخاب ۱۰ شرکت بدین صورت بوده است که رتبه شرکت‌ها در ۲۰ فصل مد نظر قرار گرفته و در نهایت ۱۰ شرکتی که در مجموع بهترین عملکرد (رتبه) را داشته‌اند انتخاب شده‌اند. سپس اطلاعات مربوط به بازده شرکت‌ها با استفاده از نرم‌افزار ره‌آورد نوین بدست آمدند (طبق جدول۱). پس از آن با توجه به نظر سرمایه‌گذار، ضریب ریسک ۰/۰۵ تعیین و در مدل ریاضی مورد استفاده قرار گرفت. ضمنا در این پژوهش با توجه به نظر سرمایه‌گذار، تابع مطلوبیت ریسک‌گریز مورد استفاده قرار گرفته است.

جدول۱. بازده شرکت‌های منتخب

	نام شرکت	۱۳۹۰	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳	۱۳۹۴	۱۳۹۵
۱	ایران ترانسفو	-0.0994	-0.1409	1.9752	0.519	0.8214	-0.0245
۲	بانک اقتصاد نوین	0.3502	-0.1725	1.0828	-0.205	0.3468	-0.2285
۳	بانک تجارت	0.0565	-0.0485	1.8475	-0.2288	0.2754	-0.4112
۴	بانک سینا	0.0504	-0.1285	1.7284	-0.2403	0.367	-0.2856
۵	بانک ملت	-0.0244	0.4389	1.7088	-0.0303	0.1362	-0.4092
۶	سایپا	-0.2288	-0.1734	0.7376	0.3769	1.9068	-0.3745
۷	سرمایه‌گذاری غدیر	0.6264	0.388	1.0902	-0.1419	0.1918	-0.2007
۸	فولاد مبارکه اصفهان	0.2001	0.5495	0.4976	-0.2877	0.0621	0.0392
۹	مخابرات ایران	0.0282	-0.1763	0.6671	-0.1108	0.2927	0.1064
۱۰	ملی صنایع مس ایران	0.1793	0.3593	0.0879	-0.2252	-0.0267	0.3257

مدل اصلی مورد استفاده در این پژوهش، الگوریتم ارائه شده توسط حنفی‌زاده و پونامبالام (۲۰۰۹) می‌باشد که در این پژوهش تابع مطلوبیت ریسک‌گریز و محدویت سقف سرمایه نیز لحاظ شده است. در پایان نتایج بدست آمده از حل این الگوریتم با بازده واقعی سال ۱۳۹۵ مورد مقایسه قرار گرفته است تا کیفیت نتایج مورد تحلیل قرار گیرد. چارچوب کلی پژوهش در شکل ۱ نمایش داده شده است.

شکل ۱. چارچوب کلی پژوهش

در این پژوهش برای حل الگوریتم دو مرحله‌ای، از چهار نرم‌افزار زیر استفاده شده است:

۱) نرم‌افزار EXCEL: به منظور انجام محاسبات مرحله اول الگوریتم، برای تعیین ضرایب c در هر تکرار.

۲) نرم‌افزار MATLAB: به منظور محاسبه ماتریس کوواریانس و گرادیانت تابع $g(c^k|x)$.

۳) نرم‌افزار Word: به منظور قرار دادن ضرایب جدید تابع هدف در هر تکرار با استفاده از قابلیت جایگزین کردن[۳۲] در این نرم‌افزاردر مدل برنامه‌ریزی غیر خطی.

۴) نرم‌افزار GAMS: به منظور حل مدل برنامه‌ریزی غیرخطی، در مرحله دوم الگوریتم، برای تعیین مقدار سهام شرکت‌ها در هر تکرار.

حال که مراحل و نرم افزارهای مورد استفاده در این پژوهش توضیح داده شد، در ادامه به توضیح درباره مدل مورد استفاده در این پژوهش پرداخته می‌شود.

