

## کاربرد توابع مفصل تودرتو برای تحلیل فراوانی چهارم‌تغیره خشکسالی‌های هواشناسی (مطالعه موردی: غرب ایران)

ذبیح الله خانی تملیه<sup>۱</sup>، حسین رضایی<sup>۲\*</sup>، رسول میرعباسی نجف آبادی<sup>۳</sup>

۱) دانشجوی دکترای مهندسی منابع آب، گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران.

۲) استاد گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران.

\* نویسنده مسئول مکاتبات: h.rezaie@urmia.ac.ir

۳) دانشیار گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۲۶

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۰۵

### چکیده:

خشکسالی هواشناسی نتیجه کاهش میزان بارندگی در یک دوره زمانی گسترده می‌باشد که بسته به نوع اقلیم آن منطقه، ممکن است در مقیاس زمانی هفته، ماه، سال و یا چندین سال حادث گردد. هدف اصلی این مطالعه، کاربرد توابع مفصل تودرتو، در تحلیل چهارم‌تغیره پدیده خشکسالی با استفاده از شاخص بارش استاندارد شده اصلاحی (SPI<sub>mod</sub>) است. بدین منظور، ابتدا با استفاده از شاخص مذکور خصوصیات خشکسالی شامل شدت، مدت، فاصله بین آغاز دو خشکسالی متوالی و پیک خشکسالی استخراج گردید. سپس توزیع‌های فراوانی مختلف بر متغیرهای مذکور برازش داده شد و توزیع حاشیه‌ای مناسب برای هر مشخصه خشکسالی مشخص گردید. بر این اساس برای متغیرهای شدت و مدت خشکسالی بترتیب توابع توزیع گاما و نمایی و برای متغیرهای فاصله بین آغاز دو خشکسالی متوالی و پیک خشکسالی، تابع مقادیر حدی بعنوان توابع توزیع حاشیه‌ای برتر شناسایی شدند. جهت تحلیل چهارم‌تغیره با استفاده از روش مفصل‌های تودرتو، متغیرهای مذکور دو به دو با هم جفت شدند و بر آنها ۹ تابع مفصل برازش داده شد. جهت تشخیص تابع مفصل برتر از معیار آکائیکه، حداکثر درست‌نمایی و ضریب نش - ساتکلیف استفاده گردید. نتایج نشان داد که تابع مفصل جوئی، تابع برتر برای ایجاد توزیع چندم‌تغیره در منطقه مورد مطالعه است. همچنین احتمالات توام و دوره‌های بازگشت توام برای ایستگاه‌های مورد مطالعه بر اساس مفصل جوئی محاسبه گردید. نتایج نشان داد که برای احتمال توام چهارم‌تغیره معادل ۰/۹، طولانی‌ترین خشکسالی‌ها در ایستگاه ارومیه و سقز با مدت ۹ ماه روی می‌دهد که از بین این دو ایستگاه شدت خشکسالی در ایستگاه سقز (۹/۴۵) بیشتر از ارومیه (۵/۶۰) است. همچنین پیک خشکسالی در ایستگاه سقز با مقدار ۹/۴۵ بیشتر از پیک خشکسالی در ایستگاه ارومیه با مقدار ۳/۸۲ می‌باشد. همچنین از بین ایستگاه‌های مورد مطالعه، بزرگترین شدت خشکسالی در احتمال ۰/۹ مربوط به ایستگاه کرمانشاه با شدت ۹/۹۴ در مدت ۶ ماه می‌باشد. یافته‌های این مطالعه نشان می‌دهد که روش تحلیل چهارم‌تغیره مشخصه‌های خشکسالی می‌تواند اطلاعات مفیدی جهت پیش‌بینی و برنامه‌ریزی برای مقابله با اثرات نامطلوب خشکسالی در اختیار مدیران و برنامه‌ریزان قرار دهد.

**کلید واژه‌ها:** احتمال توام؛ دوره بازگشت توام؛ تحلیل خشکسالی؛ شاخص بارش استاندارد شده اصلاحی

### مقدمه

(Wilhite and Glantz, 1985). در تحقیقات صورت

گرفته در زمینه خشکسالی، بیشترین تمرکز بر خشکسالی هواشناسی بوده است که این موضوع بدلیل وجود اطلاعات وسیع‌تر و کامل‌تر از متغیر بارش که فاکتور

خشکسالی نتیجه کمبود بارش نسبت به مقدار مورد انتظار یا نرمال منطقه در درازمدت است که به عنوان یک پدیده طبیعی در مناطق کم‌باران و پر باران رخ می‌دهد

کارگیری توابع مفصل ارشمیدسی به تحلیل خشکسالی هواشناسی در استان خوزستان پرداختند. Liu و همکاران (۲۰۱۰) با استفاده از داده‌های ۱۲۷ ایستگاه بارانسنجی در گوانگ دونگ چین، وضعیت خشکسالی را بررسی کرده و به ازاء دوره بازگشت یکسان، شدت و مدت خشکسالی ایستگاه‌ها را با هم مقایسه کردند. در نهایت مناطقی که دارای شدت و مدت خشکسالی بیشتری بودند را بعنوان مناطق با ریسک خشکسالی بالاتر معرفی کردند. Shiau و همکاران (۲۰۱۲) برای تحلیل دومتغیره خشکسالی در ۶ ایستگاه اصفهان، اهواز، تبریز، رشت، زاهدان و مشهد از توابع مفصل تجربی دومتغیره استفاده کردند. آنها از مقیاس‌های زمانی مختلف شاخص بارش استاندارد شده (SPI) برای استخراج شدت و مدت خشکسالی هواشناسی بهره بردند. نتایج نشان داد که در ایستگاه اهواز مقادیر شدت خشکسالی و مدت آن بر اساس مقیاس‌های مختلف کمتر بوده است، درحالی‌که بر اساس مقیاس‌های کوتاه مدت SPI، ایستگاه‌های تبریز، رشت و مشهد دارای بیشترین شدت و مدت خشکسالی بوده اند و بر اساس مقیاس‌های بلندمدت SPI، ایستگاه‌های اصفهان و زاهدان دارای بیشترین مقادیر شدت و مدت خشکسالی بوده‌اند. Mirabbasi و همکاران (۲۰۱۲) توزیع توأم شدت و مدت خشکسالی‌های ایستگاه بارانسنجی شرفخانه واقع در شمال غرب ایران را با استفاده از مفصل‌های دو بعدی مدل کردند. توزیع‌های گاما و نمایی به ترتیب بر شدت و مدت خشکسالی برازش داده شدند. هفت نوع تابع مفصل برای ایجاد توزیع دومتغیره شدت و مدت خشکسالی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد که مناسب ترین مفصل برای تحلیل دومتغیره شدت و مدت خشکسالی در ایستگاه شرفخانه، مفصل گالاموس می‌باشد. کاربرد توابع مفصل در مطالعات خشکسالی همچنان در حال گسترش است. این تحلیل‌ها بصورت دومتغیره، سه‌متغیره و چهارمتغیره بوده‌اند که می‌توان به مطالعات Amirataee و همکاران (۲۰۱۸) در بررسی شدت، مساحت و فراوانی

اصلی در بررسی خشکسالی هواشناسی است، می‌باشد (میراکبری و گنجی، ۱۳۹۵). مطالعات زیادی در زمینه تحلیل تک‌متغیره خشکسالی صورت گرفته است، در این مطالعات تأثیر همزمان متغیر یا متغیرهای همبسته دیگر در نظر گرفته نشده است. از طرفی، مشخصه‌های خشکسالی همبستگی قابل ملاحظه‌ای با یکدیگر دارند. به این معنی که تغییرات یک مشخصه بر مشخصه‌های دیگر خشکسالی اثر می‌گذارد. در این شرایط، تحلیل‌های تک‌متغیره که فقط اثر یک مشخصه را در نظر می‌گیرند، توصیف دقیقی از ماهیت خشکسالی در اختیار نمی‌گذارند. به همین دلیل، تحلیل‌های چندمتغیره از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. از طرف دیگر، مشکل عمده توزیع‌های دومتغیره کلاسیک، استفاده از یک خانواده یکسان برای توابع توزیع حاشیه‌ای است. برای مثال، امکان استفاده از توزیع‌های گاما و نمایی به عنوان توابع توزیع حاشیه‌ای برای متغیرهای همبسته، مانند شدت و مدت خشکسالی وجود ندارد. به منظور غلبه بر این مشکل، اخیراً هیدرولوژیست‌ها سعی در استفاده از توابع مفصل برای استخراج توابع توزیع چندمتغیره کرده‌اند (عباسیان و ابریشم چی، ۱۳۹۲). ایده ایجاد توابع مفصل در ابتدا توسط Sklar (۱۹۵۹) مطرح گردید و با استفاده از این روش، توزیع توأم متغیرهای تصادفی با توزیع‌های حاشیه‌ای غیرنرمال را استخراج کرد. De و Salvadori و Michele (۲۰۰۴) این توابع را ابتدا در مطالعات هیدرولوژی برای ایجاد یک مدل دومتغیره توصیف کننده شدت و مدت رگبار بکار بردند. تشکیل توزیع‌های چندمتغیره با استفاده از توابع مفصل می‌تواند برخی از مشکلات و دشواری‌های توصیف شده را تا حدی برطرف کند. در دو دهه اخیر، در زمینه تحلیل دومتغیره و چندمتغیره خشکسالی مطالعات زیادی انجام گرفته است که می‌توان به برخی موارد اشاره کرد. Mirakbari و همکاران (۲۰۱۰) با استفاده از آزمون گشتاورهای خطی مناطق همگن هیدرولوژیک را مشخص کردند و با به

خشکسالی حوضه دریاچه ارومیه در ایران، Ayantobo و همکاران (۲۰۱۸) در تحلیل سه‌متغیره شدت، مدت و پیک خشکسالی در چین، Sridhar و Thilakarathne (۲۰۱۸) در بررسی خصوصیات آبی خشکسالی در حوضه رودخانه مکونگ (شدت، مدت و پیک خشکسالی) در آسیای شرقی و Van de Vyver و Van den Bergh (۲۰۱۸) در بررسی متغیرهای شدت و مدت خشکسالی با استفاده از شاخص کمبود توأم (JDI) در اروپا اشاره کرد. هدف از پژوهش حاضر، تحلیل چهارمتغیره خشکسالی-های هواشناسی در غرب ایران می‌باشد. بدین منظور توزیع توأم از چهار مشخصه خشکسالی شامل شدت، مدت، فاصله آغاز بین دو خشکسالی متوالی و پیک خشکسالی که از سری زمانی شاخص بارش استاندارد شده اصلاحی ( $SPI^{mod}$ ) استخراج می‌گردد، با استفاده از توابع مفصل تودرتو، ایجاد می‌شود. سپس، بر اساس تابع توزیع توأم بدست آمده، مشخصات احتمالاتی خشکسالی مانند احتمالات توأم و دوره بازگشت‌های توأم مورد بررسی قرار می‌گیرد.

