فصلنامــه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گــذاری
سال نهم/ شماره سی‌وسوم/ بهار ۱۳۹۹

ارزیابی عملکرد مدل گارچ تحقق‌یافته برای برآورد واریانس شرطی شاخص بورس تهران•

اسمعیل ابونوری
استاد اقتصادسنجی و آماراجتماعی، گروه اقتصاد دانشگاه سمنان، سمنان، ایران
Esmaiel.abounoori@semnan.ac.ir

محمد امین زابل
دانشجوی دکترای علوم اقتصادی، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران (نویسنده مسئول)
M.zabol@semnan.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۶/۱۲/۰۲ تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۳/۰۶

چکیده

برآورد تلاطم دارایی‌های مالی کاربرد فراوان در علم مالی دارد. از آنجاکه واریانس شرطی برگرفته‌شده از مدل گارچ میتواند سنجه مناسبی برای برآورد تلاطم باشد، این مدل‌ها از اهمیت بالایی برخوردار هستند. از کاربردهای برآورد واریانس شرطی می‌توان به ارزش گذاری اختیار معامله، انتخاب پورتفوی بهینه و مدیریت ریسک اشاره نمود. یکی از جدیدترین روش‌های برآورد واریانس شرطی، روش گارچ تحقق‌یافته می‌باشد که در آن واریانس شرطی و تلاطم تحقق‌یافته درون‌دوره‌ای به‌صورت همزمان مدلسازی می‌شود. در این مقاله واریانس شرطی با روش‌های GARCH، EGARCH و GJR-GARCH و همچنین مدل RGARCH با دو معیار مختلف از تلاطم تحقق یافته درون دوره‌ای شاخص کل بورس تهران در فاصله زمانی آبان سال ۱۳۸۸ تا مهر ۱۳۹۵ محاسبه و در نهایت مقایسه شده است. برای ارزیابی خوبی برازش از مقدار تابع درست‌نمایی استفاده شده است: با توجه به این معیار، مدل‌های گارچ تحقق‌یافته از خوبی برازش بالاتری بر داده‌های درون نمونه برخوردار بوده‌اند. برای ارزیابی دقت پیش بینی واریانس شرطی نیز از روش پنجره غلتان با دو تابع زیان MSE و QLIKE استفاده شده است. نتایج حاکی از آن است که مدل‌های گارچ تحقق‌یافته چه در برازش داده و چه در پیش‌بینی واریانس شرطی(تلاطم) شاخص بورس تهران از دقت بیشتری برخوردار هستند. از این رو استفاده از مدل گارچ تحقق یافته مدل در کارهای عملی نظیر ارزش‌گذاری و مدیریت ریسک، به دقیق‌تر شدن برآوردها منجر می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مدل گارچ تحقق‌یافته، بورس تهران، ارزیابی مدل‌های گارچ.

• این مقاله از رساله دکتری محمد امین زابل، تحت راهنمایی دکتر اسمعیل ابونوری در دانشگاه سمنان استخراج شده است.

۱- مقدمه

تمایز بین نااطمینانی[۱]، نوسان پذیری[۲]، ریسک[۳] و تلاطم[۴] مساله‌ای پیچیـده مـی‌باشـد. بـرای تمـایز تعریـف می‌توان به تعریف کلاسیک و قدیمی فرانک نایت[۵] رجوع نمود. نااطمینانی زمانی است که چندین پیامد برای یک اتفاق در نظر گرفته می‌شود اما نمیتوان احتمالی برای هر پیامد در نظر گرفت. از طرف دیگر، در تعریف ریسـک، میزان احتمال هر پیامد مشخص میشود. با این تعاریف تلاطم همسو با ریسک بوده که معیاری جهت اندازه‌گیری تغییرات محتمل یا تحرکات احتمالی فراهم می‌آورد.

محاسبه تلاطم دارایی‌های مالی کاربرد بسزایی در علم مالی دارد. از کاربردهای برآورد تلاطـم مـی‌تـوان بـه ارزش گذاری اختیار معامله، انتخاب پورتفو بهینه و مدیریت ریسک اشاره نمود. واریانس، انحراف معیار، واریـانس شرطی و یا تمامی شاخص‌هایی از این قبیل، در واقع جانشینی برای تلاطم و ابزاری برای بـرآورد آن مـی‌باشـند. امروزه در بسیاری از پژوهش‌های علمی و عملی از واریانس شرطی برآورد شده از مدل‌هـای خـانواده گـارچ، بـه عنوان برآوردی از تلاطم استفاده می‌نمایند.

در مدل‌های گارچ استاندارد، به‌منظور پیش‌بینی واریانس شرطی روزانه، تنها از داده‌های روزانه بـازده سـهام استفاده می‌شود. ازآنجایی‌که اطلاعات به‌دست‌آمده از بازده روزانه در مقایسه با معیارهای متفاوتی که از بازده‌های درون روزی به دست می‌آید کمتر می‌باشد، مجموعه اطلاعاتی مدل‌های استاندارد گارچ محدود اسـت. بـه‌عـلاوه ازآنجایی‌که مدل‌های گارچ بر پایه میانگین متحرک با وزن کاهشی بناشده است، این مـدل‌هـا بـرای واکـنش بـه میزان تلاطم، کمی کند عمل مـی‌نماینـد (اندرسـون و دیگـران ۲۰۰۳)[۶]. بنـابراین گرایشـی بـرای وارد نمـودن معیارهای تحقق‌یافته از واریانس در چارچوب مدل‌های گارچ به وجود آمد. انگل (۲۰۰۲) پیشـنهاد وارد نمـودن معیارهای واریانس تحقق‌یافته را به‌عنوان متغیر برون‌زا درون مدل‌های گارچ داد. از معایب این تصریح این اسـت که موجب می‌شود دوره پیش‌بینی واریانس شرطی یک‌روزه باشد. اخیراً هانسن و دیگـران[۷] مـدلی بـا نـام گـارچ تحقق‌یافته ارائه دادند که چارچوبی واحد برای مدلسازی مشترک معیار تلاطم تحقق‌یافته و واریانس شـرطی در نظر می‌گیرد.

مدل گارچ تحقق‌یافته چندین ویژگی مثبت دارد. با بکار گیری روش حداکثر راست‌نمایی، بـرآورد آن سـاده است. می‌تواند دربرگیرنده یک ساختار ARMA هم برای واریانس شرطی و هم برای واریانس تحقـق‌یافتـه باشـد. جدای از این ویژگی‌ها، مشخص نیست که چرا مدل گارچ تحقق‌یافته باید دارای برتـری در پـیش‌بینـی خـارج از نمونه باشد. بر اساس اصل امساک[۸]، مدل‌های ساده‌تر معمولاً پیش‌بینی بهتری با فرض یکسانی اطلاعـات نسـبت به مدل‌های پیچیده ارائه می‌دهند. در مورد گارچ تحقق‌یافته می‌بایست گفت کـه یـک مـدل AR(1)-Realized GARCH(1,1) دارای نه پارامتر بوده که باید برآورد شود. درهرصورت این مدل پیچیده‌تر از مدل گارچ معمولی با ۵ پارامتر است.

