فصلنامه علمی پژوهشی
دانش مالی تحلیل اوراق بهادار
سال یازدهم، شماره سی‌وهفتم
بهار ۱۳۹۷

مدل‌سازی بازده مالی با استفاده از مدل "مارکوف ترکیبی متغیر بازمان نرمال-گارچ"

تاریخ دریافت: ۹۴/۰۶/۰۱ تاریخ پذیرش: ۹۴/۰۷/۲۰

شیرین علیپور[۱]
فاطمه عزیززاده[۲]
خسرو منطقی[۳]

چکیده

در مطالعات پیشین برای مدل‌سازی بازده مالی، از نرمال ترکیبی و همین‌طور فرایند مارکوف به طور مجزا، استفاده شده بود. در این تحقیق مدل نرمال ترکیبی به حالت مارکوف-نرمال ترکیبی گسترش یافته است و وزن‌های ترکیبی در هر وضعیت متغیر با زمان و تابعی از مشاهدات گذشته در نظر گرفته شده‌اند و به این ترتیب محدودیت ثابت بودن وزن‌ها مرتفع گردیده است. پارامترهای مدل پیشنهادی با استفاده از استنتاج بیزین تخمین زده شده‌اند و یک الگوریتم نمونه‌گیری گیبس برای محاسبه چگالی پسین ایجاد شده است. کارایی الگوریتم نیز با شبیه‌سازی آزموده شده و سپس در حالت دو وضعیته، در هر وضعیت با یک و دو مؤلفه نرمال و در حالت محدودشده (میانگین صفر) توسط تابع درستنمایی مورد مقایسه قرار گرفته است. در انتها مدل ارائه شده برای بازده‌های روزانه شاخص S&P۵۰۰ (۲۰۰۹-۲۰۱۵) و شاخص کل بورس تهران (۱۳۸۸-۱۳۹۴) به کار رفت و نشان دادیم مدل مارکوف ترکیبی متغیر با زمان نرمال-گارچ با دو مؤلفه نتایج بهتری نسبت به حالت تک مؤلفه‌ای (مارکوف-گارچ) ارائه می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: استنتاج بیزین، فرایند مارکوف، مدل‌های ترکیبی گارچ، تلاطم، بازده مالی.

۱- کارشناس ارشد رشته مهندسی مالی ، دانشکده علوم مالی دانشگاه خوارزمی (نویسنده مسئول) alipour.shirin@gmail.com
۲- عضو هیئت علمی دانشکده علوم مالی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران
۳- عضو هیئت علمی دانشکده علوم مالی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

۱- مقدمه

بازده دارایی‌های مالی و تلاطم از مهم‌ترین موضوعاتی است که شرکت‌کنندگان بازار را تحت تأثیر قرار می‌دهد. مدل‌سازی بازده به فهم الگوها و اثرات تغییرات قیمت کمک می‌کند و کاهش ریسک و اثرات منفی آن را ممکن می‌سازد. تاکنون هیچ روش قطعی برای پیش‌بینی تلاطم که معمولاً به صورت انحراف معیار نمونه در نظر گرفته می‌شود، به‌عنوان روشی با قابلیت اطمینان بالا مطرح نبوده و اگر در یک بازار مشخص یک روش کارایی بالاتری از خود نشان می‌دهد، در بازار دیگر لزوماً از کارایی بالایی برخوردار نیست و همواره محققان به دنبال روش‌های نو و ایجاد پیش‌بینی‌های دقیق‌تر بوده‌اند[۵]. این مقاله در جهت مدل‌سازی بازده سهام، مدل تغییر قیمت چند وضعیته بر اساس توزیع‌های ترکیبی را معرفی می‌نماید، که می‌تواند گستره‌ای از الگوهای نامتقارن ارائه دهد.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

مدل‌های گارچ و بسط‌های متعدد آن گرچه در ایجاد کشیدگی اضافی سری‌های بازده مالی و رفتار خوشه‌ای تلاطم[۱] نقش اساسی دارند و اغلب وقتی با بازده‌های هفتگی و یا افق‌های کوتاه‌تر به کار می‌روند توزیع شرطی متغیرها را کاملاً دم‌پهن بیان می‌کنند، اما هنوز موفق نشده‌اند علائم قطعی عدم نرمالیتی را نشان دهند[۷]. علاوه بر این در خانواده مدل‌های گارچ معمولاً واریانس شرطی ماندگاری بالایی را نشان می‌دهد به‌طوری‌که می‌توان گفت واریانس شرطی منعطف نیست و طی دوره نمونه ثابت می‌شود. بنابراین مدل‌هایی که در آن‌ها پارامترها مجازند طی زمان تغییر کنند برای مدل‌سازی تلاطم مناسب‌ترند. محققان با در نظر گرفتن توزیع‌های متفاوت برای ساختار خطا و یا با افزودن جزءهای نامتقارن در فرایند واریانس (برای دستیابی به ویژگی اثر اهرمی)، چارچوب گارچ کلاسیک را گسترش دادند. به‌طور مثال بولرسلو[۲] (۱۹۸۷) یک مدل گارچ با توزیع t-استیودنت پیشنهاد کرد و فرناندز و استیل[۳] t- استیودنت بودن توزیع را به t- استیودنت چوله تعمیم دادند[۱۹]. در سال‌های اخیر برخی مطالعات از ترکیبی از دو توزیع نرمال-گارچ برای مدل‌سازی فرایندهای تلاطم استفاده کردند که هر یک از چگالی‌های ترکیبی به‌تنهایی می‌توانند وضعیت‌های مختلف بازار را نشان دهند و وزن‌های ترکیبی با توجه به احتمال وقوع این حالات تعیین می‌شوند. مدل‌هایی نیز بر اساس ایده تغییر وضعیت ارائه شد. سوارت[۴] در سال ۱۹۸۹ مدلی را بررسی کرد که در آن بازده‌ها می‌توانند واریانس بالا یا پایین داشته باشند و تغییر وضعیت بین این حالت‌ها توسط یک فرایند مارکوف دو وضعیته انجام می‌شود[۸].