## مواد و روش‌ها

### منطقه مورد مطالعه

در این مطالعه، ابتدا داده‌های ماهانه بارش ۱۰ ایستگاه هواشناسی در غرب کشور طی دوره آماری ۲۰۱۷-۱۹۷۱ از سازمان هواشناسی دریافت گردید (شکل ۱). مشخصات ایستگاه‌ها در جدول (۱) ارائه شده است. سپس همگنی و وجود داده‌های مفقود مورد بررسی قرار گرفت که داده‌های ایستگاه‌های مورد مطالعه نیازی به تکمیل نداشتند و از همگنی برخوردار بودند. در ادامه با استفاده از شاخص بارش استاندارد شده اصلاحی ( $SPI^{mod}$ )، مشخصه‌های خشکسالی شامل متغیرهای شدت (Ds)، مدت (Dd)، فاصله زمانی بین آغاز دو خشکسالی متوالی (DI) و پیک خشکسالی (Dp) استخراج گردید. سپس موارد زیر بترتیب بررسی گردید: همبستگی

مشخصه‌های خشکسالی با معیار تاو کندال، برازش توزیع‌های حاشیه‌ای و انتخاب توزیع حاشیه‌ای برتر برای هر مشخصه خشکسالی، ایجاد توزیع‌های دو بعدی، سه بعدی و چهار بعدی و محاسبه پارامتر وابستگی توابع مفصل، انتخاب بهترین تابع مفصل برای هر ایستگاه، محاسبه احتمالات توأم و دوره‌های بازگشت توأم. برای انجام مراحل مذکور کدهای موردنیاز در محیط نرم‌افزار متلب نوشته شد. جهت تحلیل چهارمتغیره خشکسالی از ۹ تابع مفصل، شامل کلایتون، علی-میخائیل-حق، فارلی-گامبل-مورگنسترن، فرانک، گامبل، گامبل-هوگارد، پلاکت، فیلیپ-گامبل و جوئی استفاده شد. بدین منظور، با روش تودرتو ابتدا توابع حاشیه‌ای دو متغیره که بیشترین همبستگی را داشتند، با یکدیگر جفت شدند، سپس توزیع حاشیه‌ای متغیر سوم با یک تابع مفصل دوبعدی به توزیع توأم حاصل از مرحله قبل متصل و توزیع سه‌متغیره بدست آمد. در نهایت توزیع حاشیه‌ای متغیر چهارم با یک مفصل دوبعدی به توزیع سه‌متغیره حاصل از مرحله قبل متصل و توزیع چهارمتغیره ایجاد شد که کد آن در محیط نرم‌افزار متلب نوشته شد. الگوریتم و فلوچارت مراحل کار در شکل (۲) ارائه شده است.

### تحلیل چهارمتغیره خشکسالی

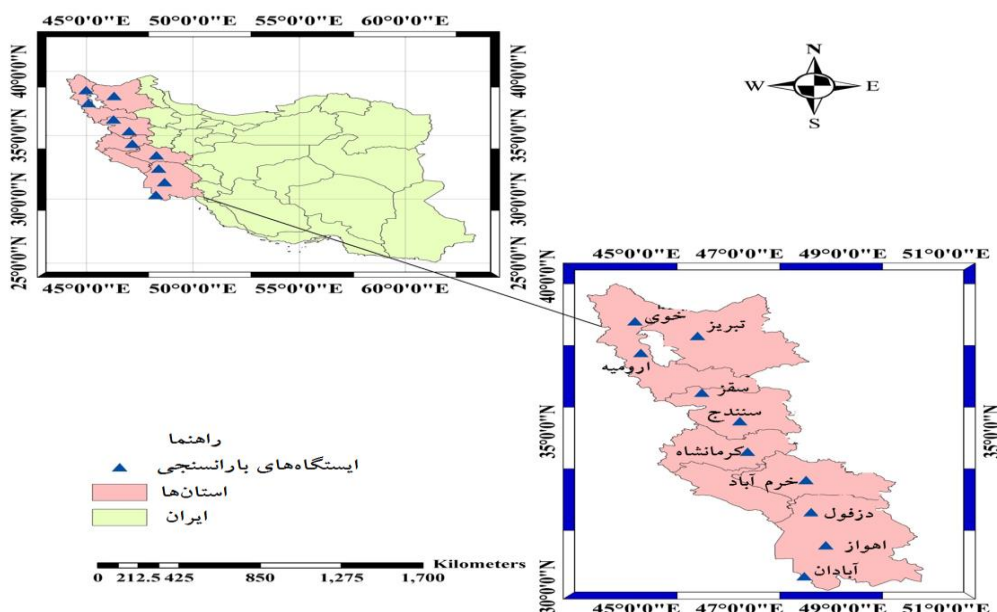
#### شاخص $SPI^{mod}$ و استخراج مشخصه‌های خشکسالی

در هر رویداد خشکسالی با تغییر مقیاس زمانی در محاسبه SPI، مدت خشکسالی و مقدار SPI متناظر، تغییر می‌کند. بنابراین، این شاخص ممکن است به طور کامل و دقیق نتواند شرایط خشکسالی را نشان دهد و با انتخاب مقیاس‌های زمانی مختلف در بعضی مواقع نتایج متناقضی ارائه می‌دهد. این مسئله گاهی باعث سردرگمی استفاده-کنندگان از این شاخص می‌شود (Kao and Govindaraju, 2010). به علاوه SPI‌های بلندمدت نمی‌توانند ظهور خشکسالی‌ها را دقیقاً مشخص کنند و خشکسالی‌های

بصورت  $X_w^{month}$  نشان داده می‌شود که در آن بالانویس month نشان دهنده یکی از ماههای ژانویه، فوریه، . . . و دسامبر می‌باشد. بعبارت دیگر، سری زمانی بارش در بازه زمانی w ماهه ( $w=1,2, \dots, 12$ )،  $X_w(t)$ ، به ۱۲ زیر سری تقسیم می‌شود:

$$X_w^{month}(g) = X_w(12(g-1)+m) = X_w(t) \quad (1)$$

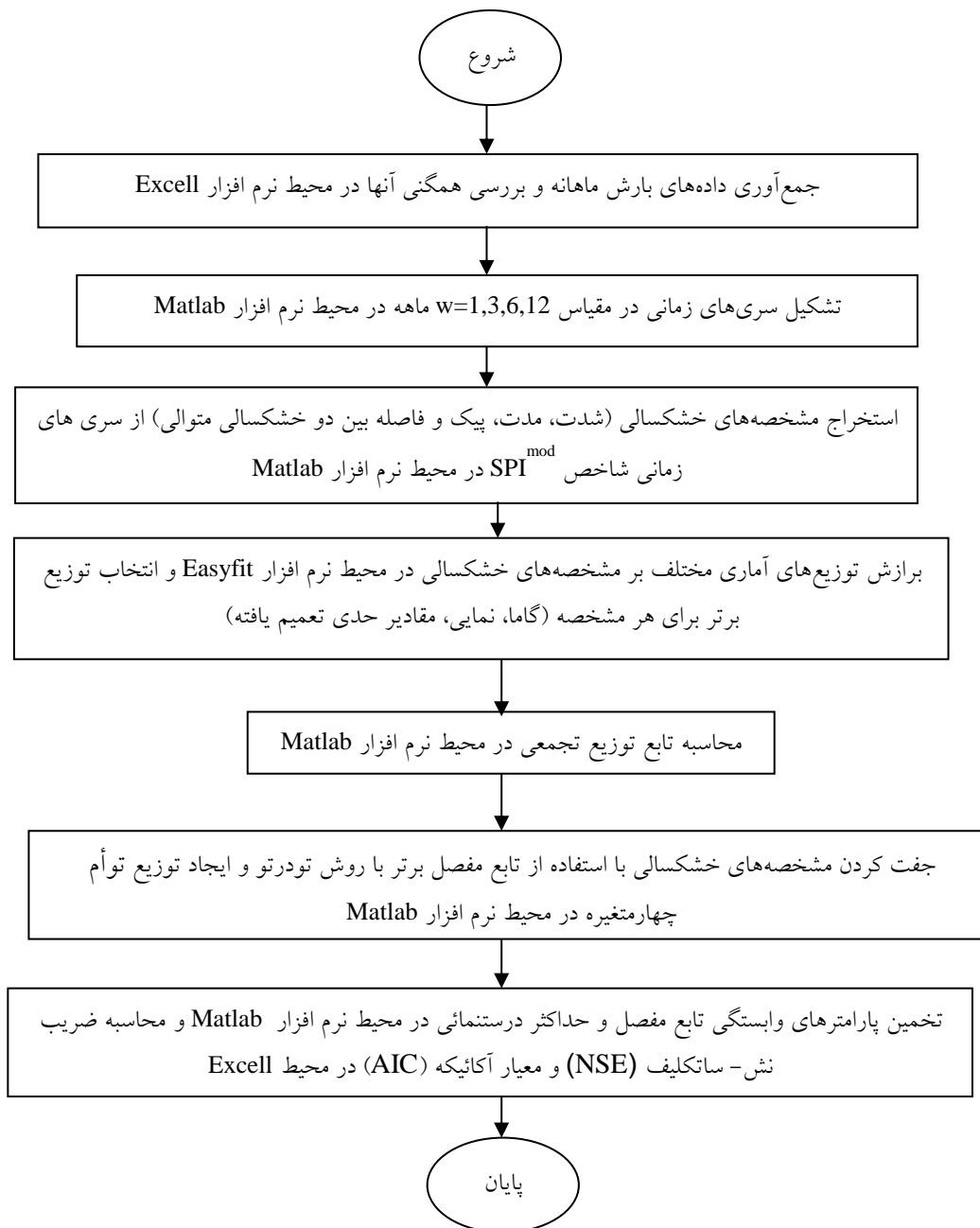
طولانی ممکن است، بوسیله یک SPI کوتاه مدت منقطع گردند. همچنین این شاخص تغییرپذیری فصلی را در نظر نمی‌گیرد. برای در نظر گرفتن تغییرپذیری فصلی بارش در شاخص SPI، Kao و Govindaraju (۲۰۱۰)، شاخص SPI اصلاح شده یا  $SPI^{mod}$  را پیشنهاد کردند. برای محاسبه شاخص SPI اصلاحی سری زمانی بارش با مقیاس w ماهه ( $X_w$ ) را با ماه مختوم به آن جمع و



شکل ۱- موقعیت ایستگاه‌های مورد مطالعه

جدول ۱- مشخصات ایستگاه‌های مورد مطالعه

ایستگاه	طول جغرافیایی	عرض جغرافیایی	ارتفاع از سطح دریا (متر)	متوسط بارش سالانه (میلی‌متر)
آبادان	۴۸° ۴۰'	۳۱° ۲۰'	۶/۶	۱۵۸/۹۳
اهواز	۴۸° ۱۵'	۳۰° ۲۰'	۱۲	۲۲۴/۱۵
ارومیه	۴۵° ۵'	۳۷° ۳۲'	۱۳۱۵/۹	۳۱۶/۲۴
تبریز	۴۶° ۱۷'	۳۸° ۵'	۱۳۶۱	۲۳۰/۶۵
سقز	۴۶° ۱۶'	۳۶° ۱۵'	۱۵۲۲/۸	۴۷۰/۹۵
سنندج	۴۷° ۰۰'	۳۵° ۲۰'	۱۳۷۳/۴	۴۲۳/۶۹
خرم آباد	۴۸° ۱۷'	۳۳° ۲۶'	۱۱۵۵	۴۷۹/۵۸
خوی	۴۴° ۵۸'	۳۸° ۳۳'	۱۱۰۳	۲۸۸/۳۶
دزفول	۴۸° ۲۳'	۳۲° ۲۴'	۱۴۳	۳۸۳/۷۱
کرمانشاه	۴۷° ۹'	۳۴° ۲۱'	۱۳۱۸/۶	۴۳۱/۶۶