در این مقاله با استفاده از داده‌های درون‌روزی شاخص بورس تهران، ضمن برآورد مدل گارچ تحقق‌یافته، این مدل را با دیگر مدل‌های مرسوم گارچ از قبیل GARCH، EGARCH، GJR-GARCH مقایسه می‌نماییم. مقایسه به دو صورت خواهد بود. ابتدا میزان برازش داده‌های درون‌نمونه را در نظر می‌گیـریم. سـپس دقـت پـیش‌بینـی

کنندگی واریانس شرطی برون نمونه‌ای را با استفاده از رویکرد پنجره غلطان و استفاده از یک تابع زیان برای انتخاب دقیق‌ترین مدل بررسی می‌نماییم. ادامه این مقاله به‌صورت ذیل می‌باشد. در بخش دوم پیشینه نظری بررسی‌شده و سیر پیشرفت مدل‌ها را بیان می‌نماییم و سپس مروری بر مطالعات تجربی که بر مدل گارچ تحقق‌یافته صورت پذیرفته است را همراه با نتایج بازگو می‌کنیم. روش پژوهش و چگونگی مقایسه بین مدل‌ها در بخش سوم ارائه می‌شود. در بخش چهارم نیز مدل برآورد گشته و در نهایت در فصل پنج نتایج آن تشریح می‌گردد.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

امروزه مدل‌های گارچ کاربرد وسیعی در علم مالی دارد. به عنوان مثال در مورد ارزش گذاری اختیار معامله، از آخرین مطالعات انجام شده می‌توان به کارهای بدسکو و دیگران [۹](۲۰۱۵) و هوانگ و دیگران [۱۰](۲۰۱۷) اشاره نمود که در مطالعه دومی نشان داده شد که مدل گارچ تحقق برای قیمت گذاری اختیار معامله شاخص S&P عملکرد مناسبتری از سایر مدلهای ارزشگذاری دارد. در بحث بهینه سازی پورتفو نیز پژوهش‌های رنکویچ و دیگران [۱۱] (۲۰۱۶) و ساهامخدام [۱۲] و دیگران(۲۰۱۸) نمونه‌ای از پژوهش‌هایی هستند که مدل گارچ در آن برای بهینه سازی پورتفو استفاده شده است.

برای توضیح نحوه پیدایش مدل‌های گارچ می‌بایست فرض ناهمسانی واریانس در رگرسیون خطی را نقض نمود. چنانچه این فرض نقض شود برآوردگرها همچنان بدون تورش بوده اما دیگر دارای حداقل واریانس نمی‌باشند. انگل (۱۹۸۲) نوع خاصی از واریانس ناهمسانی را معرفی می‌نماید که در آن واریانس جزء اخلال تابعی از توان دوم جزء اخلال می‌باشد. معرفی این نوع واریانس ناهمسانی، ابزار بسیار مهمی در اختیار اقتصاددانان و به‌خصوص محققان در حوزه اقتصادسنجی مالی برای سنجش و برآورد واریانس شرطی یک سری به روش پارامتریک گذاشت. برای توضیح، یک مدل AR(1) را همانند رابطه (۱) برای بازده دارایی در نظرگیرید.

$$r_t = \mu_0 + \mu_1 r_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (۱)$$

که در آن ε_t یک متغیر هم‌توزیع نابسته و دارای میانگین صفر می‌باشد. در این صورت ممکن است واریانس شرطی ε_t در طول زمان متغیر بوده و تابعی از شوک‌های دوره قبل باشد. این مدل ابتدا توسط انگل (۱۹۸۲)[۱۳] ارائه شد. دلیل ارائه چنین مدلی این بود که بااینکه مشاهده می‌شود ε_tها از هم مستقل می‌باشند اما توان دوم آن‌ها با یکدیگر رابطه دارند. انگل رابطه زیر را برای واریانس شرطی ε_t پیشنهاد داد که برای p وقفه مدل زیر ARCH(p) شناخته می‌شود.

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + a_p\varepsilon_{t-p}^2 \qquad (۲)$$

در مطالعات تجربی مشاهده‌شده است که مرتبه ARCH بزرگ می‌باشد که منجـر بـه ازدیـاد تعـداد پارامترهـای تخمین می‌شود درنتیجه بولرسلو (۱۹۸۶)[۱۴](Bollerslev, 1986) برای رفع این مشکل مدل زیر را پیشنهاد داد.

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} b_j \sigma_{t-j}^2 \qquad (۳)$$

که در آن a_i و b_j برای حصول اطمینان از اینکه واریانس مثبت باشد، مثبت فرض می‌شوند. این مـدل بـه عنـوان مدل ARCH تعمیم یافته یعنی GARCH(p,q) شناخته می‌شود که اگر q برابر با صـفر باشـد، ایـن مـدل همـان ARCH(p) خواهد شد. بر اساس مدل GARCH(1,1) واریانس شرطی ε_t یعنی σ_t^2 بـا تـوان دوم جـزء اخـلال در دوره قبل و واریانس دوره قبل رابطه دارد.

ازآنجاکه در مدل GARCH، ε_tها با توان دوم در معادله ظاهر می‌شوند، علامت این شوک‌ها تأثیری روی واریانس شرطی ندارد. این در حالی است که مشاهده‌شده شوک‌های منفی و یا اخبار بد، واریانس را بیشتر از شـوک‌هـای خوب یا اخبار خوب افزایش می‌دهد. بدین منظور نلسون (۱۹۹۱)[۱۵] مـدل گـارچ نمـایی یـا همـان EGARH را معرفی نمود که به‌صورت رابطه زیر می‌باشد.

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i \frac{|\varepsilon_{t-i}| + \gamma_i \varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^{q} b_j h_{t-j} \qquad (۴)$$
$$h_t = \ln \sigma_t^2$$

در این مدل وقتی ε_t مثبت است اثر کل شوک به‌اندازه $(1+\gamma_t)\varepsilon_t$ می‌باشد و اگر اخبار بد وجود داشته باشد اثر کل شوک به‌اندازه قدر مطلق $(1-\gamma_t)\varepsilon_t$ خواهد بود. اگر قرار باشد اخبار بد دارای واریانس بالاتری باشند انتظـار داریم γ عدد منفی باشد. این مدل جدای از اینکه اثرات اخبار خوب و بد را در واریانس متفاوت در نظر می‌گیرد، این مزیت را نسبت به مدل GARCH دارا می‌باشد که بدون هیچ قیدی برای ضـرایب، واریـانس همـواره مثبـت خواهد بود.

راه دیگری برای در نظر گرفتن اثر اخبار خوب و بد روی واریانس استفاده از متغیر مجازی بـه شـکل رابطـه زیـر می‌باشد.