مدل‌های تغییر رژیم مارکوف-گارچ[۵] (MS-GARCH) تعمیم جالبی از مدل‌های گارچ اند. این مدل‌ها با ترکیب ساختار گارچ و فرایند مارکوف تولید می‌شوند چنانکه هر وضعیت مارکوف یک رفتار متفاوت گارچ را نتیجه می‌دهد. این ویژگی فرمول سازی مدل به‌صورت متغیر بازمان را گسترش داد و امکان پیش‌بینی‌های بهتری از تلاطم را فراهم آورد. یک طبقه دیگر از چنین مدل‌هایی توسط دینگ و گرنجر[۶] تحت عنوان مدل‌های گارچ مؤلفه‌ای[۷] (CGARCH) ارائه شد که با معرفی یک ترکیب خطی از دو مؤلفه گارچ برای واریانس کل در زمان t ایجاد می‌شود. طوری که شوک‌های وارده به یک مؤلفه به‌سرعت از بین می‌روند درحالی‌که مؤلفه دیگر نسبتاً مقاوم است. آل محمد، رضاخواه و حسینعلی زاده در سال ۲۰۱۳ مدل تغییر رژیم مارکوف-گارچ مؤلفه‌ای[۸] (MS-CGARCH) را با وزن‌های متغیر با زمان بررسی کردند، تلاطم در هر وضعیت ترکیب محدب دو مؤلفه گارچ متفاوت است. این مدل می‌تواند سطوح مختلفی برای تلاطم در نظر گیرد[۱].

از طرفی افراد زیادی ازجمله فاما توزیع ترکیبی نرمال[۹] (MN) را برای مدل کردن بازده‌های مالی به کار بردند[۱۶]. استفاده از ترکیب نرمال‌ها تفسیر احتمالی از دو یا تعداد بیشتری از گروه‌های ناهمگن

شرکت‌کننده‌ی بازار را ممکن می‌سازد، مثلاً می‌توان بین آربیتراژگران یا سرمایه‌گذاران عقلایی و معامله گران خرد تفاوت قائل شد. ویلار و پالم[10] در سال ۱۹۹۳ مدل نرمال گارچ تک مؤلفه‌ای را گسترش دادند و توزیع ترکیبی نرمال را در کنار یک ساختار نوع گارچ قرار دادند و خاصیت اثر اهرمی، کشیدگی اضافی و چولگی متغیر با زمان را نیز در مدل گنجاندند.

یک خاصیت معمول مدل‌های ترکیبی نرمال-گارچ وزن‌های ترکیبی ثابت توزیع‌های مؤلفه‌ها بود که در مقایسه با طبقه عمومی‌تری از مدل‌ها که وزن‌های ترکیبی متغیر با زمان داشتند، به پیش‌بینی‌های غیر دقیق‌تری منجر می‌شد. هاس و همکارانش در سال ۲۰۱۳ جنبه دیگری از اثر اهرمی که در ادبیات وجود دارد را موردتوجه قرار دادند. رابطه بین بازده و تلاطم نشان می‌دهد که تلاطم نسبت به بازده مثبت و منفی عکس‌العمل نامتقارن دارد و آن‌قدر که خبرهای بد در تلاطم آتی افزایش ایجاد می‌کند، خبرهای خوب تلاطم را کاهش نمی‌دهد. آن‌ها توانستند دو مدل متفاوت، با وزن‌های ترکیبی متغیر بازمان را معرفی کنند به طوری که اثر نامتقارنی بر تلاطم آتی از شوک‌های مثبت و منفی یا بزرگ و کوچک به دست آید. در مدل آن‌ها وارد شدن شوک مثبت یا منفی به بازار باعث افزایش تلاطم می‌شود اما اثرش برای شوک‌های منفی ارتقا و برای شوک‌های مثبت کاهش می‌یابد[۱۶].

۲-۱- مدل مارکوف ترکیبی متغیر بازمان نرمال-گارچ[11] (MMN(k,d)-GARCH(m,s))

k وضعیت را در نظر بگیرید که جابجایی بین وضعیت‌ها توسط یک فرایند مارکوف صورت می‌گیرد. هر وضعیت شامل d مؤلفه نرمال است و واریانس هر مؤلفه یک فرایند گارچ مجزا و متفاوت است.

(۴)

$$r_t = \sum_{k=1}^{K} y_{kt}\, \mathrm{I}(z_t = k)$$

$$y_{kt} \sim MN(\lambda_{1kt}, \dots, \lambda_{Dkt}, \mu_{1k}, \dots, \mu_{Dk}, \sigma^2_{1kt}, \dots, \sigma^2_{Dkt}),\ \sum_{d=1}^{D} \lambda_{dkt} = 1$$

$$\sigma^2_{dk_t} = w_{dk} + \alpha_{dk}\varepsilon^2_{k_{t-1}} + \beta_{dk}\sigma^2_{dk_{t-1}} \quad , k = 1, \dots, K \quad , d = 1, \dots, D$$

$$\varepsilon_{k_t} = r_t - \sum_{d=1}^{D} \lambda_{dkt}\, u_{dk} \qquad , k = 1, \dots, K$$

فرض کنید $\{z_t\}$ یک زنجیر مارکوف روی مجموعه متناهی $z = \{1, \dots, K\}$ با احتمال انتقال $\eta_{ij} = P(z_t = j | z_{t-1} = i)$ است و ماتریس η برابر با $\eta = [\eta_{ij}](k \times k)$ می باشد.

مدل‌هایی که واریانس معادله‌شان از فرایند گارچ پیروی می‌کنند به‌طور خاص توسط هاس و همکاران و همین‌طور الکساندر و لزر[12] بررسی شدند. با توجه به مطالعات آن‌ها استفاده از بیشتر از یک وقفه در معادله واریانس شرطی منفعت خاصی به دنبال ندارد. بنابراین مدل ترکیبی نرمال-گارچ (MN-GARCH) در این تحقیق به‌صورت نرمال ترکیبی با واریانس‌های گارچ (۱،۱) است (MN(d)-GARCH(1,1)).

رویکرد عمومی در مورد وزن مؤلفه‌ها این گونه است که آن‌ها را توسط توابع منطقی به تغییرات گذشته مربوط کنیم. به‌طور خاص در مدل دو مؤلفه‌ای که در این تحقیق مورد توجه است وزن مؤلفه دوم برابراست با:

$$\lambda_t(X_t) = \frac{\exp(\gamma' X_t)}{1 + \exp(\gamma' X_t)} \tag{۵}$$

$\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1})'$ بردار پارامترها و X_t برداری از p متغیر از پیش تعیین شده است که معمولاً شامل یک ثابت است. باونز X_t را $(1, \varepsilon^2_{t-1})'$ در نظر گرفت:

$$\lambda_t(\varepsilon_{t-1}) = \frac{\exp(\gamma_0 + \gamma_1 \varepsilon^2_{t-1})}{1 + \exp(\gamma_0 + \gamma_1 \varepsilon^2_{t-1})} \tag{۶}$$