۴- مدل‌سازی ریاضی

در این بخش به معرفی الگوریتم دو مرحله‌ای حنفی‌زاده و پونامبالام (۲۰۰۹) می‌پردازیم. فرم کلی مدل تخصیص سرمایه طبق رابطه ۲ می‌باشد.

$$\begin{aligned} &\max \quad g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}) \\ &\text{s.t} \\ &\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}=1 \\ &\boldsymbol{x}\geq 0 \end{aligned} \qquad (۲)$$

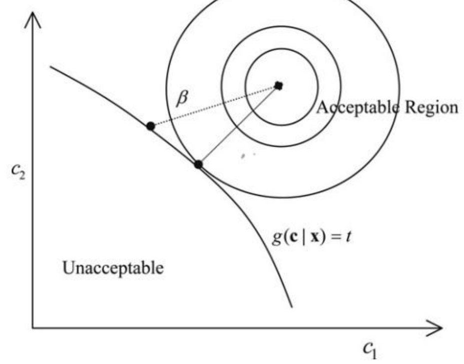
در رابطه ۲، $\boldsymbol{x}$ بردار متغیرهای تصمیم، $\boldsymbol{c}$ بردار ضریب بازده غیر قطعی و $\boldsymbol{e}$ بردار واحد می‌باشد. تابع $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})$ یک تابع پیوسته است که منعکس کننده بازدهی کل می‌باشد که می‌توان یک بردار مطلوبیت نیز باشد. در الگوریتم دو مرحله‌ای، بردار $\boldsymbol{c}$ غیر قطعی در نظر گرفته شده است. بدین منظور رابطه ۲ به یک مساله بهینه‌سازی احتمالی طبق رابطه ۳ تبدیل شده است.

$$\begin{aligned} &\max \quad t \\ &\text{s.t} \\ &g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})\geq t \\ &\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}=1 \\ &\boldsymbol{x}\geq 0 \end{aligned} \qquad (۳)$$

t مقدار مطلوب تابع هدف می‌باشد. تابع محدودیت مدل بهینه‌سازی فوق را می‌توان بصورت احتمالی طبق رابطه ۴ نوشت.

$$prob\ \ g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})\geq t\,|\,\boldsymbol{x},t\ \ \geq 1-\alpha \qquad (۴)$$

در رابطه بالا α بیان‌گر میزان ریسک پذیرفته شده است و همواره عددی بین ۰ تا ۰/۰۵ به آن نسبت داده می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود $\boldsymbol{x}$ و t مقادیر معلوم‌اند و احتمال روی بردار $\boldsymbol{c}$ بسته می‌شود. نکته حائز اهمیت آن است که تابع $g(\boldsymbol{c}\,|\,\boldsymbol{x})=t$، منطقه را به دو بخش تحت عنوان منطقه غیر قابل قبول ($g(\boldsymbol{c}\,|\,\boldsymbol{x})<t$) و منطقه قابل قبول($g(\boldsymbol{c}\,|\,\boldsymbol{x})\geq t$) تقسیم می‌کند (طبق شکل ۱).

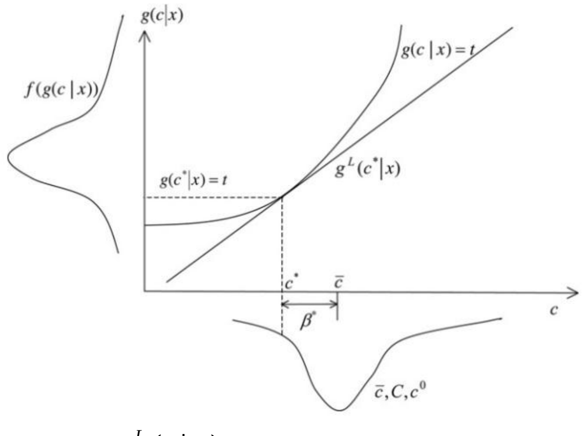


شکل ۲. کمترین فاصل از میانگین بازده در فضای بازده غیر قطعی

همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود $\boldsymbol{\beta}$ نشان‌دهنده فاصله تابع تا میانگین ضرایب است. هر چه این فاصله کوتاه‌تر باشد بهتر است و کمترین مقدار $\boldsymbol{\beta}$ را $\boldsymbol{\beta}^*$ می‌نامیم و در محاسبه بردار بازده از آن استفاده می‌کنیم. حال برای محاسبه رابطه ۴، از یک تقریب خطی در $\boldsymbol{c}^*$ استفاده می‌کنیم. این تقریب خطی طبق رابطه ۵ تعریف می‌شود.

$$g^L(\boldsymbol{c}\mid\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{c}^*\mid\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}^*)^T\,\nabla_c g(\boldsymbol{c}^*\mid\boldsymbol{x}) \qquad (۵)$$

شکل ۳ تابع چگالی احتمال بردار تصادفی بازده را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود فرض می‌شود که بردارهای تصادفی بازده دارای توزیع نرمال می‌باشد و از یکدیگر مستقل‌اند.