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i S_{t-i} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} b_j \sigma_{t-j}^2 \qquad (۵)$$

در رابطه (۵) S_{t-i} یک متغیر مجازی بوده که اگر ε_{t-i} مثبت باشد برابر با صفر و اگر منفـی باشـد برابـر بـا یـک خواهد بود. در این صورت اثر یک شوک مثبت برابر $a_i\varepsilon_{t-i}^2$ و اثر یک شوک منفی برابر $(a_i+\gamma_i)\varepsilon_{t-i}^2$ که بـا فـرض تأثیر بیشتر اخبار بد روی واریانس، انتظار می‌رود γ_i مثبت باشد. این مدل که توسط گلوستن، جگاناتان و رانکـل (۱۹۹۳)[۱۶] (Glosten, Jagannathan, & Runkle, 1993) ارائه شد به مدل GJR شناخته می‌شود.

پس‌ازاین مدل‌های اولیه، مدل‌ها و تصریح‌های زیادی برای مدلسازی نوسان شرطی معرفی شدند. برخی از پژوهشگران سعی درآوردن متغیر توضیحی دیگر به‌غیراز توان دوم شوک‌ها در مدل بودند که این مدل‌ها به GARCH-X معروف شدند. در سال ۲۰۰۳ انگل برای اولین بار از معیارهای تلاطم تحقق‌یافته برای توضیح واریانس شرطی استفاده نمود. این تلاش باآنکه یک بهبود در توضیح دهندگی مدل‌های GARCH بود، اما در تصریح مدل عملاً الگوی خاصی اضافه نشده بود. درواقع تلاطم تحقق‌یافته به‌صورت یک متغیر برون‌زا به مدل GARCH اضافه‌شده بود.

انگل و گالو (۲۰۰۶)[۱۷] اولین مدل کامل در این مورد را معرفی نمود. واژه کامل ازاین‌جهت که وی سعی نمود با در نظر گرفتن تلاطم‌های تحقق‌یافته به‌عنوان یک متغیر پنهان، این متغیرها را به‌صورت درون‌زا وارد مدلسازی نماید. این مدل به مدل خطای ضربی MEM[۱۸] معروف شد.

مدل دیگر در همین رابطه مدل HEAVY ارائه‌شده توسط شپارد و شفارد (۲۰۱۰)[۱۹] بوده که از بعد معادلات ریاضی حالتی برگرفته از مدل MEM می‌باشد. برخلاف مدل‌های GARCH سنتی این مدل‌ها بر مبنای فرآیندهای تلاطم پنهان چند متغیره عمل می‌نمایند. برای مثال در یک مدل MEM از سه فرآیند تلاطم پنهان استفاده می‌شود و در مدل HEAVY حداقل از دو فرآیند تلاطم پنهان استفاده می‌شود.

دریکی از جدیدترین کارهای انجام‌گرفته در این زمینه هانسن و دیگران (۲۰۱۲)[۲۰] با وارد نمودن معادله سوم به یک مدل GARCH که در آن معادله سعی در مدلسازی تلاطم تحقق‌یافته به‌صورت همزمان و درون‌زا دارد، واریانس شرطی را تابعی از تلاطم تحقق‌یافته در نظر می‌گیرد. مدل معرفی‌شده توسط ایشان به فرم خطی به‌صورت رابطه زیر می‌باشد.

$$r_t = \sqrt{h_t}\,\varepsilon_t \qquad (۶)$$

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \gamma x_{t-1} \qquad (۷)$$

$$x_t = \xi + \varphi h_t + \tau(\varepsilon_t) + u_t \qquad (۸)$$

که در آن r_t بازده دارایی، x_t تلاطم تحقق‌یافته، h_t واریانس شرطی، $\varepsilon_t \sim iid(0,1)$ ، $u_t \sim iid(0,\sigma_t^2)$ و $\tau(.)$ نیز تابع اهرم[۲۱] بوده که نحوه تأثیرپذیری تلاطم را از شوک بیان می‌کند. وجه تمایز مدل گارچ تحقق یافته و مدل گارچ در معادله سوم یعنی رابطه (۸) می‌باشد. این معادله به معادله سنجش[۲۲] نیز معروف است چرا که سنجه تحقق یافته مشاهده شده را به تلاطم پنهان مرتبط می‌سازد. در واقع با وجود معادله سوم در این چارچوب و با توجه به اینکه واریانس درون روزی اطلاعات بیشتری برای پیش‌بینی واریانس شرطی میسر می‌نماید، انتظار می‌رود عملکرد این مدل از مدلهای گارچ معمول بالاتر باشد. همچنین در این تصریح خطی با لحاظ شرط u=0 و در نظر داشتن $\tau(.) = \varepsilon_t^2$ در معادله (۸) و جایگذاری در معادله (۷)، مدل به معادله مدل *GARCH(1,1)* تبدیل می‌شود. بنابراین می‌توان گفت این تصریح از مدل گارچ نوع عمومی تری از مدل‌های گارچ بوده و با لحاظ قیدهایی همچنان می‌تواند به مدل‌های گارچ مرسوم تبدیل شود.

تلاطم تحقق‌یافته در این چارچوب از معاملات با فرکانس بالاتر به دست می‌آید. به‌عنوان‌مثال زمانی که مدل گارچ را به‌صورت روزانه برآورد می‌نماییم، تلاطم تحقق‌یافتـه از داده‌هـای معـاملات روزانـه بـه دسـت مـی‌آیـد. ساده‌ترین معیار تلاطم تحقق‌یافته، واریانس تحقق‌یافته می‌باشد که از مجموع مجذور بـازده‌هـای درون روزی بـا فرکانس زمانی یکسان (به‌عنوان‌مثال ۵ دقیقه) بدست می‌آید؛ بنابراین اگر فرکانس زمانی داده‌ها را بـا Δ و مـدت زمان باز بودن بازار را با I نمایش دهیم، آنگاه به اندازه $M = I/\Delta$ داده در یک روز خواهیم داشت. معیار واریـانس تحقق یافته برای روز t به صورت ذیل محاسبه میشود:

$$RV_t = \sum_{i=1}^{M} r_{i,t}^{2} \qquad (۹)$$

که در آن $r_{i,t}$ i امین بازده در طول روز t را نمایش میدهد. یکی از ایرادات استفاده از روش فوق این است که اگر در یک فرکانس، بازده به‌شدت افزایش یابد و دیگر حتی در تمام مدت ثابت باشد، واریانس به‌شـدت افـزایش پیدا می‌کند؛ بنابراین این مدل به‌اصطلاح در برابر جهش‌ها استوار نیست. برناردوف و دیگـران (۲۰۰۴)[۲۳] راه‌حـل دیگری را پیشنهاد دادند که در مقابل جهش‌ها تا حدودی استوار است. این معیار به شرح ذیل می‌باشد:

$$BV_t(\Delta) = \mu^{-2} \frac{M}{(M-1)} \sum_{i=2}^{M} |r_{t,i}||r_{t,i-1}| \qquad (۱۰)$$

که در آن $\mu = \sqrt{2/\pi} \cong 0.79788$ و $M = I/\Delta$ که تعداد داده‌ها در یک روز را نشان می‌دهـد. در ایـن مقالـه از این دو معیار برای برآورد واریانس تحقق‌یافته استفاده می‌نماییم.