بنابراین اگر $\gamma_1 > 0$ و مؤلفه اول رژیم دارای تلاطم بالاتر باشد، چنانچه ε^2_{t-1} بزرگ شود، λ_t به ۱ نزدیک می‌شود و وزن مؤلفه اول $(1 - \lambda_t)$ صفر می‌شود. انگیزه چنین مشخصه‌ای این است که شوک‌های بزرگ فشار وارده را از طریق کاهش احتمال ایجاد شوک

بزرگ در دوره بعدی فشار را تسکین دهند. در این رابطه λ_t تابعی متقارن از ε_{t-1} است و $\lambda_t(-\infty) = \lambda_t(\infty) = 1$، هاس و همکارانش برای اینکه شوک‌های گذشته اثر نامتقارن داشته باشند $X_t = (1, \varepsilon_{t-1})'$ در نظر گرفتند:

$$\lambda_t(\varepsilon_{t-1}) = \frac{\exp(\gamma_0 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1})}{1 + \exp(\gamma_0 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1})} \qquad (۷)$$

برای توضیح منطق این رابطه فرض کنید مؤلفه اول رژیم دارای تلاطم بالا است و $\gamma_1 > 0$. بنابراین:

$$\frac{d\lambda_t}{d\varepsilon_{t-1}} = \gamma_1 \lambda_t (1 - \lambda_t) > 0 \qquad (۸)$$

و واریانس شرطی که برای رژیم k ام از رابطه زیر به دست می‌آید، برای شوک‌های مثبت نسبت به شوک‌های منفی، کمتر خواهد بود[۱۶].

$$V_{t-1}(r_t) = \sum_{d=1}^{D} \lambda_{dkt} (\sigma_{dk_t}^2 + \mu_{\mathrm{dk}}^2) - (\sum_{d=1}^{D} \lambda_{dkt} u_{dk})^2 \qquad (۹)$$

۲-۲- تخمین پارامترها با استفاده از مدل گزینی بیزین[۱۳]

با توجه به اینکه روش حداکثر درستنمایی در مورد مدل‌های ترکیبی به آسانی مدل‌های غیر ترکیبی نبوده و اگر در محاسبات تخمین، وابستگی به مسیر وجود داشته باشد تخمین با روش‌هایی مثل حداکثر درستنمایی ممکن نیست، از استنتاج بیزین استفاده می کنیم.

نمونه‌گیری گیبس مشهورترین روش زنجیر مارکوف مونت کارلو[۱۴] است که در اینجا با بیان یک مثال ساده ایده این الگوریتم را شرح می‌دهیم. اگر مدلی با سه پارامتر مجهول θ_1 و θ_2 و θ_3 و بردار Y که مجموعه داده‌های در دسترس است را در نظر بگیریم و فرض کنیم به دست آوردن تابع درستنمایی مشکل باشد اما توزیع شرطی هر سه پارامتر به‌شرط دیگر پارامترها معلوم باشند، نمونه‌های تصادفی از $\pi_1(\theta_1|\theta_{2,0}, \theta_{3,0}, Y)$ و $\pi_2(\theta_2|\theta_{1,1}, \theta_{3,0}, Y)$ و $\pi_3(\theta_3|\theta_{1,1}, \theta_{2,1}, Y)$ استخراج کرده و آن‌ها را به ترتیب $\theta_{1,1}$ و $\theta_{2,1}$ و $\theta_{3,1}$ می‌نامیم. از سه مقدار جدید به‌دست‌آمده برای نقاط شروع در تکرار بعدی استفاده کرده و $\theta_{1,2}$، $\theta_{2,2}$ و $\theta_{3,2}$ را به دست می‌آوریم. حاصل m بار تکرار این الگوریتم دنباله‌ی تصادفی زیر است.

$$(\theta_{1,1}, \theta_{2,1}, \theta_{3,1}), \dots, (\theta_{1,m}, \theta_{2,m}, \theta_{3,m})$$

نشان داده‌شده است که اگر شرایط نظم برقرار باشد، برای مقادیر بزرگ m، $(\theta_{1,m}, \theta_{2,m}, \theta_{3,m})$ به‌طور تقریبی معادل با نمونه‌ی به‌دست‌آمده از توزیع توأم $f(\theta_1, \theta_2, \theta_3|Y)$ می‌باشد. برآورد نقطه‌ای θ_i و واریانس آن از روابط زیر به دست می‌آید که درواقع برای برآورد از n نمونه اول استفاده نمی‌شود[۱].

$$\hat{\theta}_i = \frac{1}{m-n} \sum_{j=n+1}^{m} \theta_{i,j}, \quad \widehat{\sigma^2}_i = \frac{1}{m-n-1} \sum_{j=n+1}^{m} (\theta_{i,j} - \hat{\theta}_i)^2 \qquad (۱۰)$$

در حالت هایی که چگالی پسین دارای ساختار بسته ای نباشد و چگالی پسین θ_i به‌شرط سایر پارامتر خود تابعی از θ_i باشد، استفاده از الگوریتم گیبس باعث دشوار شدن مسئله می‌شود و بهتر است از الگوریتم گریدی گیبس استفاده کنیم. این الگوریتم توسط ریتر [۱۵]و تانر[۱۶] در سال ۱۹۹۲ معرفی شده است. روش نمونه‌گیری گریدی گیبس چگالی شرطی را روی نقاطی با فواصل معین ارزیابی می‌کند و از توابع خطی و یا ثابتی بر اساس این نقاط گریدی استفاده می‌کند تا تابع توزیع تجمعی چگالی‌های شرطی را بر اساس نقاط گریدی تقریب بزند. توزیع‌های به دست آمده برای تولید مقادیر تصادفی به کار می‌روند.

فرض کنید $f(\theta_i|Y,\theta_{-i})$ چگالی پسین θ_i باشد و θ_{-i} بردار پارامترها به غیر از θ_i باشد، در همان مثال مدل با سه پارامتر مجهول $\theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ برای $\theta_{-1}=(\theta_2,\theta_3)$ الگوریتم گریدی گیبس به‌صورت زیر خواهد بود:

۱) از بازه مناسبی که برای θ_i در نظر گرفته‌ایم، یک سری نقطه انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که $\theta_{i1}\le\theta_{i2}\le\cdots\le\theta_{im}$ باشد. به ازای هر نقطه گریدی چگالی پسین شرطی یعنی $k_j=(\theta_{ij}|Y,\theta_{-i})$ را تخمین می‌زنیم.

۲) با استفاده از $k_1,\ldots,k_G$ تخمینی از تابع توزیع تجمعی $f(\theta_i|Y,\theta_{-i})$ به دست آید.