شکل۳. تابع چگالی احتمال $g^L(c\mid x)$

امید ریاضی و واریانس رابطه بالا به ترتیب طبق روابط ۶ و ۷ بدست می‌آیند.

$$E(g^L) = t + (\bar{c} - \boldsymbol{c}^*)^T \nabla_c g(\boldsymbol{c}^* | \boldsymbol{x}) \qquad (۶)$$

$$\mathrm{var}(g^L) = \nabla_c g(\boldsymbol{c}^* | \boldsymbol{x})^T \mathbf{C} \nabla_c g(\boldsymbol{c}^* | \boldsymbol{x}) \qquad (۷)$$

حال با توجه به روابط بیان شده، می‌توان با استاندارد کردن رابطه ۴، با استفاده از تقریب تابع $g(\boldsymbol{c} \mid \boldsymbol{x})$، به رابطه زیر رسید.

$$prob\left\{\frac{g^L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}) - E(g^L)}{\sqrt{\mathrm{var}(g^L)}} \geq \frac{-(\bar{c} - \boldsymbol{c}^*)^T \nabla_c g(\boldsymbol{c}^* | \boldsymbol{x})}{(\nabla_c g(\boldsymbol{c}^* | \boldsymbol{x})^T \mathbf{C} \nabla_c g(\boldsymbol{c}^* | \boldsymbol{x}))^{1/2}}\right\} \geq 1 - \alpha \qquad (۸)$$

و با توجه به این‌که $\frac{g^L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}) - E(g^L)}{\sqrt{\mathrm{var}(g^L)}}$ نشان‌دهنده متغیر تصادفی با میانگین صفر و واریانس یک است، محدودیت احتمالی را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\frac{-(\bar{c} - \boldsymbol{c}^*)^T \nabla_c g(\boldsymbol{c}^* | \boldsymbol{x})}{(\nabla_c g(\boldsymbol{c}^* | \boldsymbol{x})^T \mathbf{C} \nabla_c g(\boldsymbol{c}^* | \boldsymbol{x}))^{1/2}} \leq \Phi^{-1}(1-\alpha) \qquad (۹)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود در رابطه فوق دیگر بردار غیر قطعی $\boldsymbol{c}$ نداریم و در عوض، در این رابطه از $\boldsymbol{c}^*$ و $\bar{\boldsymbol{c}}$ استفاده شده است. حال با طرفین وسطین کردن رابطه بالا و قرار دادن این تابع به عنوان محدودیت مدل بهینه‌سازی (رابطه ۳)، مدل بهینه‌سازی برای بدست آوردن مقدار تخصیص بهینه بدست می‌آید (طبق رابطه ۱۰).

$$\begin{aligned} &\max \quad g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}^*) \\ &\text{s.t} \\ &(\bar{c} - \boldsymbol{c}^*)^T \nabla_c g(\boldsymbol{c}^* | \boldsymbol{x}) \geq \Phi^{-1}(1-\alpha)(\nabla_c g(\boldsymbol{c}^* | \boldsymbol{x})^T \mathbf{C} \nabla_c g(\boldsymbol{c}^* | \boldsymbol{x}))^{1/2} \qquad (۱۰) \\ &\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{x} = 1 \\ &\boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