تصریح مدل رابطه (۶) تا (۸) کـه بـه مـدل RGARCH معـروف شـده اسـت، مـورد اسـتقبال پژوهشـگران قرارگرفته و در سال‌های اخیر بر این مبنا مطالعاتی صورت گرفته است. تیان و هاموری (۲۰۱۵)[۲۴] بـا اسـتفاده از این روش و روش‌های GARCH سنتی نوسانات نـرخ بهـره در بـازار یـورو-یـن را موردمطالعـه قراردادنـد. نتـایج پژوهش آنان حاکی از آن بود که مدل RGARCH در پیش‌بینـی واریـانس شـرطی عملکـرد بهتـری نسـبت بـه مدل‌های گارچ سنتی دارد.

شارما و ویپول (۲۰۱۶)[۲۵] در مقاله‌ای تحت عنوان «پیش‌بینی تلاطم بازار سهام با استفاده از مـدل RGarch: شواهد بین‌المللی» توانایی پیش‌بینی مدل RGARCH را برای ۱۶ شاخص سهام بررسی نمـوده طـی دوره‌ای ۱۴ ساله بررسی نمودند. نتایج حاکی از آن است که انتخاب معیار تصمیم برای عملکرد مدل‌ها، در نتـایج تأثیرگـذار است به‌نحوی‌که با هر معیار، مدل متفاوتی به‌عنوان مدل برتر انتخاب می‌شود.

در این مقاله قصد داریم عملکرد مدل RGARCH را در پیش‌بینی واریانس شرطی شاخص بـورس تهـران را در مقایسه با سایر مدل‌های خانواده گارچ بررسی نماییم. نحوه مدلسازی و چگونگی انجام این مقایسـه در بخـش بعد تشریح گشته است.

۳- روش شناسی پژوهش

۳-۱- تصریح مدل

در این بخش مدل را تصریح می‌نماییم. در مدل‌های گارچ یک معادله میانگین وجود دارد که این معادله در این مقاله به صورت یک مدل خودرگرسیون با یک وقفه به صورت معادله زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$r_t = \mu_0 + \mu_1 r_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (۱۱)$$

که در آن r_t بازده روزانه دارایی مالی است. این تصریح مدل موجب می‌شود که فرض نماییم بازده مقداری ثابت، به همراه ضریبی از بازده روز معاملاتی قبل و شوک مربوط به آن روز می‌باشد. همچنین برای برآورد مدل‌های گارچ سنتی معادلات (۳) تا (۵) را با یک وقفه در شوک و واریانس شرطی به صورت مدلهای زیر برآورد می‌نماییم.

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + b_1\sigma_{t-1}^2 \qquad \text{GARCH(1,1)}$$

$$h_t = a_0 + a_1\frac{|\varepsilon_{t-1}| + \gamma\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + b_1 h_{t-1} \quad , h_t = \ln\sigma_t^2 \qquad \text{EGARCH(1,1)}$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma S_{t-1}\varepsilon_{t-1}^2 + b_1\sigma_{t-1}^2 \qquad \text{GJR-GARCH(1,1)}$$

برای برآورد مدل گارچ تحقق‌یافته از فرم لگاریتمی آن استفاده می‌نماییم که معادلات واریانس درون روزی و واریانس شرطی به نحو ذیل تصریح میگردد.

$$\begin{aligned} h_t &= \omega + \beta h_{t-1} + \eta x_{t-1} \quad , h_t = \ln\sigma_t^2 \\ x_t &= \xi + \varphi h_t + \tau(\varepsilon_t) + u_t \qquad \text{RGARCH} \\ \tau(\varepsilon_t) &= \lambda_1\varepsilon_t + \lambda_2(\varepsilon_t^2 - 1) \end{aligned}$$

که در آن x_t لگاریتم واریانس تحقق یافته و همچنین h_t فرم لگاریتمی وارانس شرطی دوره t می‌باشد.
مدل‌های گارچ سنتی را به روش حداکثر راست‌نمایی برآزش می‌نماییم. برای مدل گارچ تحقق یافته با فرض استقلال u_t و ε_t معادلات فوق را تواما با روش حداکثر راست نمایی به صورت معادلات ذیل برآزش مینماییم.

$$\log L(\{r_t, x_t\}_{t=1}^n;\theta) = \sum_{t=1}^n \log f(r_t, x_t \mid \Phi_{t-1}) \qquad (۱۲)$$

$$f(r_t, x_t \mid \Phi_{t-1}) = f(r_t \mid \Phi_{t-1}) f(x_t \mid \Phi_{t-1}) \qquad (۱۳)$$

نکته حایز اهمیت در این مقاله آن است که بجای x از دو معیار RV و BV معرفی شده در معادلات (۹) و (۱۰) استفاده می‌نماییم. در این صورت مدل گارچ تحقق یافته در این مدل با استفاده از دو معیار تلاطم تحقـق یافتـه درون روزی محاسبه می‌گردد.

۳-۲- ارزیابی مدل

یک مدل قابل اعتماد علاوه بر اینکه باید به‌خوبی بر داده‌ها برآزش شود، باید از دقت پیش‌بینی کنندگی مناسبی نیز برخوردار باشد. به همین جهت در این پژوهش با دو معیار مدل‌ها را ارزیابی می‌نماییم:

- ارزیابی درون نمونه با استفاده از مقدار تابع درست‌نمایی برای معیار خوبی برازش
- ارزیابی برون نمونه با معیارهایی مانند MSE و QLIKE برای دقت پیش‌بینی واریانس شرطی

۳-۲-۱- ارزیابی برآزش مدل داده‌های درون نمونه

ازآنجاکه برای برآورد مدل مورد از روش حداکثر راست‌نمایی استفاده می‌شـود، بـرای بررسـی معیـار خـوبی برازش میتوان از مقدار تابع حداکثر راست‌نمایی در نقطه بهینه استفاده نمـود. چنانچـه در مـدلی تـابع حـداکثر راست‌نمایی بیشتر باشد، آن مدل نسبت به مدل پایه داده‌های درون نمونـه را بهتـر بـرازش داده اسـت. در نظـر داشته باشید در مدل گارچ تحقق‌یافته ازآنجاکه تابع حداکثر راست‌نمایی یک معادله اضافه را در برمـی‌گیـرد، بـا مدل‌های سنتی گارچ قابل‌مقایسه نمی‌باشد. هانسن (۲۰۱۲) تابع حداکثر راست‌نمایی جزئی را برای مقایســه بـا سایر مدل‌های گارچ پیشنهاد داد. این تابع با استفاده از روابط (۱۲) و (۱۳) به‌صورت رابطه زیر نوشته می‌شود.

$$l(r,x) = \underbrace{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}[\log(2\pi)+\log(h_t)+r_t^2/h_t]}_{=l(r)} + \underbrace{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}[\log(2\pi)+\log(\sigma_u^2)+u_t^2/\sigma_u^2]}_{=l(x|r)} \qquad (۱۴)$$

که در آن $l(r)$ تابع لگاریتم راست‌نمایی موردنظر بوده که قابل مقایسه با سایر مدل‌های گارچ سـنتی مـی‌باشـد. بنابراین بعد از برآورد مدل‌ها چنانچه قسمت اول رابطه (۱۴) یعنی مقدار تابع حداکثر راست‌نمایی جزئی در مدل گارچ تحقق یافته بیشتر از مقدار تابع حداکثر راست‌نمایی در سایر مدلهای گارچ باشد می‌توان نتیجه گرفت کـه مدل گارچ تحقق یافته به نحو بهتری بر روی داده‌های نمونه مورد بررسی برآزش یافته است و این مدل عملکـرد بهتری در برآزش درون نمونه‌ای دارد.