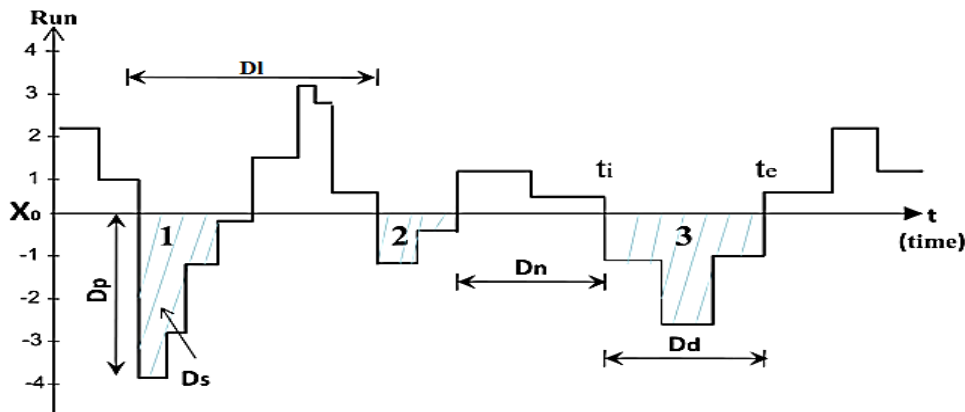
شکل ۲- الگوریتم و فلوچارت مراحل مختلف تحقیق

که در آن،  $g$  شماره سال و  $m$  شاخص ماه و برابر ۱ (ژانویه)، ۲ (فوریه)، ... ۱۲ (دسامبر) و  $t$  شاخص زمان و برابر  $t=12(g-1)+m$  می‌باشد. برای مثال،  $X_1^{Jan}$  بیانگر بارش ژانویه و  $X_5^{Aug}$  بیانگر کل بارش ۵ ماهه از آوریل تا اوت می‌باشد. به این ترتیب، نمونه‌ها در هر گروه  $X_w^{month}$  بطور سالانه جمع‌آوری می‌شوند. واضح است تا زمانی

که  $w \leq 12$  باشد، نمونه‌ها هیچ‌گونه همپوشانی نخواهند داشت. به عبارت دیگر، درجه خودهمبستگی بین داده‌ها به مقدار زیادی کاهش خواهد یافت. از طرف دیگر، نمونه‌های داخل گروه یکسان  $X_w^{month}$  تحت اثرات فصلی مشابه قرار دارند و بنابراین، تغییرات فصلی به یک شیوه مناسب در نظر گرفته می‌شوند. با برازش دادن توزیع

که در آن،  $g$  شماره سال و  $m$  شاخص ماه و برابر ۱ (ژانویه)، ۲ (فوریه)، ... ۱۲ (دسامبر) و  $t$  شاخص زمان و برابر  $t=12(g-1)+m$  می‌باشد. برای مثال،  $X_1^{Jan}$  بیانگر بارش ژانویه و  $X_5^{Aug}$  بیانگر کل بارش ۵ ماهه از آوریل تا اوت می‌باشد. به این ترتیب، نمونه‌ها در هر گروه  $X_w^{month}$  بطور سالانه جمع‌آوری می‌شوند. واضح است تا زمانی

زمانی محاسبه می‌شود. در ادامه مشخصه‌های خشکسالی شامل شدت (Ds)، مدت (Dd)، فاصله زمانی بین آغاز دو خشکسالی متوالی (DI) و پیک خشکسالی (Dp) استخراج گردید (دوره بدون خشکسالی، Dn). یک دوره خشک زمانی آغاز می‌شود که مقدار شاخص  $SPI^{mod}$  کمتر از صفر شود و زمانی که مقدار این شاخص مثبت شد، دوره خشک پایان یافته است. بر این اساس، شدت خشکسالی برابر با قدرمطلق مجموع مقادیر شاخص در یک دوره خشک می‌باشد. در هر دوره خشک، منفی‌ترین مقدار شاخص  $SPI^{mod}$  ماهانه به عنوان پیک خشکسالی در نظر گرفته می‌شود. این مشخصه‌ها در شکل ۳ نشان داده شده است (Kao and Govindaraju, 2010, Ayantobo *et al.*, 2019).



شکل ۳- تعریف مشخصه‌های خشکسالی با استفاده از نمودار (Ayantobo *et al.*, 2019).

کولموگروف-اسمیرنوف برای تعیین توزیع برتر استفاده گردید (Ayantobo *et al.*, 2019; Abdi *et al.*, 2016). بررسی توابع توزیع برتر با استفاده از نرم افزار Easyfit انجام گرفت.

#### بررسی ساختار وابستگی بین خصوصیات خشکسالی

جهت بررسی ساختار همبستگی بین مشخصه‌های خشکسالی از آماره‌های  $\tau$  کندال، رابطه (۳)،  $\rho$  اسپیرمن، رابطه (۴) و ضریب همبستگی خطی، رابطه (۵) استفاده

آماره بر هر گروه به طور مجزا (یعنی ایجاد کردن  $u_w^{Feb} = F_{X_w^{Feb}}(x_w^{Feb})$ ،  $u_w^{Jan} = F_{X_w^{Jan}}(x_w^{Jan})$  و  $u_w^{Dec} = F_{X_w^{Dec}}(x_w^{Dec})$ ) را با شیوه ای مشابه با  $SPI^{mod}$  متداول محاسبه می‌شود:

$$SPI_w^{mod} = \varphi^{-1}(u_w^{month}) = \varphi^{-1}(F_{X_w^{month}}(x_w^{month})) \quad (2)$$

با توجه به اینکه برای هر ماه ۱۲  $SPI^{mod}$  متناظر با بازه های زمانی مختلف  $w=1,2,\dots,12$  محاسبه می‌شود، تعداد  $SPI^{mod}$  های محاسبه شده ۱۲ بار کمتر از  $SPI$  های متداول می‌باشد. تفاوت شاخص  $SPI$  متداول با شاخص  $SPI^{mod}$  در این است که در شاخص متداول محاسبات برای هر ایستگاه و برای هر مقیاس زمانی برای کل دوره محاسبه می‌شود، اما در شاخص اصلاح شده محاسبات برای هر ماه در طی همان دوره آماری برای هر مقیاس

#### تعیین توزیع حاشیه‌ای برتر

در این مطالعه، به منظور تعیین توزیع حاشیه‌ای مناسب برای هر مشخصه خشکسالی، برازش توزیع‌های نمایی، گاما، تابع معکوس گوسی، تابع معکوس گوسی سه پارامتری، پارتو، مقادیر حدی تعمیم‌یافته، پیرسون، نرمال، لوگ نرمال، لوگ پیرسون تیپ سه، ویبول، ویبول سه پارامتری، تابع گامای سه پارامتری، لوگ لجستیک تعمیم‌یافته، نرمال تعمیم‌یافته، پارتوی تعمیم‌یافته و گامبل مورد بررسی قرار گرفت. برای این منظور از آزمون

### مدل‌سازی چهارمتغیره خشکسالی با استفاده از توابع مفصل

تابع مفصل امکان ترکیب چند توزیع تک‌متغیره با خانواده‌های مختلف معلوم را برای ساخت یک توزیع چندمتغیره با در نظر گرفتن وابستگی بین متغیرها به وجود می‌آورد. در واقع می‌توان گفت که تابع مفصل، یک تابع توزیع تجمعی است که دارای توزیع‌های حاشیه‌ای تک-متغیره یکنواخت بر فاصله (۰,۱) است. ویژگی مهم تابع مفصل این است که ساختار چندمتغیره آن با ساختار چندمتغیره تابع توزیع توأم یکسان است. بنا بر تئوری Sklar (۱۹۵۹)، اگر  $F$  تابع توزیع تجمعی  $m$  بعدی با حاشیه‌های پیوسته  $F_1, F_2, \dots, F_m$  باشد، یک تابع مفصل منحصر به فرد  $n$  بعدی  $C$  به صورت زیر وجود دارد، به طوری که  $C: [0,1]^m \rightarrow [0,1]$  نگاشت  $C$  است.

$$F(x_1, \dots, x_m) = C(F_1(x_1), \dots, F_m(x_m)) = C(u_1, \dots, u_m) \quad (7)$$

در رابطه فوق،  $u_i = F_i(X_i)$  توابع توزیع تجمعی حاشیه‌ای پیوسته است. توابع مفصل ارشمیدسی در طیف گسترده‌ای از مطالعات هیدرولوژی بکار گرفته شده‌اند. Grimaldi و Serinaldi (۲۰۰۶) مفصل‌های ارشمیدسی را تعمیم دادند و نشان دادند که یک تابع مفصل ارشمیدسی  $m$  بعدی را می‌توان بصورت زیر توصیف کرد:

$$(8)$$

$$C(u_1, \dots, u_m) = C_1(u_m, C_2(u_{m-1}, \dots, u_{m-1}(u_2, u_1) \dots)) \\ \varphi_1^{[-1]}(\varphi_1(u_m) + \varphi_1(\varphi_2^{[-1]}(\varphi_2(u_{m-1}) + \dots \\ + \varphi_{m-1}^{[-1]}(\varphi_{m-1}(u_2) + \varphi_{m-1}(u_1) \dots)))$$

در اینجا،  $\varphi$  مولد تابع مفصل است. همانطور که مشاهده گردید اگر  $\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1} = \varphi$ ، تابع مفصل ارشمیدسی  $n$  بعدی را می‌توان بصورت رابطه (۹) بازنویسی کرد (Chen et al., 2012):

$$C(u) = [\varphi^{-1} \sum_{k=1}^m \varphi(u_k)] \quad (9)$$

گردید.  $\tau$  کندال یک ضریب همبستگی رتبه‌ای است که برای تعیین معیار وابستگی بین متغیرهای تصادفی، عموماً در موارد مرتبط با توابع مفصل مورد استفاده قرار می‌گیرد. برآوردگر جمعیت ضریب  $\tau$  کندال بصورت تفاوت بین احتمال همگامی (سازگاری) و احتمال ناهمگامی (ناسازگاری) تعریف می‌شود (Nelsen, 2006):

$$\tau = P[(x_i - x_{i+1})(y_i - y_{i+1}) > 0] - P[(x_i - x_{i+1})(y_i - y_{i+1}) < 0] \quad (3)$$

$$\rho = 1 - \frac{6d_i^2}{n(n^2 - 1)}, d_i = x_i - y_i \quad (4)$$

$$r = \frac{E[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})]}{\text{Std}[X]\text{Std}[Y]} \quad (5)$$

در رابطه (۳) دو جفت  $(x_i, y_i)$  و  $(x_j, y_j)$  زمانی همگام هستند که  $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$  باشد و زمانی ناهمگام محسوب می‌شوند که  $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$  باشد. در حالت  $(x_i - x_j)(y_i - y_j) = 0$ ، دو جفت نه همگام هستند و نه ناهمگام محسوب می‌شوند. در رابطه (۴)،  $n$  تعداد نمونه و  $d_i$  تفاضل بین  $(x_j, y_j)$  می‌باشد و در رابطه (۵)،  $\bar{x}$  و  $\bar{y}$  به ترتیب میانگین متغیرهای  $X$  و  $Y$  می‌باشند و  $E[.]$  امید ریاضی و  $\text{Std}[.]$  انحراف معیار پیشامدها می‌باشند (Nelsen, 2006). برای یک نمونه تصادفی شامل  $n$  مشاهده جفتی،  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  برآوردگر نمونه  $\tau$  کندال را می‌توان با رابطه (۶) محاسبه کرد:

$$\hat{\tau} = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{sgn}[(x_i - x_j)(y_i - y_j)] \quad (6)$$

$$\text{sgn}(\psi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \psi > 0 \\ 0 & \text{if } \psi = 0 \\ -1 & \text{if } \psi < 0 \end{cases}$$

که در آن،  $i, j = 1, 2, \dots, n$  و  $\text{sgn}[.]$  تابع علامت می‌باشد.

چهارمتغیره استفاده گردید که در جدول (۲) روابط مربوط به سه تابع مفصل مهم کلایتون، گامبل و فرانک آورده شده است.