این مدل، تحت عنوان مدل خروجی تعریف می‌شود. در این مدل غیر خطی، $\boldsymbol{x}$ متغیر تصمیم است که بیان‌گر مقدار تخصیص سرمایه به هر سهم می‌باشد. در این مدل مقدار بردار $\boldsymbol{c}^*$ طبق رابطه ۱۱ تعیین می‌شود. این رابطه را نیز رابطه ورودی می‌نامیم که به عنوان ورودی مدل بالا مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$c^{k+1} = \bar{c} - \frac{\mathbf{C}\ \nabla_c g(c^k \mid x)\boldsymbol{\beta}^k}{(\nabla_c g(c^k \mid x)^T \mathbf{C}\ \nabla_c g(c^k \mid x))^{1/2}} - \frac{\mathbf{C}\ \nabla_c g(c^k \mid x)\ (g(c^k \mid x) - t)}{(\nabla_c g(c^k \mid x)^T \mathbf{C}\ \nabla_c g(c^k \mid x))} \qquad (۱۱)$$

در رابطه بالا $\boldsymbol{\beta}^k$، نشان‌دهنده کم‌ترین فاصله تابع تا میانگین ضرایب است که طبق رابطه ۱۲ محاسبه می‌شود.

$$\boldsymbol{\beta}^k = -\frac{(c^* - \bar{c})^T \nabla_c g}{(\nabla_c g^T \mathbf{C}\ \nabla_c g)^{1/2}} \qquad (۱۲)$$

۵- الگوریتم حل

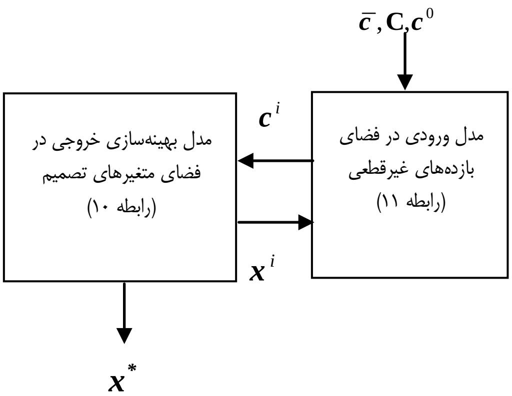
با توجه به روابط معرفی شده، در این بخش، جزئیات الگوریتم حل طبق شکل ۴ ارائه می‌شود. الگوریتم شامل دو گام بهینه‌سازی خروجی و ورودی است. مدل بهینه‌سازی ورودی در فضای بازده تصادفی و مدل بهینه‌سازی خروجی در فضای متغیر تصمیم مساله تعریف شده است. گام‌های این الگوریتم به شرح زیر است.

۱) با یک x^0 و c^0 اختیاری و اولیه شروع می‌کنیم. بردار تخصیص سرمایه اولیه می‌تواند با مولفه‌های برابر($x^0 = \frac{1}{n}$)، بردار ضرایب اولیه به صورت $c^0 = \bar{c} - \delta$ و $t^0 = g(x^0, \bar{c} - \delta)$ باشند.

۲) با توجه به مقادیر x^{i-1} و t^{i-1}، مقدار c^i را با توجه به رابطه ۱۱ بدست می‌آوریم.

۳) مقدار x^i جدید را با داشتن بردار c^i با استفاده از مدل برنامه‌ریزی غیر خطی (طبق رابطه۱۰) بدست می‌آوریم.

۴) گام‌های ۲ و ۳ را آن قدرتکرار می‌کنیم تا شرایط معیار توقف احراز شود.



شکل ۴. مدل بازگشتی مسائل خروجی و ورودی

ل

ازم به ذکر است که از آن‌جا که در این پژوهش، سرمایه‌گذار مایل به سرمایه‌گذاری بیش از ۲۰ درصد کل سرمایه در هر سهم نبود، به مدل برنامه‌ریزی غیرخطی محدودیت زیر نیز اضافه گردیده است.