۳-۲-۲- ارزیابی دقت پیش‌بینی

برای بررسی دقت پیش‌بینی کنندگی مدل ما به داده‌های برون نمونه‌ای احتیاج داریـم. اسـتفاده از تکنیـک پنجره غلتان این ابزار را در اختیار ما قرار می‌دهد. در این روش از تکنیـک پنجـره غلتـان بـرای انتخـاب نمونـه پیش‌بینی استفاده می‌شود. پنجره غلتان به ایـن صـورت اسـت کـه تعـدادی ثابـت از مشـاهدات را بـرای نمونـه

مدلسازی انتخاب نموده که به آن طول پنجره گویند. سپس از اولین مشاهده به تعداد طول پنجره مشاهده مـدل برآورد گشته و واریانس را برای روز بعد خارج از پنجره محاسبه نموده و با مقدار واقعی مقایسه می‌نماییم. سپس مشاهدات را یکی به جلو برده و تا آخر مشاهدات همین عمل را تکرار می‌نماییم. با استفاده از توابع زیـانی نظیـر MSE و QLIKE عملکرد مدل‌ها مقایسه می‌شود. ازآنجاکه متغیر تلاطم واقعی پنهان است، از معیارهای تلاطم روزانه درون روزی به‌عنوان پروکسی استفاده می‌شود. پاتون[۲۶] (۲۰۱۱) نشان داد که تنها دو تـابع زیـان MSE و QLIKE در بین ۹ تابع زیانی که به‌صورت گسترده استفاده می‌شود، در صورت وجـود خطـای انتخـاب پروکسـی استوار هستند؛ بنابراین در این پژوهش میتوان از یکی از این دو تـابع زیـان اسـتفاده نمـود. ایـن دو تـابع زیـان به‌صورت رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\mathrm{MSE} = \mathrm{E}\left(\mathrm{l}_{1,k,t}\right) \quad , \quad \mathrm{l}_{1,k,t} = (\sigma_t^2 - \hat{\sigma}_t^2)^2 \qquad (۱۵)$$

$$\mathrm{QLIKE} = \mathrm{E}\left(\mathrm{l}_{2,k,t}\right) \quad , \quad \mathrm{l}_{2,k,t} = \log\left(\hat{\sigma}_t^2\right) + \frac{\sigma_t^2}{\hat{\sigma}_t^2} \qquad (۱۶)$$

برای برآوردی از σ_t^2 میتوان از معیارهای واریانس تحقق‌یافته استفاده نمود؛ اما ازآنجاکه معاملات در تمامی طـول روز انجام نمی‌شود، در صورت مقایسه واریانس تحقق‌یافته با واریانس شرطی روزانه، بخشی از آن دیده نمی‌شود. درواقع واریانس روزانه ضریبی از واریانس تحقق‌یافته درون‌روزی در زمان معاملات می‌باشد؛ یعنی $\sigma_t^2 = c \times RV$ که در آن c به‌صورت زیر برآورد می‌گردد (هانسن و لاند ۲۰۰۵).

$$\sigma_t^2 = \hat{c}.RV_t \quad , \hat{c} = \frac{n^{-1}\sum_{t=1}^{n}(r_t - \hat{\mu}_t)^2}{n^{-1}\sum_{t=1}^{n} RV_t} \qquad (۱۷)$$

که در رابطه بالا n تعداد روزها و $\hat{\mu}$ میانگین بازده روزانه در n روز میباشد. هر مدلی که در آن مقدار زیان توسط دو تابع زیان MSE و $QLIKE$ کمتر باشد، دقت بالاتری در پیشبینی واریانس شرطی بـرون نمونـه‌ای نسـبت بـه سایر مدل‌های مورد بررسی دارد.

۴- یافته‌های پژوهش

برای برآورد مدل، از داده‌های درون روزی شاخص بورس تهران در فاصله زمـانی آبـان سـال ۱۳۸۸ تـا مهـر ۱۳۹۵ استفاده شد. سپس مدل‌های GARCH، EGARCH و GJR-GARCH با استفاده از داده‌های روزانه فاصله یک‌روزه بسته شدن قیمت برآورد شد. همچنین مدل RGARCH با استفاده از دو معیار معرفی‌شده رابطـه (۹) و (۱۰) برای تلاطم تحقق‌یافته برآورد گشت. معادله میانگین برای مدل‌های فوق یک مدل خودرگرسـیون مرتبـه اول در نظر گرفته شد. در جدول (۱) آمار توصیفی شاخص بورس تهران به تصویر کشیده شده است.

جدول (۱) آمار توصیفی شاخص بورس تهران

آماره	کمینه	میانه	میانگین	بیشینه	چولگی	کشیدگی	انحراف معیار
شاخص	-۵,۵۲	۰,۰۵	۰,۱۳	۵,۴۰	۷,۷۲	۰,۳۱	۰,۷۵

در جدول (۲) مقدار برآورد برای ضرایب به همراه ارزش احتمال آن (داخل پرانتز) به نمایش درآمده است قابـل مشاهده است که ارزش احتمال برای تمامی ضرایب مدل‌های گارچ سنتی به غیر از عـرض از مبـدا کمتـر از ۵٪ میباشد، بنابراین در سطح معناداری ۵٪ این ضرایب معنادار هستند.