(۱۰)

$$C_{UVWZ} = (u, v, w, z) = C_2(z, C_{UVW}(w, C_{UV}(u, v))) \\ = C_2(z, C_1(w, C_{UV}(u, v)))$$

تاکنون خانواده‌های مختلفی از توابع مفصل پارامتریک برای تحلیل وابستگی معرفی شده‌اند. متداول‌ترین خانواده‌های توابع مفصل که در تحلیل‌های هیدرومتئورولوژیک بکار برده می‌شود، مفصل‌های ارشمیدسی و بیضوی هستند. در این تحقیق، از توابع مفصل ارشمیدسی نامتقارن برای ایجاد توزیع توام

جدول ۲- روابط سه تابع مفصل از توابع مفصل مورد مطالعه

Copula Family	$C(u_1, u_2, u_3, u_4)$
Clyton	$(u_4^{-\theta_1} + ((u_1^{-\theta_3} + u_2^{-\theta_3} - 1)^{\frac{\theta_2}{\theta_3}} + u_3^{-\theta_2} - 1)^{\frac{\theta_2}{\theta_3}} - 1)^{\frac{\theta_2}{\theta_3}}$
Frank	$\frac{-1}{\theta_1} \ln \left( 1 + \frac{-1}{\theta_1} (e^{-\theta_1 u_4} - 1) \cdot \left( \left( 1 - \frac{1}{\theta_1} \cdot \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{\theta_1} \cdot (1 - e^{-\theta_3 u_1}) \cdot (1 - e^{-\theta_3 u_2}) \right)^{\frac{-1}{\theta_1}} \right) \cdot (1 - e^{-\theta_2 u_3}) \right) - 1 \right) \right)$
Gumbel	$\exp \left\{ - \left[ (-\ln u_4)^{\theta_1} + \left( \left( (-\ln u_1)^{\theta_3} + (-\ln u_2)^{\theta_3} \right)^{\frac{\theta_2}{\theta_3}} + (-\ln u_3)^{\theta_2} \right)^{\frac{\theta_2}{\theta_3}} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_3}} \right\}$

\*  $u_1, u_2, u_3, u_4$  توزیع حاشیه‌ای برازش یافته بر متغیرهای  $D_d, D_s, D_l, D_p$  برای  $01 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3$

$$\ln L(d, s; \lambda, \alpha, \beta, \theta) = \ln L_C(F_D(d), F_S(s); \theta) + \\ \ln L_D(d; \lambda) + \ln L_S(s; \alpha, \beta) \quad (11)$$

که در آن،  $\ln L_C$  تابع لگاریتم درست‌نمایی تابع چگالی مفصل‌ها می‌باشند. با جاگذاری پارامترهای تخمینی  $\hat{\alpha}, \hat{\lambda}$  و  $\hat{\beta}$  که در مرحله اول بدست آمده بودند، تابع لگاریتم درست‌نمایی  $\ln L$  برای بدست آوردن پارامتر مفصل تخمینی  $\hat{\theta}$  بیشینه می‌شود. در نهایت، نتایج هر کدام از مفصل‌ها با نتایج حاصل از احتمال تجربی مقایسه گردید و هر مفصلی که مقادیر آن به مقادیر مفصل تجربی نزدیک‌تر بود، به عنوان مفصل مناسب انتخاب گردید. برای تعیین میزان نزدیکی مقادیر مفصل‌های تئوری با مقدار ناپارامتری مفصل تجربی متناظر، از دو معیار نش-ساتکلیف (NSE) رابطه (۱۲) و آکائیکه (AIC) رابطه (۱۳) استفاده شد.

$$NSE = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (C_{pi} - C_{ei})^2}{\sum_{i=1}^n (C_{ei} - \bar{C}_e)^2} \quad (12)$$

### تخمین پارامتر وابستگی مفصل

برای انتخاب تابع مفصل مناسب جهت ایجاد تابع توزیع دومتغیره، به ترتیب زیر عمل شد: بعد از انتخاب و برازش توزیع حاشیه‌ای مناسب بر هر کدام از متغیرهای مورد بررسی، پارامترهای توابع توزیع حاشیه‌ای با روش حداکثر درست‌نمایی تخمین زده شد. سپس چند نوع تابع مفصل مختلف برای پیوند این دو تابع توزیع حاشیه‌ای در نظر گرفته و پارامتر تابع مفصل با روش توابع منطقی برای حاشیه‌ها (IFM<sup>1</sup>) که توسط جوئی (۱۹۹۷) پیشنهاد شده است، برآورد گردید. بدین منظور، برای n جفت مشاهده مدت و شدت خشکسالی،  $(d_i, s_i)$ ، توابع لوگ درست‌نمایی برای مدت و شدت خشکسالی،  $L_D(d; \lambda)$  و  $L_S(s; \alpha; \beta)$  به منظور استخراج پارامترهای توزیع مربوطه بیشینه شدند. برای توزیع دومتغیره مدت و شدت خشکسالی، تابع لوگ درست‌نمایی بصورت رابطه (۱۱) تعریف شد.

<sup>1</sup> Inference Functions for Margins



عبارت منطقی  $A$  می‌باشد. اگر عبارت  $A$  درست باشد، مقدار ۱ و اگر نادرست باشد مقدار صفر به خود می‌گیرد.  $R_{i1}, \dots, R_{id}$  به ترتیب رتبه داده‌های مشاهده‌ای  $i$  ام یا همان  $u_1, \dots, u_d$  می‌باشند. مقادیر تابع توزیع تجمعی  $u_w$  مربوط به داده‌ها می‌باشند. برای حالت دومتغیره مقایسه بین داده‌های شدت و مدت (دو متغیر) ( $Dd, Ds$ ) صورت می‌گیرد که در این صورت جفت اول داده‌های شدت و مدت بعنوان مبنا قرار داده شده و بقیه جفت‌ها با آن مقایسه می‌شوند. برای حالت سه‌متغیره معیار مقایسه شدت، مدت و فاصله بین آغاز دو خشکسالی متوالی ( $Dd, Ds, DI$ ) می‌باشد که این سه متغیر بعنوان مبنا و بقیه با این سه متغیر مقایسه می‌شوند. در حالت چهارمتغیره که اساس کار این تحقیق می‌باشد، چهار متغیر شدت، مدت، فاصله بین آغاز دو خشکسالی متوالی و پیک آن بعنوان مبنا قرار گرفته می‌شود ( $Dd, Ds, DI, Dp$ ) و سپس بقیه جفت‌ها با آن مقایسه می‌شوند.

**حتمال توأم، دوره بازگشت توأم، دوره بازگشت کندال**  
زمانی که مفصل‌ها برای ایجاد توزیع دومتغیره بکار می‌روند، ارزیابی احتمالات توأم بسیار ساده می‌شود. اما اگر تعداد متغیرها بیشتر شود، محاسبات احتمال توأم سخت‌تر از حالت دومتغیره خواهد شد. بر طبق مطالعاتی که Salvadori و De Michele (۲۰۰۴) انجام دادند، در حالت چندمتغیره اگر  $X_1, X_2, \dots, X_d$  از یک سطح آستانه تجاوز کنند  $(X_1 > x_1, \dots, X_d > x_d)$ ، احتمال توأم با رابطه (۱۵) و دوره بازگشت توأم را با رابطه (۱۶) می‌توان محاسبه کرد. در این مطالعه، احتمال توأم و دوره بازگشت برای حالت چهارمتغیره بر مبنای روش اصلاح شده Ganguli و Reddy (۲۰۱۴)، محاسبه گردید (Ayantoboo et al 2019).

$$P_{DLSLP} = 1 - F_{DLSLP}(d, s, l, p) = 1 - C_{DLSLP}(d, s, l, p) \quad (15)$$

$$AIC = -2 \ln ML + 2k \quad (13)$$

که در آنها،  $n$  اندازه نمونه،  $C_p$  مقادیر محاسبه شده مفصل پارامتری،  $C_e$  مقادیر مشاهده‌ای احتمال بدست آمده از مفصل تجربی،  $\bar{C}_e$  میانگین مقادیر مشاهده‌ای احتمال بدست آمده از مفصل تجربی،  $\ln ML$  مقدار بیشینه تابع لگاریتم درست‌نمایی و  $k$  تعداد پارامترهای برازش داده شده می‌باشند. تابع مفصلی مناسب‌تر می‌باشد که مقدار آکائیکه (AIC) آن به صفر و مقدار نش-ساتکلیف (NSE) آن به یک نزدیک‌تر باشد. پس از انتخاب تابع مفصل مناسب، توزیع دومتغیره شدت و مدت خشکسالی ایجاد و با استفاده از آن مقادیر احتمال توأم و تجربی، دوره بازگشت توأم و دوره بازگشت کندال در ادامه محاسبه گردید (Ayantoboo et al., 2019).

### مفصل‌های تجربی

با وجود اینکه تئوری اسکالر برای ابعاد کلی پیشنهاد شده است، در این تئوری پیچیدگی مفصل‌ها با افزایش تعداد متغیرها افزایش می‌یابد. بنابراین، جهت تحلیل چندمتغیره (بویژه در ابعاد بالاتر از دو) اکثر محققین از روش مفصل‌های تجربی<sup>۱</sup> استفاده می‌کنند. مفهوم مفصل-های تجربی، در حقیقت مشابه با مفهوم فرمول‌های موقعیت نموداری<sup>۲</sup> است که در تحلیل آماری تک‌متغیره (مثلاً فرمول ویبول)، بکار می‌روند. این مفصل‌ها معیارهای احتمالی تجمعی توأم رتبه‌ای می‌باشند (Nelsen, 2006). برای نمونه با اندازه  $n$  مفصل تجربی  $d$  بعدی  $C_n$  بصورت زیر می‌باشد:

$$C_n(u_1, \dots, u_d) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\left(\frac{R_{i1}}{n+1} \leq u_1, \dots, \frac{R_{id}}{n+1} \leq u_d\right) \quad (14)$$

که در آن،  $n$  اندازه نمونه و  $I(A)$  متغیر نشانگر<sup>۳</sup>

<sup>1</sup> Empirical copula

<sup>2</sup> Plotting position

<sup>3</sup> Indicator variable

## نتایج و بحث

نتایج شاخص استاندارد  $SPI^{mod}$ 

تمام مراحل اشاره شده در بخش روش کار، برای ۱۰ تمام ایستگاه مورد مطالعه انجام گردید که در ادامه فقط نمودارهای مربوط به ایستگاه تبریز برای نمونه ارائه شده‌اند و نتایج بقیه ایستگاه‌ها بصورت جدول ارائه شده است. سری زمانی شاخص بارش استاندارد شده اصلاحی ( $SPI^{mod}$ ) در مقیاس‌های زمانی ۱، ۳، ۶ و ۱۲ ماهه برای ایستگاه تبریز در شکل ۴ نشان داده شده است. نتایج حاصل از شاخص  $SPI^{mod}$  نشان می‌دهد که کمترین مقدار شاخص برای مقیاس‌های زمانی ۱، ۳، ۶ و ۱۲ ماهه به ترتیب  $-۳/۰۲$ ،  $-۳/۷۴$ ،  $-۳/۸۹$  و  $-۲/۹۴$  می‌باشد و بیشترین مقدار آن به ترتیب برابر  $۳/۲۹$ ،  $۳/۰۶$ ،  $۲/۸$  و  $۳/۱۳$  است. همانطور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود با افزایش مقیاس زمانی، نوسانات شاخص  $SPI^{mod}$  کاهش یافته و در عوض مدت خشکسالی‌ها و ترسالی‌ها طولانی‌تر شده است. بنابراین، در خشکسالی‌های بلندمدت، شدت خشکسالی‌ها هم افزایش می‌یابد. به عنوان مثال، در یک دوره دوازده ماهه کمبود بارش، مقدار این شاخص در انتهای دوره کم‌بارش بیش از مقدار آن در زمان مشابه و در مقیاس سه‌ماهه خواهد بود. زیرا در مقیاس دوازده ماهه اثر بارش همان ماه و ۱۱ ماه ماقبل در نظر گرفته شده، ولی در مقیاس سه‌ماهه تنها اثر بارش همان ماه و دو ماه ماقبل لحاظ گردیده است. نتایج حاصل از این شاخص نشان داد که بر اساس مقیاس زمانی یک‌ماهه برای ایستگاه تبریز از تعداد ۵۵۲ ماه کل دوره آماری، ۱۶۴ ماه خشک و ۳۸۸ ماه تر، بر اساس مقیاس ۳ ماهه، ۱۹۸ ماه خشک و ۳۵۴ ماه تر، بر اساس مقیاس ۶ ماهه، ۲۴۴ ماه خشک و ۳۰۸ ماه تر و بر اساس مقیاس ۱۲ ماهه، ۲۴۴ ماه خشک و ۳۰۸ ماه تر می‌باشد. همانطور که از نتایج محاسبات و مقیاس‌های مختلف شاخص  $SPI^{mod}$  بر می‌آید، در ایستگاه تبریز تعداد ماه‌های خشک نسبت به ماه‌های تر بیشتر می‌باشد. با توجه به اینکه شاخص  $SPI^{mod}$  بر مبنای میانگین

$$T_{DLSP} = \frac{\xi}{1 - F_{DLSP}(d, s, l, p)} = \frac{E(L)}{1 - C_{DSL}(d, s, l, p)} \quad (۱۶)$$