$$x_i \leq 0.2 \quad \forall i, i = 1, 2, \ldots, 10 \qquad (۱۳)$$

۶- یافته‌های تحقیق

در این بخش، نتایج حل مدل ارائه می‌گردد. ابتدا با توجه به بازدهی پنج ساله شرکت‌ها (۱۳۹۰ تا ۱۳۹۴) میانگین بازده و همچنین ماتریس کوواریانس محاسبه می‌شود. از ماتریس کوواریانس هم در مرحله اول و هم در مرحله دوم یعنی در مدل بهینه‌سازی استفاده می‌شود. ماتریس کوواریانس بدست آمده طبق جدول ۲ می‌باشد. لازم به ذکر است که در این پژوهش از تابع مطلوبیت ریسک گریز برای نشان دادن عکس‌العمل سرمایه‌گذار نسبت به ریسک استفاده شده است که این تابع یک تابع مقعر[۳۳] است و به‌صورت $g(x) = 1 - e^{-c^T x}$ است. همچنین ریسک پذیرفته شده در این پژوهش در سطح $\alpha = 0.05$ است. گرادیانت این تابع نسبت به بردار c نیز به صورت $\nabla_c g(c^* \mid x) = x \,.\, e^{-c^T x}$ است که در هر تکرار با توجه به مقادیر x و c محاسبه می‌گردد.

جدول۲. ماتریس کوواریانس بازده ۵ ساله شرکت‌ها

0.74593	0.36105	0.64699	0.6277	0.51022	0.41376	0.1988	0.03972	0.27288	-0.066
0.36105	0.27346	0.40939	0.39737	0.29857	0.14948	0.20606	0.07702	0.17257	0.00696
0.64699	0.40939	0.70585	0.67059	0.58269	0.20018	0.3241	0.14957	0.27048	0.01419
0.6277	0.39737	0.67059	0.64183	0.54022	0.241	0.3012	0.13209	0.26551	0.00649
0.51022	0.29857	0.58269	0.54022	0.53471	0.06762	0.27195	0.16207	0.19815	0.03493
0.41376	0.14948	0.20018	0.241	0.06762	0.75812	-0.0557	-0.0748	0.16635	-0.0926
0.1988	0.20606	0.3241	0.3012	0.27195	-0.0557	0.215	0.12339	0.11159	0.05324
0.03972	0.07702	0.14957	0.13209	0.16207	-0.0748	0.12339	0.11687	0.03689	0.06591
0.27288	0.17257	0.27048	0.26551	0.19815	0.16635	0.11159	0.03689	0.11915	-0.0088
-0.066	0.00696	0.01419	0.00649	0.03493	-0.0926	0.05324	0.06591	-0.0088	0.04808

بردار ضرایب اولیه به صورت $c^0 = \bar{c} - \delta$ بدست آمده است. البته این مقدار به منزله نقطه شروع می‌باشد و بدیهی است که می‌توان از هر بردار ضریب اولیه‌ای برای شروع استفاده کرد. از آن‌جا که الگوریتم در تکرار سوم به هم‌گرایی رسیده است، نتایج بدست آمده طبق جدول ۳ می‌باشد.

جدول ۳. مقدار ضریب بازده در تکرارهای مختلف

شماره	نام شرکت	$\bar{c}$	c^0	c^1	c^2
۱	ایران ترانسفو	1.0251	0.161429	0.0914	-0.22695
۲	بانک اقتصاد نوین	0.467433333	-0.05551	-0.11801	-0.30279
۳	بانک تجارت	0.634033333	-0.20612	-0.35517	-0.68265
۴	بانک سینا	0.592333333	-0.20881	-0.35953	-0.67806
۵	بانک ملت	0.743066667	0.01183	-0.05375	-0.32712
۶	سایپا	0.873033333	0.002333	0.431605	0.202247
۷	سرمایه‌گذاری غدیر	0.718166667	0.254484	0.282651	0.150742
۸	فولاد مبارکه اصفهان	0.340533333	-0.00133	0.134244	0.049312
۹	مخابرات ایران	0.233633333	-0.11155	-0.16583	-0.30259
۱۰	ملی صنایع مس ایران	0.124866667	-0.09441	0.10933	0.095916
	β^k			1.247	1.191

بردار مقدار تخصیص سرمایه در تکرار اول به‌صورت اختیاری معادل $x^0 = \frac{1}{n}$ در نظر گرفته شده است. نتایج بدست آمده از بردار تخصیص سرمایه در هر تکرار طبق جدول ۴ می‌باشد.