جدول (۲): نتایج برآورد مدل‌ها با تمام مشاهدات

ضریب	GARCH	EGARCH	GJR-GARCH	RV_GARCH	BV_GARCH
μ_0	۰,۰۰۰۲	۰,۰۰۰۲	۰,۰۰۰۳	۰,۰۰۰۶	۰,۰۰۰۶
	(۰,۳۹۶)	(۰,۰۶۹)	(۰,۲۰۳)	(۰,۰۰۴)	(۰,۰۰۵)
μ_1	۰,۳۹۰	۰,۳۴۰	۰,۳۷۹	۰,۲۵۱	۰,۲۷۶
	(۰,۰۰)	(۰,۰۰)	(۰,۰۰)	(۰,۰۰)	(۰,۰۰)
a_0	۰,۰۰۰۱	-۱,۱۰۲۶	۰,۰۰۰۱		
	(۰,۰۰)	(۰,۰۰)	(۰,۰۰)		
a_1	۰,۱۷۸	۰,۰۷۳	۰,۲۱۳		
	(۰,۰۰)	(۰,۰۰۰۲)	(۰,۰۰)		
b_1	۰,۷۵۴	۰,۸۸۸	۰,۷۶۶		
	(۰,۰۰)	(۰,۰۰)	(۰,۰۰)		
γ		۰,۳۶	-۰,۰۹		
		(۰,۰۰)	(۰,۰۰۹)		
ω				-۰,۹۶۹	-۱,۱۵۹
				(۰,۰۰)	(۰,۰۰)
η				۰,۲۳۱	۰,۲۴۲
				(۰,۰۰)	(۰,۰۰)
β				۰,۶۱۱	۰,۵۶۸
				(۰,۰۰)	(۰,۰۰)
λ_1				۰,۲۵۲	۰,۲۰۴
				(۰,۰۰)	(۰,۰۰)
λ_2				۰,۲۴۲	۰,۱۸۳
				(۰,۰۰)	(۰,۰۰)
φ				۱,۲۷۶	۱,۳۱۲
				(۰,۰۰)	(۰,۰۰)
ξ				۰,۰۹۱	۰,۰۳۰
				(۰,۶۹۳)	(۰,۹۲۵)

منبع: نتایج تحقیق

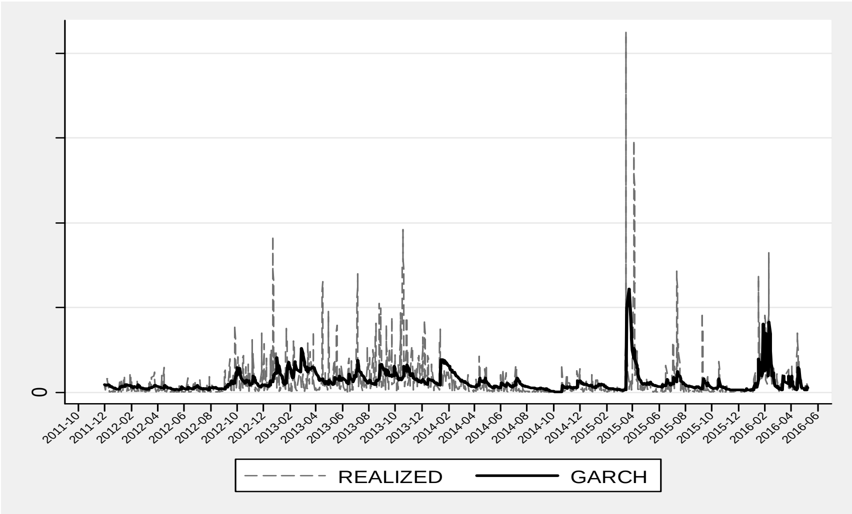
در جدول (۳) مقدار لگاریتم‌راست نمایی و رتبه مدل‌ها با توجه به برازش درون نمونه به تصویر کشیده شده است که برای مدل‌های گارچ تحقق یافته، مقدار تابع حداکثر راست‌نمایی جزئی در نظر گرفته شده است. با استفده از این معیار مدل RV-GARCH و BV-GARCH به ترتیب جایگاه اول و دوم را از لحاظ برآزش درون نمونه‌ای دارند. بنابراین مدل‌های گارچ تحقق‌یافته برای داده‌های درون نمونه عملکرد بهتری داشته است.

جدول (۳): مقدار لگاریتم راست نمایی و رتبه مدل‌ها با توجه به برازش درون نمونه

مدل	مقدار لگاریتم حداکثر راست‌نمایی	رتبه
GARCH	۵۵۹۴٫۹-	۳
EGARCH	۵۶۰۲٫۵-	۵
GJR-GARCH	۵۵۹۸٫۲-	۴
RV-GARCH	**۵۵۷۴٫۷-**	**۱**
BV-GARCH	۵۵۸۹٫۱۵-	۲

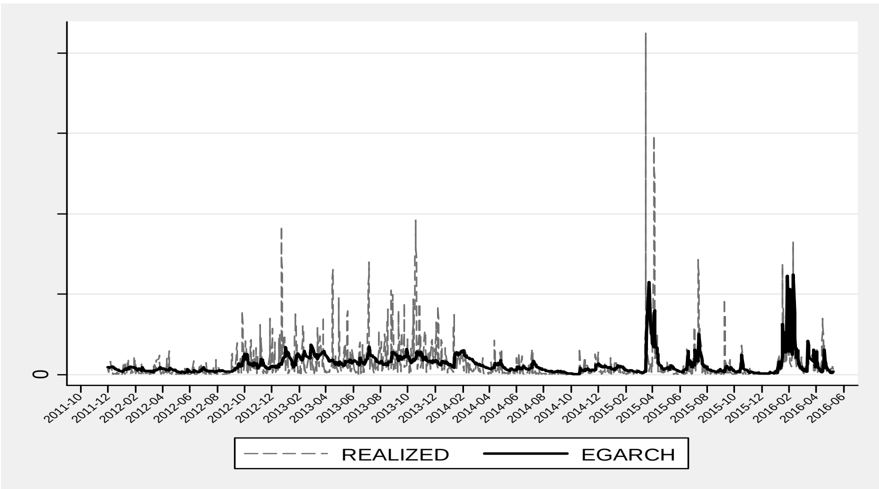
منبع: یافته‌های تحقیق

برای بررسی عملکرد مدل برای پیش‌بینی واریانس برون نمونه از تکنیک پنجره غلتان استفاده نمودیم. به این نحو که با استفاده از داده‌های ۵۰۰ روز اخیر واریانس دوره بعد را پیش‌بینی نموده و با واریانس تحقق‌یافته روز بعد مورد مقایسه قرار می‌دهیم. سپس پنجره را یک مشاهده به جلو برده و همین عمل را تکرار می‌نماییم. در نمودارهای زیر واریانس شرطی برآوردشده از مدل‌های گارچ و واریانس تحقق‌یافته از رابطه (۱۷) در کنار هم قابل مشاهده است. چون در تصاویر مقدار واریانس شرطی و واریانس تحقق یافته به طور نسبی همجهت با هم حرکت میکنند میتوان انتظار داشت مدل‌های گارچ عملکرد مناسبی برای پیشبینی تلاطم دارند. با این حال برای اندازه گیری دقت پیش‌بینی هر گدام از مدل‌های گارچ و انتخاب بهترین مدل برای پیش‌بینی تلاطم می‌بایست از معیارهای معرفی شده در بخش قبل استفاده نماییم. این معیارها در واقع میزان انحراف واریانس شرطی پیش-بینی شده از مدل‌های گارچ را با واریانس تحقق یافته به عنوان مرجعی برای تلاطم اندازه گیری نموده و هرچه این انحراف کمتر باشد، مدل مورد نظر از دقت بالاتری در پیش‌بینی واریانس برون نمونه برخوردار است.