در رابطه (۱۵)،  $E(L) = \xi$  میانگین فاصله بین آغاز رویدادهای متوالی خشکسالی است. مطالعات Durante و همکاران (۲۰۱۰)، نشان داد که استفاده از تعریف استاندارد دوره بازگشت منجر به تخمینی کمتر از مقدار واقعی خواهد شد. آنها برای رفع این مسئله دوره بازگشت کندال را بر اساس تابع توزیع کندال بصورت رابطه (۱۷) توسعه دادند.

$$T_p = \frac{E(L)}{1 - K_c(t)} \quad (۱۷)$$

مفهوم دوره بازگشت کندال مفهومی کاربردی است. فرض کنید که دوره بازگشت بحرانی  $T_p$  از طریق الزامات طراحی مشخص شود. بعنوان مثال، چنانچه مدیران منابع آب بخواهند یک سیستم آبرسانی را طراحی کنند که بتواند آب کافی را در یک رویداد خشکسالی شدید مشخص تأمین کند و شکست سیستم بطور متوسط یکبار در هر  $T_p$  سال رخ دهد. برای این منظور با استفاده از دوره بازگشت کندال می‌توانند زمان دوره بازگشت را برآورد کرده و آمادگی لازم را برای شرایط بحرانی داشته باشند.  $K_c(t)$  در رابطه (۱۷) تابع توزیع مفصل است که از رابطه (۱۸) محاسبه می‌شود:

$$K_c(t) = 1 - P\{u \in I^d : C(u) \leq t\} \quad (۱۸)$$

$$t = \inf\{s \in I : K_c(s) = p\} = K_c^{[-1]}(p) \quad (۱۹)$$

که در آن،  $\inf\{\cdot\}$  اینفیموم<sup>۱</sup> یا بزرگترین کران پایین مجموعه می‌باشد. واضح است که چون  $K_c$  یک تابع توزیع می‌باشد، مقدار  $t$  در واقع چندک متناظر با رتبه  $p$  است (Salvadori et al., 2011).

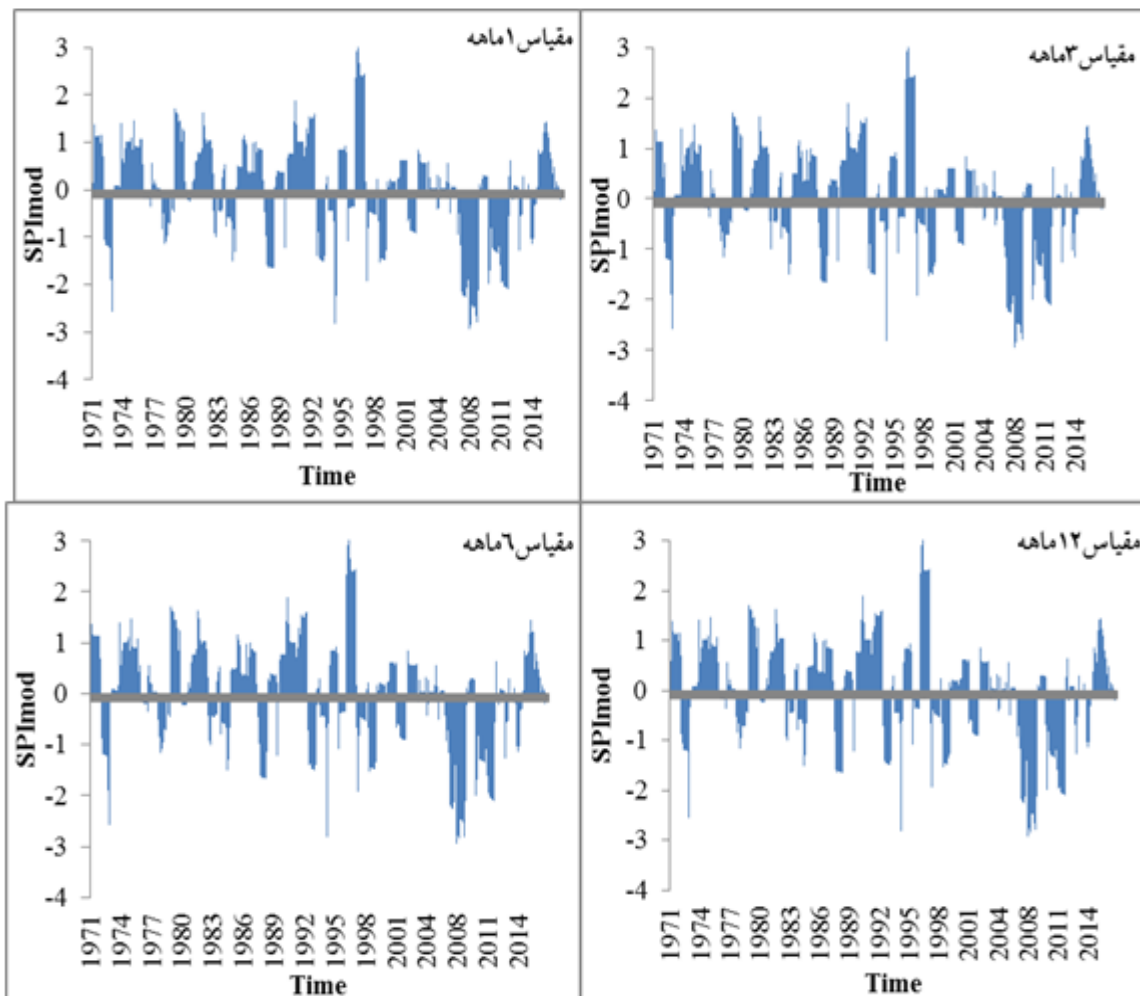
<sup>۱</sup> Infimum

بارش ماهانه محاسبه می‌شود، در نتیجه نوسانات آن بیشتر از SPI متداول می‌باشد.

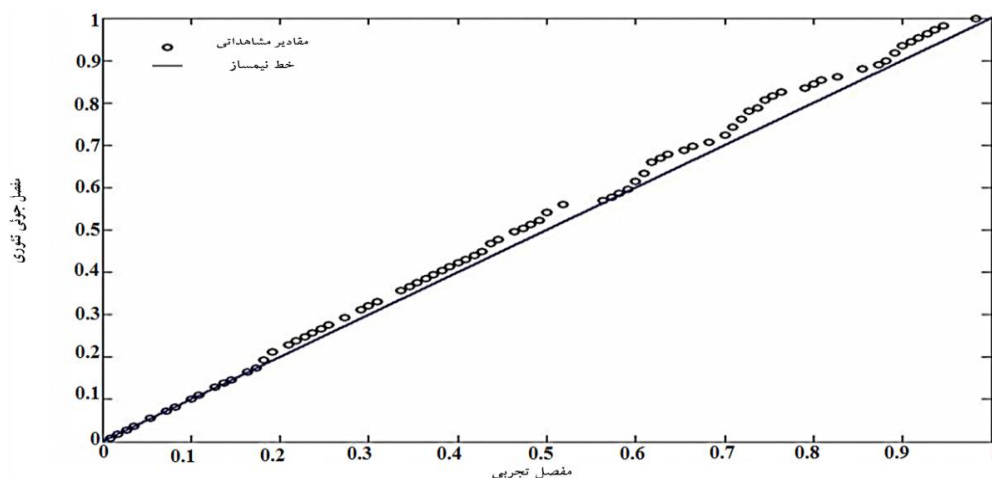
### مفصل تجربی

به منظور انتخاب تابع مفصل مناسب، مقادیر مفصل-های تئوری با مقادیر متناظر مفصل تجربی مقایسه می‌گردد و تابع مفصلی که مقادیر آن به مقادیر مفصل تجربی نزدیک‌تر باشد، انتخاب می‌گردد. تابع مفصل برتر تابعی است که حداکثر ضریب نش-ساتکلیف، حداکثر درست

نمائی و بیشترین معیار آکائیکه را داشته باشد. بنابراین نتایج حاصل از این محاسبات برای هر سه حالت دو، سه و چهار متغیره حاکی از آنست که تابع مفصل جوئی بعنوان تابع مفصل برتر می‌باشد. در شکل (۵) مقادیر مفصل تجربی در برابر مقادیر متناظر تابع مفصل جوئی برای برای ایستگاه تبریز نشان داده شده است. نزدیک بودن نقاط به خط نیمساز ۴۵ درجه برازش مناسب تابع مفصل جوئی را برای ایجاد ساختار دومتغیره تایید می‌کند.



شکل ۴- سری زمانی شاخص  $SPI^{mod}$  در مقیاس‌های زمانی ۱، ۳، ۶ و ۱۲ ماهه در ایستگاه تبریز



شکل ۵- برازش مقادیر مفصل تجربی در برابر مفصل تئوری براساس تابع مفصل جوئی برای ایستگاه تبریز

#### تحلیل چهار متغیره خشکسالی

در این قسمت به منظور ایجاد تابع توزیع چهارمتغیره شدت، مدت، پیک و فاصله بین آغاز دو خشکسالی متوالی، در ایستگاه‌های مورد مطالعه، پس از ایجاد سری‌های مشخصه‌های خشکسالی و برازش توزیع‌های تک‌متغیره مقتضی بر آنها، توابع مفصل مختلف بر این توزیع‌های حاشیه ای برازش داده شد. بر اساس نتایج آزمون کولموگروف-اسمیرنوف در سطح معنی‌داری ۱۰ درصد، برای ایستگاه تبریز و همین‌طور سایر ایستگاه‌های

مورد مطالعه، برای داده‌های شدت و مدت ( $D_d$ ,  $D_s$ ) بترتیب توزیع‌های گاما و نمایی و برای داده‌های فاصله بین آغاز دو خشکسالی متوالی و پیک خشکسالی ( $D_p$ ,  $D_l$ ) توزیع مقادیر حدی GEV بعنوان توزیع برتر شناخته شدند. نتایج حاصل از توابع توزیع برتر برای مشخصه‌های خشکسالی در جدول (۳) آورده شده است، با توجه به حجم بالای مطالب این نتایج برای مقیاس یک ماهه خشکسالی بعنوان نمونه بررسی گردید.