۳) از چگالی یکنواخت (۱ ,۰) عددی شبیه‌سازی کرده و برای دستیابی به استخراجی تصادفی از θ_i مشاهده را توسط معکوس تابع توزیع تجمعی تخمین می‌کنیم.

در مدل معرفی شده فرض کنید $Y=(y_1,\ldots,y_T)$ بردار مشاهدات، $Z=(z_1,\ldots,z_T)$ بردار مقادیر زنجیر مارکوف باشد و بردار پارامترهای مدل شامل $\theta=(w_{dk},\alpha_{dk},\beta_{dk},\gamma_k)$ ،$\mu=(\mu_{dk})$ ،$\eta=(\eta_{11},\eta_{22})$ برای k=۱،۲ و d=۱،۲ باشد. چگالی پسین مدل به‌صورت زیر است:

$$p(\theta,\eta,\mu,Z|Y)\propto p(\theta,\eta,\mu)p(Z|\theta,\eta,\mu)p(Y|\theta,\eta,\mu,Z) \qquad (۱۱)$$

که $p(\theta,\eta,\mu)$ توزیع پیشین پارامترها می‌باشد. ازآنجا که تابع جرم احتمال شرطی Z به‌شرط (θ,η,μ) از بردار θ و μ مستقل است بنابراین:

$$p(Z|\theta,\eta,\mu)=p(Z|\eta_{11},\eta_{22}) =\prod_{t=1}^{T}p(z_{t+1}|z_t,\eta_{11},\eta_{22}) ={p_{11}}^{n_{11}}(1-p_{11})^{n_{12}}{p_{22}}^{n_{22}}(1-p_{22})^{n_{21}} \qquad (۱۲)$$

که n_{ij} تعداد انتقال‌های یک مرحله‌ای از رژیم i ام به رژیم j ام است. تابع چگالی شرطی Y به‌شرط مقادیر Z و پارامترها به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$p(Y|\theta,\eta,\mu,z)=\prod_{t=1}^{T}f(y_t|\theta,\mu,z_t=k,Y_{t-1}) \qquad (۱۳)$$

به‌طوری که چگالی‌های پیش‌بینی کننده ی یک گام بعد، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$f(y_t|\theta,\mu,z_t=k,Y_{t-1}) =\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{dk_t}}}\exp\left(-\frac{(y_t-\mu_{dk})^2}{\sigma^2_{dk_t}}\right) \qquad (۱۴)$$

فرض کنید اندیس فوقانی (r) بر روی Z، θ، μ و η بیانگر مقدار برآوردشان در تکرار r ام باشد. هر تکرار از الگوریتم از چهار مرحله‌ی زیر تشکیل‌شده است که این چهار مرحله تا زمانی که همگرایی حاصل شود، تکرار می‌شوند. در ادامه به شرح هر یک از این مراحل خواهیم پرداخت[۱].

۲-۳- نمونه‌گیری از متغیر رژیم $(Z^{(r)})$ به‌شرط $\eta^{(r-1)}$ و $\theta^{(r-1)}$ و $\mu^{(r-1)}$ (نمونه‌گیری z_t)

فرض کنید $p(z_t|\eta,\theta,\mu,Y_t)$ توزیع مانای زنجیر مارکوف باشد. توزیع پسین z_t به‌شرط Y_t متناسب با رابطه ی زیر است:

$$p(z_t|\eta,\theta,\mu,Y_t) \propto f(y_t|\theta,\mu,z_t=k,Y_{t-1})p(z_t|\eta,\theta,\mu,Y_{t-1}) \qquad (۱۵)$$

۱) که چگالی پیش‌بینی $f(y_t|\theta,\mu,z_t=k,Y_{t-1})$ از رابطه (۱۴) محاسبه می‌شود و با استفاده از قانون کل احتمال $p(z_t|\eta,\theta,\mu,Y_t)$ به‌صورت زیر به دست می‌آید.

۲) با یک الگوریتم پسرو درایه های زنجیر z_t را تعیین می کنیم، آخرین درایه z_t توسط آخرین ستون $p(z_t|\eta,\theta,\mu,Y_t)$ مشخص می‌شود و برای باقی درایه ها p_1 و $p_۲$ را محاسبه می کنیم. p_1 از ضرب درایه مربوط

به (سطر اول و z_t بعدی) ماتریس η به دست می آید. (p_2 نیز به همین ترتیب)

۳) $q_1 = p(z_t = 1|z_t \geq 1,.) = \frac{p_1}{\sum_{l=1}^{2} p_l}$، z_t توزیع یکنواخت گسسته دارد و به احتمال q_1، ۱= z_t و به احتمال $(1-q_1)$، ۲= z_t است.

۲-۴- نمونه‌گیری از احتمالات انتقال ($\eta^{(r-1)}$) به‌شرط $Z^{(r)}$ (نمونه‌گیری η)

۱) توزیع پیشین یک توزیع بتا است و توزیع پسین نیز یک توزیع بتا خواهد بود.

۲) $$p(\eta_{11}|Z_t) \propto p(\eta_{11})p(Z_t|\eta_{11}) = {\eta_{11}}^{C_{11}+n_{11}-1}(1-\eta_{11})^{C_{12}+n_{12}-1}$$

۳) $$p\left(\eta_{22}\middle|Z_t\right) \propto p\left(\eta_{22}\right)p\left(Z_t\middle|\eta_{22}\right) = {\eta_{22}}^{C_{22}+n_{22}-1}\left(1-\eta_{22}\right)^{C_{21}+n_{12}-1}$$

n_{12} تعداد دفعاتی است که Z_t از رژیم ۱ به ۲ تغییر وضعیت داده است

۲-۵- نمونه‌گیری از $\theta^{(r)}$ به‌شرط $Z^{(r)}$ و $\mu^{(r)}$ و $\eta^{(r)}$ (نمونه‌گیری θ)

۱) در ابتدا G نقطه پایه‌ای را انتخاب می‌کنیم. مقدار G معمولاً ۳۳ در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از رابطه:

(۱۶)

$$p(\theta|Y,Z,\eta,\mu) \propto p(\theta)\prod_{t=1}^{T} f(y_t|\theta,\mu,z_t=k,Y_{t-1}) = p(\theta)\prod_{t=1}^{T}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{dk_t}^2}}\exp(-\frac{(y_t-\mu_{dk})^2}{\sigma_{dk_t}^2})$$

۲) به ازای هر نقطه پایه‌ای تابع چگالی پسین شرطی $k(a_{0i}|Z_t,\mu,Y_t,\theta_{-a_{0i}})$ را تخمین زده تا بردار $G_k = (k_1,\dots,k_G)$ حاصل شود.