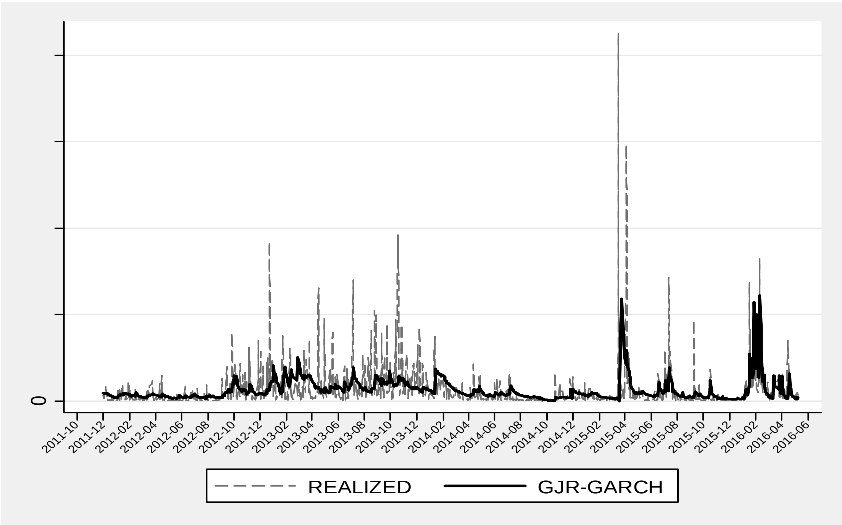
نمودار (۱): سری زمانی واریانس برآورد شده از روش گارچ در مقایسه با واریانس تحقق‌یافته

منبع: یافته‌های تحقیق



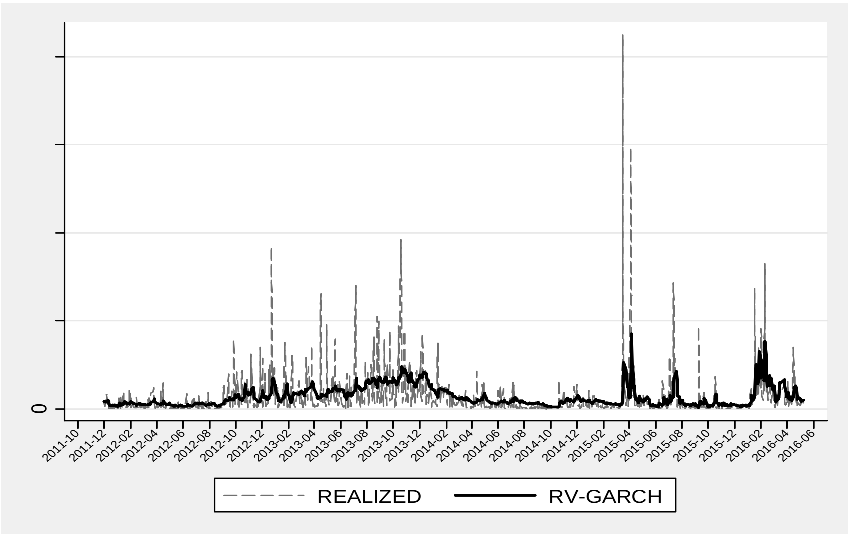
نمودار (۲): سری زمانی واریانس برآورد شده از روش گارچ نمایی در مقایسه با واریانس تحقق‌یافته

منبع: یافته‌های تحقیق



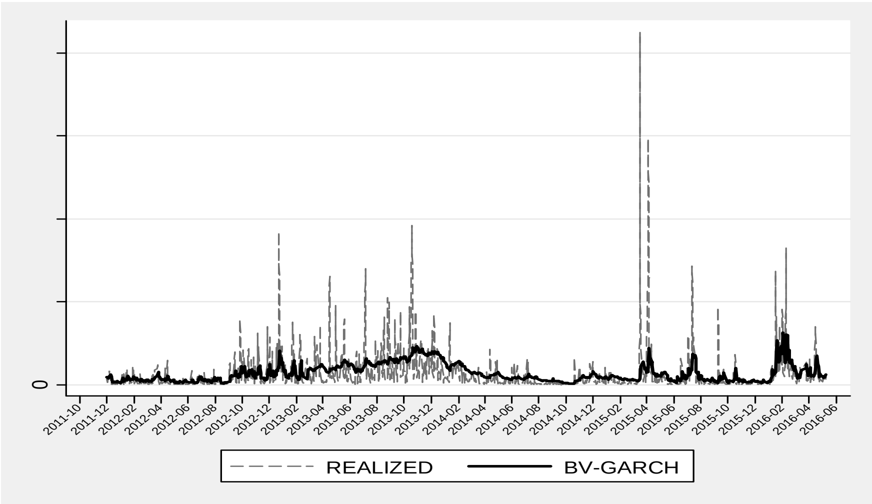
نمودار (۳): سری زمانی واریانس برآورد شده از روش گارچ جی‌جی‌آر در مقایسه با واریانس تحقق‌یافته

منبع: یافته‌های تحقیق



نمودار (۴): واریانس برآورد شده از گارچ تحقق‌یافته با واریانس RV در مقایسه با واریانس تحقق‌یافته

منبع: یافته‌های تحقیق



نمودار (۶): واریانس برآورد شده از گارچ تحقق‌یافته با واریانس BV در مقایسه با واریانس تحقق‌یافته

منبع: یافته‌های تحقیق

در جدول (۴) نتایج به‌دست‌آمده از دو تابع زیان رابطه (۱۵) و (۱۶) به نمایش در آمـده اسـت. از آنجـا کـه ایـن مقادیر میزان انحراف پیش‌بینی از واقعیت را اندازه‌گیری می‌نماید، هـر مـدلی کـه مقـادیر توابـع زیـان بـرای آن کمترین مقدار باشد، عملکرد بالاتری در پیش‌بینی واقعیت داشته است. مشاهده می‌شود در هر دو این توابع زیان مدل گارچ تحقق‌یافته بهترین عملکرد را داشته است. با استفاده از تابع زیان QLIKE بهترین مدل در پیشـبینی واریانس شرطی مدل BV-GARCH و پس از آن مدل RV-GARCH می‌باشد. در معیار MSE نیز بـه ترتیـب دو مدل RV-GARCH و BV-GARCH نیز مدلها با بهترین عملکرد می‌باشد.

جدول(۴): عملکرد مدل‌ها با استفاده از برآورد برون نمونه‌ای

مدل	MSE (*۱۰۰۰)	رتبه	Qlike	رتبه
GARCH	۰,۰۱۶۵۱	۵	۰,۰۰۳۵	۵
EGARCH	۰,۰۱۵۶۸	۳	۰,۰۰۳۳۹	۴
GJR-GARCH	۰,۰۱۶۴۳	۴	۰,۰۰۲۸۷	۳
RV-GARCH	۰,۰۱۵۵۶	۱	-۰,۰۰۳۸	۲
BV-GARCH	۰,۰۱۵۶۱	۲	-۰,۰۰۵۳	۱

منبع: نتایج تحقیق

بنابراین مشاهده نمودیم که مدل گارچ تحقق یافته هم در برآزش درون نمونه‌ای و هم در پیش‌بینی برون نمونه‌ای واریانس شرطی(تلاطم) از بالاترین عملکرد برخوردار بوده است. از آنجا که پیش‌بینی نادرست از ریسک دارایی‌های مالی، چه در بیش برآورد ریسک و چه در کم برآورد ریسک، برای سرمایه گذار هزینه در بر دارد، استفاده از گارچ تحقق یافته می‌تواند این هزینه را به حداقل رساند.