جدول ۳- نتایج حاصل از برازش توزیع‌های آماری بر مشخصه‌های خشکسالی با استفاده از آزمون کولموگروف - اسمیرنوف

ایستگاه	شدت			فاصله بین دو خشکسالی			پیک خشکسالی			اندازه نمونه
	$\beta$	$\alpha$	$\lambda$	$\mu$	$\sigma$	$k$	$\mu$	$\sigma$	$k$	
آبادان	۰/۸۴۲۲	۱/۴۱۴۰	۰/۶۳۹۷	۰/۶۹۵۴	۳/۱۹۸۶	-۰/۱۱۳۹	۰/۶۷۵۶	۰/۵۵۰۷	-۰/۲۲۱۱	۸۷
اهواز	۱/۱۴۸۷	۱/۱۷۱۴	۰/۵۸۲۲	۴/۵۲۵۴	۳/۳۹۳۰	-۰/۰۷۹۲	۰/۶۲۸۳	۰/۵۱۸۱	۰/۰۳۸۱	۸۵
ارومیه	۱/۲۵۵۲	۱/۰۹۶۶	۰/۵۵۴۶	۳/۰۶۹۹	۱/۳۵۹۴	۰/۲۶۷۹	۰/۶۴۵۷	۰/۵۱۵۱	۰/۰۴۷۷	۱۲۷
تبریز	۱/۰۱۴۲	۱/۲۷۷۵	۰/۵۴۰۲	۲/۹۴۳۱	۱/۲۷۴۸	۰/۱۴۲۶	۰/۵۹۴۳	۰/۵۲۵۹	-۰/۰۱۴۱	۱۴۱
سقز	۰/۶۸۸۲	۱/۸۳۴۴	۰/۵۸۵۳	۳/۱۲۰۷	۱/۵۸۹۰	۰/۱۶۲۲	۰/۴۸۱۳	۰/۵۴۸۵	۰/۱۵۲۷	۱۲۷
سنندج	۰/۸۳۵۰	۱/۹۴۴۴	۰/۵۱۳۸	۴/۷۲۶۴	۲/۷۴۰۷	۰/۰۱۶۳	۰/۶۰۰۲	۰/۵۴۳۰	۰/۱۶۲۹	۹۳
خرم‌آباد	۰/۹۲۴۹	۱/۶۴۵۹	۰/۵۵۶۸	۴/۲۵۳۱	۲/۶۰۸۳	-۰/۰۶۴۲	۰/۶۱۱۷	۰/۵۷۲۵	۰/۱۵۰۸	۹۸
خوی	۱/۲۰۶۵	۱/۳۸۶۴	۰/۵۱۶۴	۳/۲۵۱۳	۱/۵۰۲۹	۰/۱۴۷۴	۰/۷۴۱۲	۰/۵۵۶۴	۰/۰۷۷۹	۱۲۶
دزفول	۰/۸۴۸۸	۱/۶۱۵۷	۰/۵۶۸۸	۴/۵۲۲۳	۲/۸۹۶۴	-۰/۰۵۵۱	۰/۵۵۲۸	۰/۵۸۰۶	۰/۰۶۲۰	۹۱
کرماتشاه	۰/۹۵۵۱	۱/۷۲۷۵	۰/۵۳۴۵	۴/۵۹۶۴	۲/۴۵۹۱	-۰/۰۴۸۳	۰/۶۶۰۹	۰/۵۸۲۹	۰/۱۱۴۸	۹۳

میخائیل - حق، فارلی - گامبل - مورگنسترن، فرانک، گامبل، گامبل - هوگارد، پلاکت، فیلیپ - گامبل و جوئی بر داده‌های خشکسالی مشاهداتی مورد آزمون قرار گرفت. برای این منظور، ابتدا توزیع‌های حاشیه‌ای متغیرهای شدت و مدت (Dd, Ds) برای حالت دومتغیره بوسیله تابع مفصل جفت شدند، سپس توزیع دومتغیره حاصل با توزیع حاشیه‌ای متغیر سوم (فاصله بین آغاز دو خشکسالی متوالی) جفت شدند که حاصل آن یک توزیع سه‌متغیره است. در نهایت این توزیع سه‌متغیره با توزیع حاشیه‌ای پیک خشکسالی جفت شده و توزیع چهارمتغیره بدست آمد. تابع مفصل برتر برای ایستگاه‌های مورد مطالعه، تابع مفصل جوئی شناخته شد. نتایج محاسبه تابع لگاریتم درستمنائی برای ایستگاه تبریز بترتیب برای حالت دو، سه و چهارمتغیره ۱۳۶/۹۵، ۲۲۹/۱۲ و ۱۶۶/۷۴ بدست آمد. این نتایج برای ضریب نش- ساتکلیف بترتیب ۰/۹۹۹، ۰/۶۳- و ۲/۰۷- بدست آمد. همچنین مقدار پارامتر وابستگی تابع مفصل برتر (جوئی) بترتیب ۱/۴۱، ۱/۳۷ و ۱/۳۶ می‌باشد. با توجه به اینکه پدیده‌های هواشناسی و هیدرولوژیکی بصورت تناوبی در ادوار مختلف تکرار می‌شوند، آگاهی از مشخصات خشکسالی در هر منطقه امکان برنامه‌ریزی‌های لازم برای آمادگی و مقابله با اثرات نامطلوب خشکسالی را فراهم می‌کند.

از آنجائیکه شرط استفاده از توابع مفصل جهت تحلیل‌های چندمتغیره وجود همبستگی بین متغیرهای مورد مطالعه می‌باشد، لذا در این بخش ساختار وابستگی بین مدت، شدت، پیک خشکسالی با سه معیار ضریب همبستگی پیرسون،  $\tau$  کندال و  $\rho$  اسپیرمن مورد بررسی قرار گرفت. ضریب همبستگی خطی بین خصوصیات خشکسالی یعنی  $R(Dd, Ds)$ ،  $R(Dd, Dp)$  و  $R(Dp, Ds)$  برای ایستگاه‌های مورد مطالعه بررسی گردید. نتایج محاسبه این سه ضریب برای ایستگاه‌های مورد مطالعه در جدول (۴) ارائه شده است. همانگونه که در این جدول مشاهده می‌شود، در همه ایستگاه‌ها ضریب همبستگی پیرسون نسبت به دو ضریب ناپارامتری  $\tau$  کندال و  $\rho$  اسپیرمن بزرگتر می‌باشد. ضریب  $\rho$  اسپیرمن در رتبه بعدی قرار دارد و  $\tau$  کندال کمترین مقدار را در همه ایستگاه‌ها نشان می‌دهد. نتایج حاصل از همبستگی بین شدت و مدت (Dd, Ds)، مدت و پیک (Dd, Dp)، و شدت و پیک (Ds, Dp) خشکسالی برای ایستگاه تبریز بترتیب ۰/۷۴، ۰/۳۹ و ۰/۸۵ بدست آمد. نتایج کلی برای ایستگاه‌های مورد مطالعه نشان داد که همبستگی بین شدت و پیک خشکسالی (Ds, Dp) و همبستگی بین شدت و مدت خشکسالی (Ds, Dp) بالاترین ضریب همبستگی را داشته‌اند. در ادامه جهت تحلیل چهارمتغیره خشکسالی، برازش نه تابع مفصل مختلف شامل مفصل کلاتون، علی-

جدول ۴- مقادیر تابع لگاریتم درستمنائی، پارامتر وابستگی مفصل، پارامترهای وابستگی، NSE، AIC برای مفصل جوئی در ایستگاه‌های مورد مطالعه

نوع	تعداد ایستگاه‌های	آب	آب	آب	آب	آب	آب	آب	آب	آب	آب	آب
۲	۱/۰۶	-۰/۰۸	۰/۳	-۰/۲۷	-۰/۰۰۷	-۰/۰۹۲	۰/۲۶	۰/۶۵	-۰/۱۱	-۰/۱۴		
۳	۰/۷۶-	۰/۶۳-	۰/۵۶-	۰/۷۲-	۰/۶۸-	۰/۵۷-	۰/۵۴-	۰/۲۷-	۰/۷۴-	۰/۶۹-	AIC	
۴	۰/۹۷-	۰/۳۴-	۰/۳۵-	۰/۴۴-	۰/۵۵-	۰/۴۱-	۰/۳۹-	۰/۱۱-	۰/۶۱-	۰/۵۸-		
۲	۰/۹۹۴	۰/۱۴	۰/۹۹۵	۰/۹۹۹	۰/۹۹۵	۰/۹۹۸	۰/۹۹۶	۰/۹۹۸	۰/۹۹۵	۰/۹۹۷		
۳	۰/۳۸۸	۰/۲۲۸	۰/۴۲۲	۰/۶۳-	۰/۰۲۵	۱/۳۹۲-	۰/۲	۰/۴۵۳-	۰/۳۱۴	۰/۴۳۹	NSE	
۴	۰/۱۶۱-	۰/۲۶۹	۰/۰۰۲-	-۲/۰۷-	۰/۷۳۴-	۳/۶۲-	۰/۱۴-	۱/۵۱-	۰/۳۲-	-۰/۰۱۴		

کرامانشاه	سنندج	سنز	دزفول	خری	خرم آباد	تبریز	اهواز	ارومیه	آبادان	تعداد متغیرهای توزیع	آماره
۱۱۸-	۱۱۳-	۴۷-	۷۴-	۱۱۱-	۱۰۱-	۱۳۷-	۷۰-	۱۱۰-	۲۹-	۲	Maximum likelihood
۲۲۲-	۲۳۳-	۱۳۶-	۱۸۵-	۱۹۲-	۲۱۷-	۲۲۹-	۱۸۹-	۲۰۶-	-۲۴۱	۳	
۱۹۶-	۲/۰۲-	-۱۰۱	۱۵۸-	۱۵۹-	۱۸۷-	۱۶۷-	۱۵۰-	۱۴۹-	-۳۰۶	۴	
۰/۴۵	۰/۴۶	۰/۴۳	۰/۴۱	۰/۵۱	۰/۴۸	۰/۴۱	۰/۴۱	۰/۴۶	۰/۴۴	۲	$\tau$ Kendall
۰/۰۱۶	۰/۰۱۵	۰/۰۰۱	۰/۰۱۱	۰/۰۰۳	۰/۰۱۱	۰/۰۰۲	۰/۰۱۱	۰/۰۰۴	۰/۰۱۱	۳	
۰/۰۱۱	۰/۰۱۵	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۰۰۳	۰/۰۱۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱۱	۰/۰۰۴	۰/۰۱۱	۴	
۱/۴۱	۱/۴۶	۱/۳۷	۱/۳۶	۱/۴۰	۱	۱/۴۱	۱/۱	۱/۳۶	۱	۲	Copula parameter
۱/۳۶	۱/۳۶	۱/۳۶	۲/۶۵	۱/۳۶	۱	۱/۳۶	۲/۳۱	۱/۳۶	۸/۲۵	۳	
۱/۳۷	۱/۳۷	۱/۳۶	۲/۶۷	۱/۳۷	۱	۱/۳۷	۲/۴۱	۰/۵۷	۸/۲۵	۴	
۰/۵۷	۰/۵۷	۰/۵۰	۰/۴۸	۰/۵۹	۰/۵۳	۰/۵۲	۰/۵۷	۰/۵۲	۰/۴۳	*	Rho spearman
۰/۷۴	۰/۸۱	۰/۷۶	۰/۷۱	۰/۷۵	۰/۷۹	۰/۷۴	۰/۸۱	۰/۷۵	۰/۸۳	*	R(Dd,Ds)
۰/۴۹	۰/۴۹	۰/۴۹	۰/۵۴	۰/۳۸	۰/۵۳	۰/۳۹	۰/۴۹	۰/۴۱	۰/۵۴	*	R(Dd,Dp)
۰/۸۸	۰/۸۴	۰/۹۲	۰/۸۹	۰/۸۵	۰/۸۹	۰/۸۵	۰/۸۸	۰/۸۵	۰/۸۴	*	R(Dp,Ds)
Joe	Joe	Joe	Joe	Joe	Joe	Joe	Joe	Joe	Joe	۴,۳,۲	مفصل برتر

ها در جدول (۵) آمده است. احتمال اینکه حالات دو به دوی مقادیر شدت، مدت، پیک و فاصله بین آغاز دو خشکسالی متوالی بطور همزمان در یک سطح آستانه شوند، برای مقادیر بیشتر از آن سطح آستانه این موضوع اطلاعات مفیدی در اختیار مدیران منابع آبی جهت بهبود مدیریت منابع آبی تحت شرایط خشکسالی می‌گذارد.