۳) $G_\phi = (0,\phi_2,\dots,\phi_G)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

(۱۷)

$$\phi_j = \int_{a_{0i}^1}^{a_{0i}^j} k(a_{0i}\left|\theta_{-a_{0i}}^{(r)}, Z_t^{(r)}, \mu^{(r)}, Y_t\right) da_{0i}, \quad j = 2,\dots,G$$

۴) مقدار u را از توزیع $U(0,\phi_G)$ شبیه‌سازی می‌کنیم و با استفاده از درون‌یابی عددی وارون $\phi(a_{0i}\left|\theta_{-a_{0i}}^{(r)}, Z_t^{(r)}, \mu^{(r)}, Y_t\right)$ کرده تا نمونه‌ای برای پارامتر a_{0i} در تکرار $r+1$ ($a_{0i}^{(r+1)}$) از $p(a_{0i}\left|\theta_{-a_{0i}}^{(r)}, Z_t^{(r)}, \mu^{(r)}, Y_t\right)$ حاصل شود.

$$\frac{\phi_j}{\phi_G} < u < \frac{\phi_{j+1}}{\phi_G} \quad (۱۸)$$

$$a_{0i}^j + (a_{0i}^{j+1} - a_{0i}^j)\frac{u - \frac{\phi_j}{\phi_G}}{\frac{\phi_{j+1}}{\phi_G} - \frac{\phi_j}{\phi_G}} \quad (۱۹)$$

۲-۶- نمونه‌گیری از $\mu^{(r)}$ به‌شرط $Z^{(r)}$ و $\theta^{(r)}$ و $\eta^{(r)}$ (نمونه‌گیری μ)

چگالی پسین μ به‌شرط این که توزیع پیشین آن $p(\mu)$ باشد به‌صورت زیر است:

(۲۰)

$$p(\mu|Y,Z,\eta,\theta) \propto p(\mu)\prod_{t=1}^{T} f(y_t|\theta,\mu,z_t=k,Y_{t-1}) = p(\mu)\prod_{t=1}^{T}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{dk_t}^2}}exp(-\frac{(y_t-\mu_{dk})^2}{\sigma_{dk_t}^2})$$

که از η مستقل است. نمی‌توان این تابع را با یک μ، بدون در نظر گرفتن سایر μ ها به دست آورد، به‌علاوه، از آنجا که $\sigma_{t,k}^2$ وابسته به μ_{dk} می‌باشد، شکل درستنمایی به‌عنوان تابعی از μ ها چگالی شناخته‌شده‌ای نیست. از الگوریتم گریدی گیبس استفاده می‌کنیم و توزیع‌های پیشین را توزیع‌های یکنواخت در نظر می‌گیریم [۹].

۳- ارائه مدل در داده های شبیه سازی شده

در این بخش با استفاده از شبیه‌سازی، کارایی الگوریتم برآورد پارامترهای مدل را نشان می‌دهیم. برای این کار ۱۵۰۰ نمونه از مدل MMN(2,2) – GARCH تولید می‌کنیم و مدل مورد بحث را روی آن پیاده می نماییم. فرض کنیم $\{z_t\}$ زنجیر مارکوف با فضای حالت {۱, ۲}= K باشد و ماتریس احتمال انتقال η باشد

$$\eta = \begin{pmatrix} 0.65 & 0.35 \\ 0.05 & 0.95 \end{pmatrix}$$

در رژیم اول (z_t=۱) داریم

$$y_{1t} = [1 - \frac{exp\left(1.5(\varepsilon_{1_{t-1}})\right)}{1 + exp\left(1.5(\varepsilon_{1_{t-1}})\right)}]N(-0.05, \sigma_{11_{t-1}}^2) + \frac{exp\left(1.5(\varepsilon_{1_{t-1}})\right)}{1 + exp\left(1.5(\varepsilon_{1_{t-1}})\right)}N(0.025, \sigma_{21_{t-1}}^2)$$

که ε_{1_t} به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\varepsilon_{1_t} = r_t - (\left(\left[1 - \frac{exp\left(1.5(\varepsilon_{1_{t-1}})\right)}{1 + exp\left(1.5(\varepsilon_{1_{t-1}})\right)}\right] * (-0.05)\right) + \left(\frac{exp\left(1.5(\varepsilon_{1_{t-1}})\right)}{1 + exp\left(1.5(\varepsilon_{1_{t-1}})\right)} * (0.025)\right))$$

و واریانس شرطی هر مؤلفه برابر است با

$$\sigma_{11_t}^2 = 2 + 0.5\varepsilon_{1_{t-1}}^2 + 0.2\sigma_{11_{t-1}}^2$$

$$\sigma_{21_t}^2 = 0.5 + 0.2\varepsilon_{1_{t-1}}^2 + 0.25\sigma_{21_{t-1}}^2$$

در رژیم دوم (z_t=۲)

$$y_{2t} = \left[1 - \frac{exp\left(0.75(\varepsilon_{2_{t-1}})\right)}{1 + exp\left(0.75(\varepsilon_{2_{t-1}})\right)}\right]N(0.05, \sigma_{12_{t-1}}^2) + \frac{exp\left(0.75(\varepsilon_{2_{t-1}})\right)}{1 + exp\left(0.75(\varepsilon_{2_{t-1}})\right)}N(0.07, \sigma_{22_{t-1}}^2)$$

ε_{2_t} تعریف می‌شود

$$\varepsilon_{2_t} = r_t - (\left(\left[1 - \frac{exp\left(0.75(\varepsilon_{2_{t-1}})\right)}{1 + exp\left(0.75(\varepsilon_{2_{t-1}})\right)}\right] * (0.05)\right) + \left(\frac{exp\left(0.75(\varepsilon_{2_{t-1}})\right)}{1 + exp\left(0.75(\varepsilon_{2_{t-1}})\right)} * (0.07)\right)$$

و واریانس شرطی هر مؤلفه به‌صورت زیر است

$$\sigma_{12_t}^2 = 0.5 + 0.25\varepsilon_{2_{t-1}}^2 + 0.1\sigma_{12_{t-1}}^2$$

$$\sigma_{22_t}^2 = 0.25 + 0.1\varepsilon_{2_{t-1}}^2 + 0.25\sigma_{22_{t-1}}^2$$

برای تولید سری زمانی، داده‌های نرمال تصادفی با پارامترهای ذکر شده در بالا تولید نمودیم. در جدول ۱ آماره‌های مربوط به داده‌های شبیه‌سازی‌شده از مدل مذکور گزارش‌شده است.