۵- نتیجه گیری و بحث

در این مقاله با استفاده از داده‌های درون روزی شاخص بورس تهران در فاصله زمانی آبان سال ۱۳۸۸ تا مهر ۱۳۹۵ به برآورد واریانس شرطی از روش‌های GARCH، EGARCH و GJR-GARCH و همچنین مدل RGARCH با استفاده از دو معیار RV وBV برای تلاطم درون روزی پرداختیم. یک مدل قابل اعتماد علاوه بر اینکه باید به‌خوبی بر داده‌ها برآزش شود، باید از دقت پیش‌بینی کنندگی مناسبی نیز برخوردار باشد. به همین جهت در این پژوهش با دو معیار مدل‌ها را ارزیابی نمودیم. معیار اول مقدار تابع راستنمایی برای معیار خوبی برازش بود که با توجه به نتایج مدل‌های گارچ تحقق‌یافته عملکرد بهتری برای برآزش داده‌های درون نمونه داشتند. در مورد دقت برآورد برون نمونه نیز با استفاده از روش پنجره غلتان و استفاده از دو تابع زیان MSE و QLIKE برای دقت پیش‌بینی واریانس شرطی به این نتیجه رسیدیم که مدل‌های گارچ تحقق‌یافته در پیش‌بینی واریانس شرطی عملکرد بهتری دارند.

بنابراین مشاهده نمودیم مدل‌های گارچ تحقق یافته هم در برآزش درون نمونه‌ای بهترین عملکرد را داشته و همچنین در پیش‌بینی برون نمونه‌ای نیز این مدل‌ها دقت بالاتری در پیش‌بینی واریانس شرطی به عنوان معیاری از تلاطم دارند. بنابراین پیشنهاد می‌شود به‌منظور برآورد بهتری از واریانس شرطی به عنوان جانشینی از تلاطم، از مدل‌های گارچ تحقق یافته به جای مدل‌های گارچ مرسوم استفاده گردد. ازآنجاکه برآورد واریانس در بسیاری از مباحث مدیریت ریسک و پورتفو عامل کلیدی به‌حساب می‌آید، لذا برآورد دقیق‌تر این ابزار به بهبود نتایج استفاده از مدل‌ها می‌انجامد. به عنوان مثال در بحث ارزشگذاری اختیار معامله، برآورد نادرست از واریانس شرطی، موجب قیمت گذاری اشتباه اختیار می‌شود. چنانچه واریانس شرطی بیش‌برآورد شود، قیمت اختیار بیش از مقدار واقعی و در صورت کم‌برآوردی واریانس شرطی، قیمت اختیار کمتر از ارزش واقعی ارزش‌گذاری خواهد شد. همچنین چنانچه از واریانس شرطی پیش‌بینی شده از مدلهای گارچ در بهینه سازی پورتو استفاده نماییم، برآورد دقیق‌تر واریانس شرطی منجر به افزایش کارایی پورتفو در بلند مدت می‌شود.

فهرست منابع

* Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X., & Labys, P. (2003). Modeling and Forecasting Realized Volatility. Econometrica, 71 (2), 579-625.
* Badescu, A., Elliott, R. J., & Ortega, J. P. (2015). Non-Gaussian GARCH option pricing models and their diffusion limits. European journal of operational research, 247(3), 820-830.
* Barndorff-Nielsen, O. E. (2004). Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps. Journal of Financial Econometrics, 2 (1), 1-37.

* Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. Journal of Econometrics ,31(3), 307-327.
* Engle, R. (2002). New Frontiers for Arch Models. Journal of Applied Econometrics, 17 (5), 425-446.
* Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. Econometrica, 50 (4), 987-1007.
* Engle, R. F., & Gallo, G. M. (2006). A multiple indicators model for volatility using intra-daily data. Journal of Econometrics, 131(1-2), 3-27.
* Glosten, L. R., Jagannathan, R., & Runkle, D. E. (1993). On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. Journal of Finance, 48 (5), 1779-1801.
* Hansen, P. R., & Lunde, A. (2005). A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH(1,1)?. Journal of Applied Econometrics, 20 (7), 873-889.
* Hansen, P. R., Huang, Z., & Shek, H. H. (2012). Realized GARCH: a joint model for returns and realized measures of volatility. Journal of Applied Econometrics, 27(6), 877-906.
* Huang, Z., Wang, T., & Hansen, P. R. (2017). Option Pricing with the Realized GARCH Model: An Analytical Approximation Approach. Journal of Futures Markets, 37(4), 328-358.
* Knight, F. (2013). Risk, uncertainty and profit. Wilmington: Vernon Press.
* Nelson, D. B. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A Nee Approach. Econometrica, 59 (2), 347-370.
* Patton, A. J. (2011). Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies. Journal of Econometrics, 160 (1), 246-256.
* Ranković, V., Drenovak, M., Urosevic, B., & Jelic, R. (2016). Mean-univariate GARCH VaR portfolio optimization: Actual portfolio approach. Computers & Operations Research, 72, 83-92.
* Sahamkhadam, M., Stephan, A., & Östermark, R. (2018). Portfolio optimization based on GARCH-EVT-Copula forecasting models. International Journal of Forecasting, 34(3), 497-506.
* Sharma, P. (2016). Forecasting stock market volatility using Realized GARCH model: International evidence. The Quarterly Review of Economics and Finance, 59, 222-230.
* Shephard, N., & Sheppard, K. (2010). Realising the future: forecasting with high-frequency-based volatility (HEAVY) models. Journal of Applied Econometrics, 25 (2), 197-231.
* Tian, S., & Hamori, S. (2015). Modeling interest rate volatility: A Realized GARCH approach. Journal of Banking and Finance, 61, 158-171.

یادداشت‌ها

[1]. Uncertainty.
[2]. Variability.
[3]. Risk.
[4]. Volatility.
[5]. Frank Knight (1921).
[6]. Andersen, Bollerslev, Diebold, & Labys, (2003)
[7]. Hansen, Huang, & Shek (2012)
[8]. principle of parsimony
[9]. Badescu, Elliott & Ortega.
[10]. Huang, Wang & Hansen
[11]. Ranković & others
[12]. Sahamkhadam
[13]. Engle (1982)

14. Bollerslev (1986)
15. Nelson (1991)
16. Glosten, Jagannathan & Runkle (1993)
17. Engle and Gallo
18. Multiplicative Error Model
19. Shephard and Sheppard
20. Hansen, Huang, & Shek (2012)
21. Leverage Function
22. Measurement Equation
23. Barndorff-Nielsen, O. E. (2004)
24. Shuairu Tian, Shigeyuki Hamori
25. Prateek Sharma and Vipul
26. patton