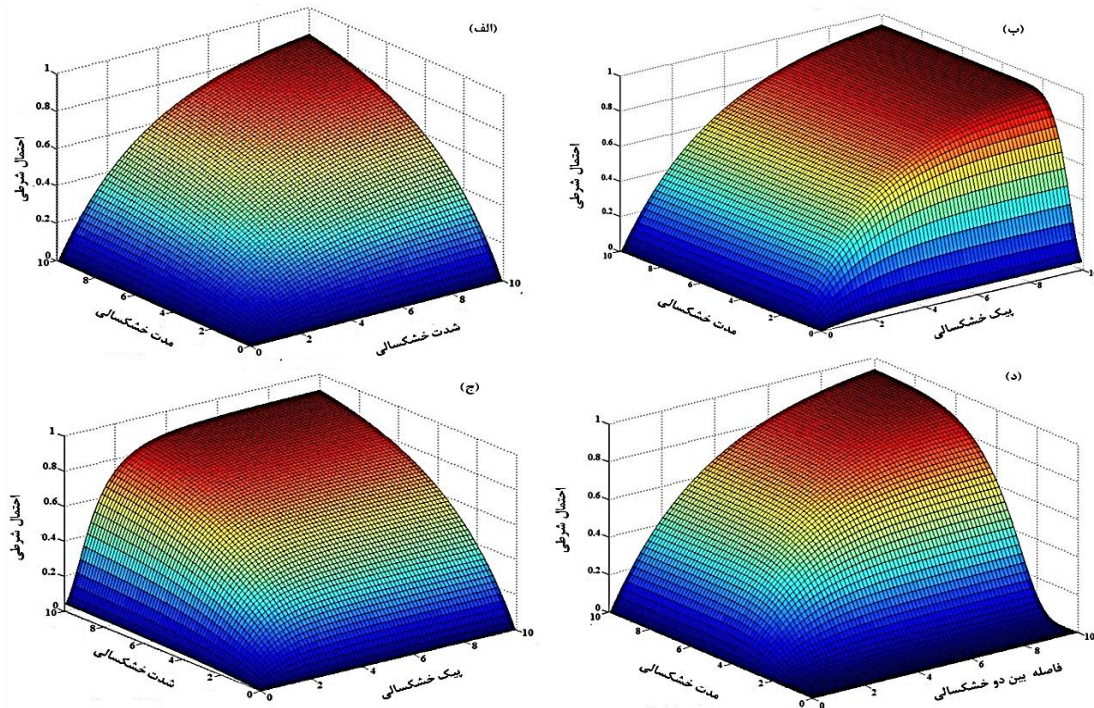
#### تحلیل احتمال و دوره بازگشت توأم خشکسالی

احتمال توأم مشخصه‌های خشکسالی برای مدیریت خشکسالی مهم می‌باشند. احتمال اینکه هم مدت زمان خشکسالی و هم شدت آن بیش از آستانه خاصی باشد، اطلاعات مفیدی برای مدیران و برنامه‌ریزان زیست محیطی و سازمان‌های دولتی برای بهبود عملکرد سیستم‌های منابع آب و مدیریت آن در شرایط خشکسالی فراهم می‌کند. این احتمال براحتی با استفاده از تئوری توابع مفصل محاسبه می‌شود. طبق زمان تخمین برآورد شده برای مدت خشکسالی سه ماهه شدت خشکسالی بطور

بعد از انجام محاسبات تحلیل چهارمتغیره، احتمال توأم برای ایستگاه‌های مورد مطالعه بررسی گردید و سپس نمودارهای مربوط به ایستگاه تبریز در شکل (۶) نشان داده شده است. برای مثال، به ازاء مقادیر  $Dd=6$  و  $Ds=6$  میزان احتمال توأم برابر  $0/6$  و برای مقادیر  $Ds=10$  و  $Dd=8$  میزان احتمال توأم برابر  $0/9$  می‌باشد (شکل ۶- الف). برای  $Dd=6$  و  $Dp=6$  احتمال توأم برابر  $0/5$  می‌باشد و برای  $Dd=8$  و  $Dp=10$  این میزان احتمال برابر  $0/9$  می‌باشد (شکل ۶- ب). برای مقادیر  $Ds=6$  و  $Dp=6$  احتمال توأم برابر  $0/6$  و برای مقادیر  $Ds=8$  و  $Dp=10$  این میزان احتمال برابر  $0/8$  می‌باشد (شکل ۶- ج). برای  $Dd=6$  و فاصله بین آغاز خشکسالی  $DI=6$  احتمال توأم رخ دادن همزمان این حالات حدود  $0/6$  می‌باشد، همچنین برای مقادیر  $Dd=7$  و  $DI=10$  این میزان احتمال برابر  $0/9$  می‌باشد (شکل ۶- د). مشخصات آماری و همینطور مقادیر بیشینه و کمینه شدت برای مقادیر احتمال  $0/7$  و  $0/9$  برای سایر ایستگاه-

دارای دوره بازگشت ۴ سال می‌باشد. با افزایش شدت و مدت خشکسالی طبیعی است که میزان دوره بازگشت نیز افزایش می‌یابد. این موضوع در شکل (۷-ب) برای ایستگاه تبریز نشان داده شده است.

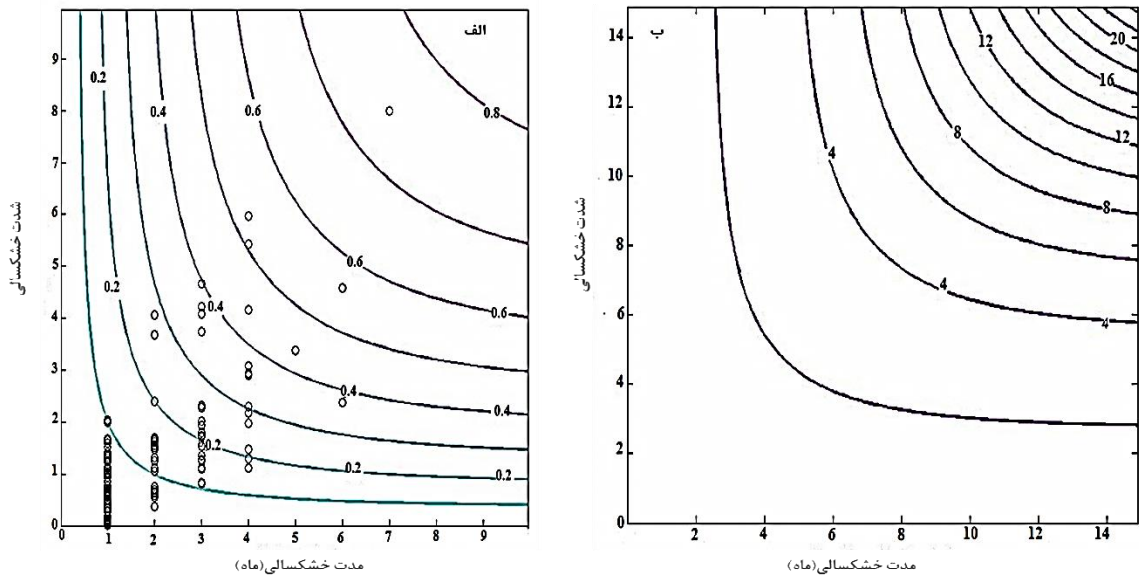
متوسط ۲/۵ بوده است و میزان احتمال آن ۰/۲ می‌باشد که این مقدار احتمال می‌باشد برای سایر مدت‌های خشکسالی این مقادیر در شکل (۷-الف) برای ایستگاه تبریز نشان داده شده است. مدت خشکسالی و شدت خشکسالی بدست آمده برای دوره های ۶ ماهه و بیشتر



شکل ۶- نمایش سه بعدی احتمال توأم شدت، مدت، فاصله بین آغاز دو خشکسالی متوالی و پیک خشکسالی‌های ایستگاه تبریز بر اساس تابع مفصل جوئی

جدول ۵ - مقادیر مینیمم و ماکزیمم مدت (ماه)، شدت، فاصله بین آغاز دو خشکسالی متوالی (ماه) و پیک خشکسالی برای مقادیر احتمال ۰/۷ و ۰/۹

ایستگاه	کمینه مقدار مشخصه‌ها (احتمال ۰/۷)				بیشینه مقدار مشخصه‌ها (احتمال ۰/۹)			
	Min Dp	Min Dl	Min Ds	Min Dd	Max Dp	Max Dl	Max Ds	Max Dd
آبادان	۰/۰۲۰	۱	۰/۰۲۰	۱	۲/۰۲	۱۵	۴/۱۷	۴
ارومیه	۰/۰۰۲	۲	۰/۰۰۲	۱	۳/۸۲	۱۶	۵/۶۰	۹
اهواز	۰/۰۱۵	۱	۰/۰۱۵	۱	۳/۶۶	۱۶	۵/۳۶	۵
تبریز	۰/۰۰۵	۲	۰/۰۰۵	۱	۲/۹۰	۱۱	۷/۹۹	۶
خرم آباد	۰/۰۱۰	۱	۰/۰۱۰	۱	۴/۵۶	۱۳	۸/۲۹	۶
خوی	۰/۰۰۸	۲	۰/۰۰۸	۱	۴/۵۳	۱۳	۷/۸۶	۷
دزفول	۰/۰۰۲	۱	۰/۰۰۲	۱	۳/۸۴	۱۴	۸/۱۴	۷
سقز	۰/۰۱۲	۰	۰/۰۱۲	۱	۶/۳۲	۱۴	۹/۴۵	۹
سنندج	۰/۰۱۴	۰	۰/۰۱۴	۱	۴/۹۰	۱۵	۹/۰۶	۸
کرمانشاه	۰/۰۱۲	۲	۰/۰۱۲	۱	۴/۱۲	۱۳	۹/۹۴	۶

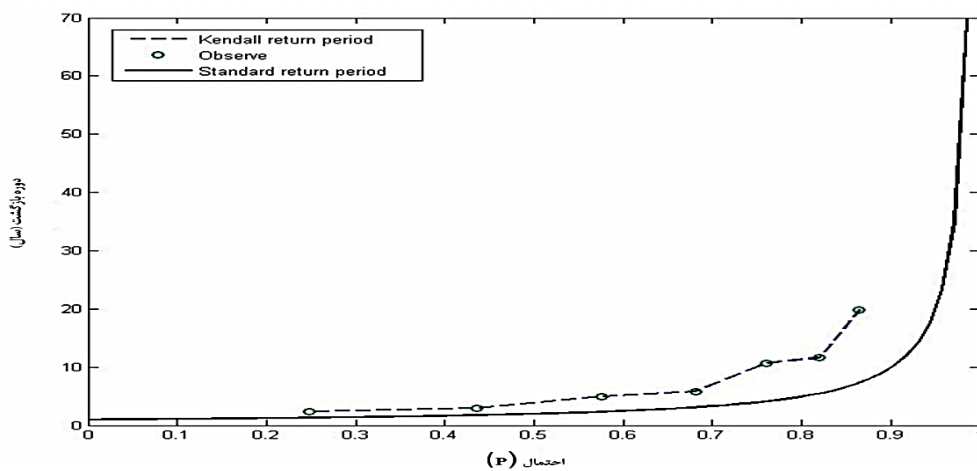


شکل ۷- احتمال (الف) و دوره بازگشت توأم خشکسالی (ب) برای ایستگاه تبریز

بازگشت استاندارد برای سطح احتمالی  $P=0.8$  برابر با ۵ سال است، در حالی که دوره بازگشت کندال متناظر تقریباً ۱۵ سال است. مطابق مطالعات انجام شده توسط Durante و Salvadori (۲۰۱۰) و Salvadori و همکاران (۲۰۱۱) مقادیر چندک حاصل از دوره بازگشت کندال بزرگتر از دوره بازگشت استاندارد است. واضح است که تخمین کم کندال باعث ایجاد خطا در برآورد مقدار ریسک می‌شود.