جدول ۱- آماره‌های توصیفی برای داده‌های شبیه‌سازی‌شده

کشیدگی	مینیمم	ماکزیمم	چولگی	انحراف معیار	میانگین
۶,۷۰۵	-۳,۷۳۹۳	۴,۹۱۱	۰,۳۱۷۷	۰,۸۲۷۹	۰,۰۴۳

سپس این داده‌ها و چگالی‌های اولیه به عنوان ورودی به الگوریتم گیبس داده شدند. چگالی پیشین هریک از پارامترها توزیع یکنواخت بین بازه‌های

گزارش شده می‌باشند (به‌غیراز η_{11} و η_{22}، زیرا این دو پارامتر از توزیع بتا به دست می‌آیند)، این بازه‌ها باید طوری انتخاب شوند که نه آن‌قدر کوچک باشند که باعث ناقص شدن چگالی پسین شوند و نه آن‌قدر بزرگ باشد که موجب طولانی شدن زمان محاسبات شوند. ما این بازه‌ها را با الهام از نتایج تجربی قبلی (مثل مقاله باونز و تحقیق آل محمد) انتخاب کرده‌ایم.

در جدول ۲ مقادیر برآورد شده پارامترهای مدل شبیه‌سازی‌شده گزارش‌شده است. هدف این قسمت اعتبارسنجی بود و همان‌طور که نتایج جدول نشان می‌دهد، انحراف معیارها نسبتاً کوچک‌اند و میانگین‌های پسین به جز چند استثنا در کمتر از یک انحراف معیار پسین از مقادیر شبیه‌سازی شده هستند.

جدول ۲- نتایج برآورد داده‌های شبیه‌سازی‌شده

انحراف استاندارد	میانگین	چگالی‌های اولیه	مقادیر شبیه‌سازی	
۰٫۱۴	−۰٫۰۴	(−۰٫۳۰ ۰٫۲۰)	−۰٫۰۵	μ_{11}
۰٫۰۷	−۰٫۰۲	(۰٫۱۵ ۰٫۱۰)	−۰٫۰۲	μ_{21}
۰٫۰۶	۰٫۰۵	(−۰٫۰۵ ۰٫۱۵)	۰٫۰۵	μ_{12}
۰٫۰۳	۰٫۰۹	(۰٫۰۵ ۰٫۱۵)	۰٫۰۷	μ_{22}
۰٫۸۱	۲٫۱۱	(۰٫۵۰ ۳٫۵۰)	۲٫۰۰	a_{01}
۰٫۲۳	۰٫۶۱	(۰٫۲۰ ۱٫۰۰)	۰٫۵۰	a_{11}
۰٫۰۹	۰٫۲۲	(۰٫۰۵ ۰٫۴۰)	۰٫۲۰	a_{21}
۰٫۲۲	۰٫۸۲	(۰٫۴۰ ۱٫۱۵)	۰٫۵۰	b_{01}
۰٫۱۰	۰٫۳۳	(۰٫۱۵ ۰٫۵۰)	۰٫۲۰	b_{11}
۰٫۰۹	۰٫۳۵	(۰٫۲۰ ۰٫۵۰)	۰٫۲۵	b_{21}
۰٫۲۴	۰٫۶۲	(۰٫۲۰ ۱٫۰۰)	۰٫۵۰	a_{02}
۰٫۱۵	۰٫۲۵	(۰٫۰۰ ۰٫۵۰)	۰٫۲۵	a_{12}
۰٫۰۹	۰٫۱۵	(۰٫۰۰ ۰٫۳۰)	۰٫۱۰	a_{22}
۰٫۱۰	۰٫۳۲	(۰٫۱۵ ۰٫۵۰)	۰٫۲۵	b_{02}
۰٫۰۷	۰٫۱۳	(۰٫۰۰ ۰٫۲۵)	۰٫۱۰	b_{12}
۰٫۱۳	۰٫۲۷	(۰٫۰۵ ۰٫۵۰)	۰٫۲۵	b_{22}
۰٫۸۵	۱٫۹۴	(۰٫۳۵ ۳٫۳۰)	۱٫۵۰	γ_1
۰٫۲۱	۰٫۷۴	(۰٫۳۵ ۱٫۱۰)	۰٫۷۵	γ_2
۰٫۱۶	۰٫۵۹	(۰٫۵۰ ۱٫۰۰)	۰٫۶۵	η_{11}
۰٫۰۱	۰٫۹۷	(۰٫۵۰ ۱٫۰۰)	۰٫۹۵	η_{22}

در این قسمت، مدل را بر روی داده‌های واقعی برازش داده‌ایم. از داده‌های روزانه شاخص *S&P500* از تاریخ ۲۰۰۹/۰۴/۱ تا ۰۳/۳۱/ ۲۰۱۵ و همچنین داده‌های مربوط به شاخص کل بورس تهران از تاریخ ۱۳۸۸/۰۱/۱۲ تا ۱۳۹۴/۰۱/۱۱ استفاده می‌کنیم که به ترتیب شامل ۱۵۱۰ و ۱۴۵۰ مشاهده می‌باشند.

آماره‌های توصیفی در جدول ۳ آمده‌اند. در هر دو سری داده کشیدگی اضافی مشاهده می‌شود. داده‌های S&P۵۰۰ یک چولگی منفی و داده‌های مربوط به بورس تهران یک چولگی مثبت آرام دارند. در اینجا برای محاسبه بازده، از بازده لگاریتمی استفاده می‌شود و r_t برابر است با

$$r_t = 100 * log(\frac{P_t}{P_{t-1}})$$

جدول ۳- آماره‌های توصیفی برای بازده‌های S&P۵۰۰ و بورس تهران

	میانگین	انحراف معیار	چولگی	ماکزیمم	مینیمم	کشیدگی
S&P۵۰۰	۰,۰۶	۱,۰۴	-۰,۳۹۹۴	۴,۶۳	-۶,۹۰	۶,۷۰۷۰
بورس تهران	۰,۱۴۵	۰,۷۶	۰,۰۶۱۲	۵,۲۶	-۵,۶۷	۷,۵۳۳۹