جدول ۴. تخصیص سرمایه در تکرارهای مختلف

شماره	نام شرکت	x^0	x^1	x^2
۱	ایران ترانسفو	0.1	0.15	0.15
۲	بانک اقتصاد نوین	0.1	0.1	0.1
۳	بانک تجارت	0.1	0	0
۴	بانک سینا	0.1	0	0
۵	بانک ملت	0.1	0.15	0
۶	سایپا	0.1	0.15	0.15
۷	سرمایه‌گذاری غدیر	0.1	0.15	0.15
۸	فولاد مبارکه اصفهان	0.1	0.15	0.15
۹	مخابرات ایران	0.1	0	0.15
۱۰	ملی صنایع مس ایران	0.1	0.15	0.15

جدول ۵ نتیجه نهایی بهینه‌سازی سبد سهام را نشان می‌دهد. همچنین در ستون آخر این جدول، مقدار واقعی بازدهی در سال ۱۳۹۵ نشان داده شده است. این ستون به این دلیل قرار داده شده است تا بتوان کیفیت جواب

و به عبارتی قدرت پیش‌بینی مدل را بر اساس بازدهی واقعی دوره جدید ارزیابی نمود. طبق این جدول سهام‌های بانک تجارت، بانک سینا، بانک ملت و سایپا بدترین بازده و سهام‌های ملی صنایع مس ایران، مخابرات ایران و فولاد مبارکه اصفهان بهترین بازدهی را داشته‌اند.

جدول ۵. نتیجه نهایی تخصیص سرمایه با استفاده از الگوریتم دو مرحله‌ای و بررسی کیفیت جواب

شماره	نام شرکت	مقدار تخصیص	ضریب بازده	بازده واقعی سال ۱۳۹۵
۱	ایران ترانسفو	0.15	-0.22695	-0.0245
۲	بانک اقتصاد نوین	0.1	-0.30279	-0.2285
۳	بانک تجارت	0	-0.68265	-0.4112
۴	بانک سینا	0	-0.67806	-0.2856
۵	بانک ملت	0	-0.32712	-0.4092
۶	سایپا	0.15	0.202247	-0.3745
۷	سرمایه‌گذاری غدیر	0.15	0.150742	-0.2007
۸	فولاد مبارکه اصفهان	0.15	0.049312	0.0392
۹	مخابرات ایران	0.15	-0.30259	0.1064
۱۰	ملی صنایع مس ایران	0.15	0.095916	0.3257

۷- نتیجه‌گیری

پژوهش حاضر در پی بهینه‌سازی سبد سهام ده شرکت برگزیده بورس اوراق بهادار است. بدین منظور با استفاده از یک الگوریتم دو مرحله‌ای با در نظر گرفتن بازده احتمالی و با استفاده از یک تابع مطلوبیت ریسک-گریز، تخصیص سرمایه انجام شد. پیش‌تر حنفی‌زاده و پونامبالام (۲۰۰۹) نشان دادند که استفاده از تابع مقعر در الگوریتم دو مرحله‌ای، نتایج بهتری را نسبت به تابع محدب ارائه می‌کند. بدین منظور در این پژوهش از یک تابع مطلوبیت مقعر استفاده گردید. نوآوری پژوهش حاضر در استفاده از تابع مطلوبیت $g(x)=1-e^{-c^T x}$ به عنوان تابع هدف و اضافه کردن محدودیت سقف سرمایه‌گذاری در سهام می‌باشد. چنان‌چه محدودیت سقف سرمایه‌گذاری اعمال نگردد ممکن است کل سرمایه تنها به یک و یا تعداد معدودی سهم تخصیص یابد که این مساله ریسک سرمایه‌گذاری را بسیار بالا می‌برد. بنابراین لازم است با در نظر گرفتن این محدودیت، ریسک سبد سهام کاهش داده شود که در این پژوهش لحاظ شده است. همچنین این الگوریتم برای اولین بار در یک مساله بهینه‌سازی پرتفوی سهام در بورس اوراق بهادار تهران مورد استفاده قرار گرفته است.