#### دوره بازگشت کندال

شکل (۸) دوره بازگشت کندال و دوره بازگشت استاندارد را نشان می‌دهد. در این شکل برای یک سطح احتمال مشخص یک دوره بازگشت کندال مشخص وجود دارد. همانطور که در شکل (۸) مشخص است، تفاوت بین دوره‌های بازگشت کندال (صحیح) و دوره بازگشت استاندارد (اشتباه) با افزایش سطح آستانه احتمالی، افزایش می‌یابد، به خصوص زمانی که  $P > 0.65$  است. دوره



شکل ۸- دوره بازگشت کندال بر اساس تابع توزیع تجربی کندال و دوره بازگشت استاندارد بر اساس تابع مفصل جوئی برای ایستگاه تبریز



## نتیجه‌گیری

در این مطالعه، ۹ خانواده از توابع مفصل به منظور ایجاد توزیع توأم مدت، شدت، فاصله بین آغاز دو خشکسالی متوالی و پیک خشکسالی با استفاده از شاخص  $SPI^{mod}$  برای ایستگاههای مورد مطالعه استفاده گردید. در ابتدا توزیع های مختلف آماری بر داده های شدت، مدت، فاصله بین آغاز دو خشکسالی متوالی و پیک آن برآزش داده شد. بر این اساس توابع توزیع گاما و نمائی بعنوان توابع توزیع برتر بر متغیرهای شدت و مدت خشکسالی و تابع توزیع مقادیر حدی بر داده های پیک و فاصله بین آغاز دو خشکسالی متوالی خشکسالی شناخته شدند. جهت تعیین تابع مفصل برتر از شاخص‌های NSE، AIC و حداکثر درست نمائی استفاده گردید و تابع مفصل جوئی برای ایستگاه‌های مورد مطالعه در هر سه حالت دو، سه و چهار متغیره به عنوان تابع مفصل برتر شناخته شد. جهت تحلیل چندمتغیره خشکسالی (چهارمتغیره) روش توابع مفصل تودرتو بکار گرفته شد. بر اساس توابع توزیع توأم مبتنی بر مفصل بدست آمده، برخی از خصوصیات احتمالاتی خشکسالی از قبیل احتمالات توأم، دوره های بازگشت چهارمتغیره، محاسبه شد. در ادامه تعریف دوره

بازگشت کندال مورد بررسی قرار گرفت و با تعریف استاندارد دوره بازگشت توأم مقایسه شد. نتایج نشان داد که در یک سطح احتمال بحرانی معین  $P$ ، مقدار دوره بازگشت کندال بیشتر از دوره بازگشت استاندارد است و این تفاوت با افزایش مقدار  $P$ ، افزایش می‌یابد. نتایج نشان داد که برای احتمال توأم چهارمتغیره معادل  $0/9$ ، طولانی‌ترین خشکسالی‌ها در ایستگاه ارومیه و سقز با مدت ۹ ماه روی می‌دهد که از بین این دو ایستگاه شدت خشکسالی در ایستگاه سقز ( $9/45$ ) بیشتر از ارومیه ( $5/60$ ) است. همچنین پیک خشکسالی در ایستگاه سقز با مقدار  $9/45$  بیشتر از پیک خشکسالی در ایستگاه ارومیه با مقدار  $3/82$  می‌باشد. این نتایج نشان می‌دهد که خشکسالی‌های سقز شدیدتر از خشکسالی‌های ارومیه با مدت مشابه می‌باشند. از بین ایستگاه‌های مورد مطالعه، بزرگترین شدت خشکسالی در احتمال  $0/9$  مربوط به ایستگاه کرمانشاه با شدت  $9/94$  در مدت ۶ ماه می‌باشد. چنین نتایجی می‌تواند اطلاعات با ارزشی در اختیار برنامه‌ریزان و سیاست‌گذاران بخش منابع آبی، به منظور اتخاذ تصمیمات مقتضی برای مقابله با پیامدهای خشکسالی قرار دهد.

## منابع مورد استفاده

- عباسیان، م. ص و ابریشم چی، ا. ۱۳۹۲. تحلیل توأم مدت و سختی خشکسالی با استفاده از توابع مفصل. پنجمین کنفرانس مدیریت منابع آب ایران، ۲۹ بهمن دانشگاه شهید بهشتی.
- میر اکبری، م و گنجی، آرمان. ۱۳۹۱. تحلیل دو متغیره مشخصه‌های شدت و مدت خشکسالی هواشناسی (مطالعه موردی: کرمانشاه). مجله پژوهش آب ایران. ۶ (۱۱): ۲۵-۱۷
- Abdi, A., Hassanzadeh, Y., Talatahari, S., Fakhri-Fard, A. and Mirabbasi, R., 2017. Regional bivariate modeling of droughts using L-components and copulas. *Stoch. Environ. Res. Risk. Assess.*, 1199-1210.
- Amirataee, B., Montaseri, M. and Rezaie, H., 2018. Regional analysis and derivation of copula-based drought Severity-Area Frequency curve in Lake Urmia basin, Iran. *J. Environ. Manage.*, 206: 134-144.
- Ayantobo, O.O., Li, Y., Song, S., Javed, T. and Yao, N., 2018. Probabilistic modelling of drought events in China via 2-dimensional joint copula. *J. Hydrol.*, 559: 373-391.
- Ayantobo, O.O., Li, Y. and Song, S., 2019. Multivariate Drought Frequency Analysis using Four-Variate Symmetric and Asymmetric Archimedean Copula Functions *Theor Appl Climatol*, 33:103-127.
- Chen, L., Singh, VP., Shenglian, G., Hao, Z. and Li, T., 2012. Flood coincidence Risk Analysis using Multivariate Copula Functions, *Journal of Hydrologic Engineering* 17:742-755 .
- Durante, F. and Salvadori, G., 2010. On the construction of multivariate extreme value models via copulas. *Environmetrics*, 21:143-161

- Ganguli, P. and Reddy, M.J., 2014. Evaluation of trends and multivariate frequency analysis of droughts in three meteorological subdivisions of western India. *Int J Climatol*, 34(3):911–928.
- Grimaldi, S. and Serinaldi, F., 2006. Asymmetric copula in multivariate flood frequency analysis. *Adv Water Resource*, 29(8):1155–1167.
- Joe, H., 1997. *Multivariate Models and Dependence Concepts*, London: Chapman & Hall, 399 pp.
- Kao, S.C. and Govindaraju, R.S., 2010. A copula-based joint deficit index for droughts. *Journal of Hydrology*, 380: 121-134.
- Liu, C.L., Zhang, Q., Singh, V.P. and Cui .Y., 2011. Copula-based evaluations of drought variations in Guangdong, South China. *Natural Hazards*, 59(3): 1533-1546.
- Mirabbasi, R., Fakheri-Fard, A. and Dinpashoh, Y., 2012. Bivariate drought frequency analysis using the copula method. *Theoretical and Applied Climatology*, 108.1:191-206.
- Mirakbari, M., Ganji, A. and Gallah, S. R., 2010. Regional bivariate frequency analysis of meteorological droughts. *Journal of Hydrologic Engineering*, 15 (12): 985–1000.
- Nelsen, R. B. ,2006. *An introduction to copulas*: Springer Verlag, New York, 215p.
- Salvadori ,G. De Michele, C. and Durante,F.,2011. Multivariate design via copulas. *Hydrol Earth Syst Sci Discuss*,8:5523–5558.
- Salvadori, G. and De Michele, C.,2004. Frequency analysis via copulas: theoretical aspects and applications to hydrological events. *Water Resour Res*, 40:W12511.
- Shiau, J.T., Modarres, R. and Nadarajah, S., 2012. Assessing multi-site drought connections in Iran using empirical copula. *Environmental Modeling & Assessment*, 17: 469-482.
- Sklar, A., 1959. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris*, 8: 229-231.
- Thilakarathne, M. and Sridhar, V., 2018. Characterization of future drought conditions in the Lower Mekong River Basin. *Weather and Climate Extremes*, 17: 47-58
- Van de Vyver, H. and Van den Bergh, J., 2018. The Gaussian copula model for the joint deficit index for droughts. *J. Hydrol*, 561: 987-999.
- Wilhite, D.A. and Glantz, M.H.,1985. Understanding the drought phenomenon: The role of definitions. *Water Int*, 10(3): 111-120.



ISSN 2251-7480

## Application of the Nested Copula Functions for Analysis of Four variate of Meteorological Droughts (Case Study: West of Iran)

Zabihollah Khani Temeliyeh<sup>1</sup>, Hossein Rezaei\*<sup>2</sup> And Rasoul Mirabbasi Najafabadi<sup>3</sup>

- 1) Ph.D Student in Water Resources Engineering, Department of Water Engineering, Faculty of Agriculture, University of Urmia, Urmia, Iran.
- 2) Professor, Department of Water Engineering, Faculty of Agriculture, University of Urmia, Urmia, Iran.  
\* Corresponding author: h.rezaie@urmia.ac.ir
- 3) Associate Professor, Department of Water Engineering, Faculty of Agriculture, University of Shahrekord, Shahrekord, Iran.

Received: 26-12-2019

Accepted: 16-09-2020

### Abstract

Meteorological drought is the result of a decrease in precipitation over a long period, which may occur on a week, month, year, or several years period depending on the climate of the studied region. The main purpose of this study is to application of nested copula functions in four variates analysis of drought phenomenon using the modified standardized precipitation index ( $SPI^{mod}$ ). For this purpose, the characteristics of drought, including severity, duration, inter-arrival time and drought peak were extracted using the mentioned index. Then, many different distributions were fitted to the mentioned variables, and the suitable marginal distribution was determined for each drought characteristic. Accordingly, for the variables of severity and duration of drought, the gamma, and exponential distribution functions were identified, respectively, and for the variables of inter-arrival time and drought peak, the general extreme values (GEV) distribution was identified as superior marginal distribution functions. In order to four variate analysis using the method of nested copulas, the fitness of 9 different copula functions were examined on the pairs of mentioned variables. To identify the best copula function, the Akaike Information Criterion (AIC), Maximum Likelihood, and Nash-Sutcliffe Efficiency coefficient (NSE) were used. The results showed that the Joe is the best fitted copula function for creating the multivariate distribution in the study area. Also, the joint probabilities and joint return periods were calculated for studied stations based on the Joe copula. The results showed that for the four variate probability of 0.9, the longest period of drought occurs in Urmia nad Saghez stations with duration of 9 months. However, the drought severity in Saghez satation ( $D_s=9.45$ ) is greater than Urmia station ( $D_s=3.82$ ). Among the studied stations, the highest drought severity is belong to Kermanshah station equal to 9.94 with a 6 months duration. The results of this study indicate that the four-variate analysis of drought characteristics can provide useful information for managers and planners for forecasting and planning to cope with the undesirable effects of drought.

**Keywords:** Joint Probability; Joint return period; Drought; Modified standardized precipitation index.