مدل MMN(k,d) –GARCH(*1,1*) برای حالت دو وضعیته (k =۲) و با یک و دو چگالی نرمال در هر وضعیت (d=۱, ۲) تخمین زده‌شده است. در حالت d=۱ (MMN(*2,1*)-GARCH) مدل دو رژیم مشخص بازار را می‌گیرد رژیمی که تلاطم پایین‌تری دارد و بیشتر اتفاق می‌افتد به‌عنوان رژیم عادی معرفی‌شده و رژیم با تلاطم بالاتر و احتمال وقوع پایین‌تر تحت عنوان رژیم غیرمعمول شرایط غیرعادی بازار را نشان می‌دهد که به‌ندرت اتفاق می‌افتد ولی تلاطم آن بالاتر از سطح معمول است. در حالت d=۲ ، مدل چهار وضعیت مختلف بازار را پوشش می‌دهد. مؤلفه اول و دوم در رژیم اول به ترتیب نشان‌دهنده بازار به‌شدت متلاطم و بازار نسبتاً متلاطم است، در رژیم دوم مؤلفه اول، بازار با تلاطم متوسط و مؤلفه دوم وضعیتی که در آن تلاطم پایین‌تر از حد معمول است را نشان می‌دهد. وزن‌های برآورد شده سرعت انتقال از یک مؤلفه نرمال به دیگری را نشان می‌دهد که در رژیم اول که تلاطم بالاتری را پوشش می‌دهد این انتقال از مؤلفه با تلاطم شدید به مؤلفه با تلاطم بالا سریع‌تر صورت می‌گیرد ($\gamma_1 > \gamma_2$).

اگر در نرمال ترکیبی از میانگین صفر استفاده نماییم مدل محدودشده MMN(*2,2*)-GARCH به دست می‌آید، که این مدل نیز جهت مقایسه تخمین زده‌شده است. با استفاده از تحلیل بیزی و الگوریتم شرح داده‌شده در قسمت برآورد، پارامترهای مدل را در دو سری S&P*500* و شاخص بورس تهران برآورد کرده‌ایم. برای تعیین تعداد تکرارهای الگوریتم از روش CUMSUM استفاده کرده‌ایم که روشی برای ارزیابی مدت زمان اجرای یک زنجیر مارکوف مونت‌کارلو تا رسیدن به شواهدی از مانایی (یا مانایی تقریبی) توزیع می‌باشد. این روش توسط یو و مایکلند در سال ۱۹۹۸ ارائه شد و راه حلی گرافیکی است که در آن توسط نمودار CUMSUM بر اساس خروجی نمونه‌گیر، همگرایی پایش می‌شود. بروکز در سال ۱۹۹۸ روش پیاده‌سازی جدیدی ارائه کرد که گرچه محاسبات بیشتری دارد اما به تشخیصی شهودی‌تر و روشی کمی‌تر منجر می‌شود. بر این اساس تعداد تکرار نمونه‌گیری گیبس ۱۰۰۰۰ بار است که ۶۰۰۰ تای اول در نظر گرفته نمی‌شوند.

پس از تخمین پارامترهای مدل، برای ارزیابی و مقایسه مدل‌ها لگاریتم تابع درستنمایی را به روش زیر به دست می‌آوریم و مدل با بزرگ‌ترین مقدار درستنمایی را انتخاب می‌کنیم [۸].

$$L(\Psi) = \prod_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{K} \sum_{d=1}^{D} \Delta_k^{(t)}\, MN(y_t|\mu, \theta) \qquad (۲۱)$$

که در آن Ψ بردار پارامترهای $\eta =(\eta_{dk})$ ،$\mu = (\mu_{dk})$ ،$\theta = (w_{dk}, \alpha_{dk}, \beta_{dk}, \gamma_k)$ برای k=*1,…,*K ، $y = (y_1, \dots, y_T)$ است و $\Delta_k^{(t)}$ برابر است با:

(۲۲)

$$\Delta_k^{(t)} = \frac{\sum_{m=1}^{K} MN(y_{t-1}|Z_{t-1}=m, I_{t-2})\, p(Z_{t-1}=m|I_{t-2})\, p_{m,k}}{\sum_{m=1}^{K} MN(y_{t-1}|Z_{t-1}=m, I_{t-2})\, p(Z_{t-1}=m|I_{t-2})}$$

مقادیر لگاریتم درستنمایی برای مقایسه کارایی در جدول ۴ آمده است. نتایج، عملکرد قوی مدل‌هایی که در هر وضعیت دو مؤلفه دارند را نشان می‌دهد.

جدول ۴- مقادیر لگاریتم درستنمایی برای بازده‌های S&P ۵۰۰ و شاخص کل بورس تهران

	log-likelihood	
	S&P۵۰۰	شاخص کل بورس تهران
MMN(۲،۱)	-566.19	-543.98
MMN(۲،۲)	-556.13	-۵۳۴،۵۳
MMN(۲،۲)μ=۰	-559.32	-۵۳۴،۴۱

مدل‌های MMN(۲،۲) و MMN(۲،۲)μ=۰ نتایج نزدیکی را نشان می‌دهند. مدل MMN(۲،۲) برای سری بازده شاخص S&P ۵۰۰ و مدل MMN(۲،۲) با میانگین صفر برای سری بازده شاخص بورس تهران بهترین عملکرد را دارد. بنابراین مدل‌هایی که از ترکیب نرمال در هر وضعیت استفاده کردند، ساختار منعطف‌تری دارند و می‌توانند انواع شوک‌ها را ازجمله شوک‌های بسیار بزرگ، بزرگ، متوسط و کوچک را پوشش دهند. این مدل‌ها با اختلاف، عملکرد بهتری داشته‌اند.

۴- کاربرد نتایج

مدل معرفی شده در سه حالت مختلف ۱- دو وضعیته و هر وضعیت یک چگالی نرمال (MMN(*2,1*)-GARCH(*1,1*)) ۲- دو وضعیته و هر وضعیت ترکیبی از دو چگالی نرمال (MMN(*2,2*)-GARCH(*1,1*)) ۳- همان حالت قبل با در نظرگرفتن چگالی‌های نرمال با میانگین‌های صفر (MMN(*2,2*)-GARCH(*1,1*)$\mu=0$) بر روی بازده‌های روزانه شاخص کل بورس تهران و S&P*500* در شش سال اخیر مورد مقایسه گرفته است. پیش از این به طور جداگانه بررسی‌هایی بر روی حالت‌های اول و سوم که نوع محدود شده مدل‌اند، انجام شده بود (مثلاً اگر در حالت اول میانگین‌ها را صفر در نظر بگیریم همان MS-GHARCH را به دست می‌دهد). ما این حالت‌ها را در کنار حالت محدود نشده قرار داده‌ایم و با یک روش ثابت پارامترها را تخمین زدیم. برای هر دو سری بازده مدل‌هایی که هر وضعیتشان یک نرمال ترکیبی بود (نه یک نرمال ساده) با اختلاف بهتر بودند. حالت سوم برای شاخص کل بورس تهران و حالت دوم برای داده‌های S&P*500* بهترین برازش را داشته است. بنابراین مدل جامع معرفی شده در موقعیت‌های مکانی و زمانی متفاوت می‌تواند جهت مقایسه و انتخاب مناسب‌ترین حالت مورد استفاده سرمایه‌گذاران قرار گیرد.