با توجه به نتایج جدول ۵ بازده پرتفوی سهام با ضرب مقدار بازدهی واقعی در سال ۱۳۹۵ در مقادیر تخصیص هر سهم بدست می‌آید و برابر با ۰/۰۴۲- می‌باشد. با بررسی بازدهی شرکت‌ها در سال ۱۳۹۵ در می-

یابیم که هفت شرکت دارای بازدهی واقعی منفی هستند. با توجه به این موضوع، بازدهی سبد سهام با توجه به الگوریتم به‌کار رفته در این پژوهش، بازدهی مناسبی بوده است؛ چرا که این الگوریتم از قرار گرفتن سهام بانک تجارت با بازدهی۰/۴۱۲-، بانک سینا با بازدهی ۰/۲۸۵- و بانک ملت با بازدهی ۰/۴۰۹- در سبد سهام جلوگیری کرده است. این بدین مفهوم است که مقدار تخصیص این سه سهم برابر با صفر بوده است. نکته حائز اهمیت آن است که این سه شرکت جزو چهار شرکتی هستند که بدترین بازدهی را در بین کل شرکت‌ها در سال ۱۳۹۵ داشته‌اند و این قدرت بالای تفکیک الگوریتم دو مرحله‌ای را نشان می‌دهد. همچنین چنان‌چه وزن ۰/۱ را برای هر سهم در نظر می‌گرفتیم، بازده سبد سهام معادل ۰/۱۴۶- می‌شد که در مقایسه با نتایج این الگوریتم ۰/۱۰۲ کمتر است. بنابراین نتایج بدست آمده از الگوریتم بکار رفته در این پژوهش از وزن‌دهی یکسان شرکت‌ها بسیار بهتر بوده است.

از جمله محدودیت‌های پژوهش حاضر می‌توان به نوسانات بازار سرمایه اشاره کرد، به‌طوری که در سال ۱۳۹۲ به علت افزایش قیمت ارز، شاهد رشد قابل توجهی در بازدهی شرکت‌ها بودیم. این مساله ثبات ماتریس کواریانس را به خطر می‌اندازد و می‌تواند در نتایج تاثیر گذارد. همچنین بررسی‌ها نشان می‌دهد در برخی از موارد، شرکت‌هایی وجود دارند که در طول دوره پنج ساله روند مناسبی داشته‌اند، اما در سال ۱۳۹۵ بازدهی نامناسبی داشته‌اند. بدین منظور برای توسعه الگوریتم بکار رفته در این پژوهش پیشنهاد می‌شود امکان استفاده از متغیرهای کیفی که بتواند برخی جنبه‌های رفتاری بازار را بسنجد، مورد مطالعه قرار گیرد و با توسعه الگوریتم و بررسی کیفیت جواب‌ها، نتیجه با الگوریتم فعلی مقایسه گردد.

فهرست منابع

* Ayub, U., Shah, S. Z. A., & Abbas, Q. (2015). Robust analysis for downside risk in portfolio management for a volatile stock market. Economic Modelling, 44, 86-96.
* Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (1998). Robust convex optimization. Mathematics of operations research, 23(4), 769-805.
* Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (1999). Robust solutions of uncertain linear programs. Operations research letters, 25(1), 1-13.
* Bertsimas, D., & Sim, M. (2006). Tractable approximations to robust conic optimization problems. Mathematical Programming, 107(1-2), 5-36.
* Branger, N., & Larsen, L. S. (2013). Robust portfolio choice with uncertainty about jump and diffusion risk. Journal of Banking & Finance, 37(12), 5036-5047.
* Chen, C., & Kwon, R. H. (2012). Robust portfolio selection for index tracking. Computers & Operations Research, 39(4), 829-837.
* Chen, W., & Tan, S. (2009). Robust portfolio selection based on asymmetric measures of variability of stock returns. Journal of computational and applied mathematics, 232(2), 295-304.
* Chen, W., Sim, M., Sun, J., & Teo, C. P. (2010). From CVaR to uncertainty set: Implications in joint chance-constrained optimization. Operations research, 58(2), 470-485.
* Chen, X., Sim, M., & Sun, P. (2007). A robust optimization perspective on stochastic programming. Operations Research, 55(6), 1058-1071.
* Chochola, O., Hušková, M., Prášková, Z., & Steinebach, J. G. (2014). Robust monitoring of CAPM portfolio betas II. Journal of Multivariate Analysis, 132, 58-81.

* El Ghaoui, L., Oustry, F., & Lebret, H. (1998). Robust solutions to uncertain semidefinite programs. SIAM Journal on Optimization, 9(1), 33-52.
* Fernandes, B., Street, A., Valladão, D., & Fernandes, C. (2016). An adaptive robust portfolio optimization model with loss constraints based on data-driven polyhedral uncertainty sets. European Journal of Operational Research, 255(3), 961-970.
* Gabrel, V., Murat, C., & Thiele, A. (2014). Recent advances in robust optimization: An overview. European journal of operational research, 235(3), 471-483.
* Ghaoui, L. E., Oks, M., & Oustry, F. (2003). Worst-case value-at-risk and robust portfolio optimization: A conic programming approach. Operations research, 51(4), 543-556.
* Goldfarb, D., & Iyengar, G. (2003). Robust portfolio selection problems. Mathematics of operations research, 28(1), 1-38.
* Halldórsson, B. V., & Tütüncü, R. H. (2003). An interior-point method for a class of saddle-point problems. Journal of Optimization Theory and Applications, 116(3), 559-590.
* Han, Y., Li, P., & Xia, Y. (2016). Dynamic robust portfolio selection with copulas. Finance Research Letters.
* Hanafizadeh, P., & Ponnambalam, K. (2009). Asset allocation using reliability method. Mathematical and Computer Modelling, 50(1), 21-31.
* Hanafizadeh, P., & Seifi, A. (2004). A unified model for robust optimization of linear programs with uncertain parameters. Transactions on Operational Research, 16, 25-45.
* Kakouris, I., & Rustem, B. (2014). Robust portfolio optimization with copulas. European Journal of Operational Research, 235(1), 28-37.
* Kolm, P. N., Tütüncü, R., & Fabozzi, F. J. (2014). 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. European Journal of Operational Research, 234(2), 356-371.
* Li, P., Han, Y., & Xia, Y. (2016). Portfolio optimization using asymmetry robust mean absolute deviation model. Finance Research Letters, 18, 353-362.
* Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. The journal of finance, 7(1), 77-91.
* Moon, Y., & Yao, T. (2011). A robust mean absolute deviation model for portfolio optimization. Computers & Operations Research, 38(9), 1251-1258.
* Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. Journal of risk, 2, 21-42.
* Sadjadi, S. J., Gharakhani, M., & Safari, E. (2012). Robust optimization framework for cardinality constrained portfolio problem. Applied Soft Computing, 12(1), 91-99.
* Tütüncü, R. H., & Koenig, M. (2004). Robust asset allocation. Annals of Operations Research, 132(1), 157-187.
* Xidonas, P., Hassapis, C., Soulis, J., & Samitas, A. (2017a). Robust minimum variance portfolio optimization modelling under scenario uncertainty. Economic Modelling, 64, 60-68.
* Xidonas, P., Mavrotas, G., Hassapis, C., & Zopounidis, C. (2017b). Robust multiobjective portfolio optimization: A minimax regret approach. European Journal of Operational Research.
* Ziemba, W. T., & Mulvey, J. M. (1998). Worldwide asset and liability modeling (Vol. 10). Cambridge University Press

یادداشت‌ها

[1] Hanafizadeh & Ponnambalam
[2] Markowitz
[3] Bayesian
[4] Stochastic optimization

[5] Robust optimization
[6] Rockafellar & Uryasev
[7] Value at risk (VAR)
[8] Gabrel et al
[9] Ghaoui et al
[10] Halldórsson & Tütüncü
[11] Goldfarb & Iyengar
[12] Second-order cone programming (SOCP)
[13] Tütüncü & Koenig
[14] Chen et al
[15] Chen & Tan
[16] Moon & Yao
[17] Chen & Kwon
[18] Chochola et al
[19] Functional Capital Asset Pricing Model (FCAPM)
[20] Ayub et al
[21] Kakouris & Rustem
[22] Copulas
[23] Conditional value at risk (CVaR)
[24] Han et al
[25] Li et al
[26] Chen et al
[27] Asymmetry robust mean absolute deviation
[28] Fernandes et al
[29] Xidonas et al
[30] Robust multi objective portfolio optimization
[31] Conventional minimax regret
[32] Replace
[33] Concave