۵- نتیجه‌گیری و بحث

در این مقاله یک مدل قیمت‌گذاری بر اساس ترکیب توزیع‌ها تخمین زده شده است. فرض کرده‌ایم قیمت از یک فرایند مارکوف چند وضعیته پیروی می‌کند که هر وضعیت یک نرمال ترکیبی است و واریانس‌های چگالی‌های نرمال در هر نرمال ترکیبی، یک فرایند گارچ (۱،۱) متفاوت دارند. فرض ثابت بودن وزن‌ها در فرایندهای نرمال ترکیبی برطرف شده و مدلی با وزن‌های متغیر با زمان ارائه کردیم. به دلیل اینکه در محاسبات، وابستگی به مسیر وجود دارد تخمین با روش‌هایی مثل ماکزیمم درستنمایی ممکن نیست و علی‌رغم زمان‌بر بودن، راه حل بیزین بیشتر از سایر روش‌ها قابل اتکاست. بنابراین روش نمونه‌گیری گیبس را که راه حلی ساده و شهودی است به کار بردیم و الگوریتمی را ایجاد کردیم که در آن برآورد زنجیر مارکوف مونت‌کارلو به روش چیب و برآورد پارامترها به روش گریدی گیبس صورت می‌گیرد. جهت نشان دادن عملکرد خوب مدل، با به دست آوردن لگاریتم توابع درستنمایی و انتخاب بزرگ‌ترین مقدار، آن را با مدل های مشابه دیگر مقایسه نمودیم. طبق نتایج باونز می‌توان الگوریتم گیبس را بسط داد که محاسبات توزیع‌های پیش‌بینی را هم شامل شود تا ضمن توجه به عدم قطعیت برآورد بتوان بازده یک (یا چند) قدم بعدی را به دست آورد. انجام چنین کاری برای مدل ارائه‌شده و پیش‌بینی نقطه‌ای روزهای آتی توسط شبیه‌سازی، در دستور کار تحقیقات آتی امان قرار دارد.

فهرست منابع

* آل محمد، نفیسه؛ پایان‌نامه با عنوان "مدل‌های آمیخته فرایندهای آرچ با ضریب متغیر نسبت به زمان"، دانشکده آمار دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ۱۳۹۱.
* پارسیان، احمد (۱۳۸۰)؛ آمار ریاضی: انتشارات دانشگاه شیراز.
* پاکیزه، کامران (۱۳۸۹)؛ "تلاطم و بازده (شواهدی از بورس اوراق بهادار تهران و بورس های بین‌الملل)"، فصلنامه تحقیقات مدل‌سازی اقتصادی، زمستان ۸۹، شماره ۲.
* حبیبی فرد، نفیسه؛ پایان‌نامه با عنوان "مقایسه مدل گزینی بیزی بر اساس روش MCMC و کاربرد آن در سری‌های زمانی مالی (مدل گارچ) "، دانشکده اقتصاد دانشگاه علامه طباطبایی، ۱۳۹۰.
* کشاورز حداد، غلامرضا؛ صمدی، باقر (۱۳۸۸)؛ "برآورد و پیش‌بینی تلاطم بازدهی در بازار سهام تهران و مقایسه دقت روش‌ها در تخمین ارزش در معرض خطر: کاربردی از مدل‌های خانواده FI گارچ"، مجله تحقیقات اقتصادی، بهار ۸۸، شماره ۸۶، صفحه ۱۹۳-۲۳۵.
* نیسی، عبدالساده؛ چمنی انباجی، رویا؛ شجاعی منش، لیلی (۱۳۹۱)؛ "سه مدل اساسی در ریاضیات مالی"، مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، دوره ۲، شماره ۱.
* Alexander, C., and E. Lazar (2004b); “The equity index skew, market crashes and asymmetric normal mixture GARCH.” ISMA Centre Discussion Papers in Finance, pp. 2004-14.
* Bauwens, Luc; Rombouts, Jeroen V.K. (200۵); “Bayesian inference for the mixed conditional heteroskedasticity model”, Les Cahiers du CREF, CREF 05-08.
* Bauwens, Luc; Preminger, Arie; Rombouts, Jeroen V.K. (2007); “Theory and Inference for a Markov-Switching GARCH Model”, Cahier de recherche/Working Paper 07-33.
* Brooks, Stephen P.; Roberts, Gareth O. (1998); “Convergence assessment techniques for Markov chain Monte Carlo”, Statistics and Computing, Vol. 8, 319-335.
* Bollerslev, T. (1987); “A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. ” The review of economics and statistics, pp. 542-547.
* Chang, George (2006); “Bayesian Markov mixture of normals approach to modeling financial returns”, Studies in Economics and Finance, Vol. 23, No. 2, pp. 141-158.
* Cont, Ramo (2001); “Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues”, Quantitative Finance, Vol. 1, pp.223–236.
* Geweke, John; Krauseb, Jochen; Amisano, Giovanni (2007); “Hierarchical Markov Normal Mixture Models with Applications to Financial Asset Returns”
* Haas, Markus; Mittnik, Stefan; Paolellab, Marc S. (2002); “Mixed Normal Conditional Heteroskedasticity”, Center for Financial Studies, No. 10.
* Haas, Markus; Krauseb, Jochen; Paolellab, Marc S.; Steude, Sven C. (2013); “Time-varying Mixture GARCH Models and Asymmetric Volatility”, QBER discussion paper, No. 2.
* Tsay, Ruey S. (2010); Analysis of Financial Time Series, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
* Wang, K.L., C. Fawson, C.B. Barrett, and J.B. McDonald. (2001); “A flexible parametric GARCH model with an application to exchange rates.” Journal of Applied Econometrics16:521-536.
* Wang, Jinrui (2014); Modelling Ontario Agricultural Commodity Price Volatility with Mixtures of GARCH Processes, A Thesis presented to The University of Guelph

یادداشت‌ها

[1]. Volatility clustering
[2]. Bollerslev
[3]. Fernandez and Steel
[4]. Schwert
[5]. Markov Switching GARCH
[6]. Ding and Granger
[7]. component GARCH model
[8]. Markov Switching Component GARCH
[9]. Mixture Normal
[10]. Vlaar and Palm
[11]. Markov time-varying Mixed Normal-GARCH model
[12]. Alexander and Lazar
[13]. Bayesian
[14]. Markov chain Monte Carlo
[15]. Ritter
[16]. Tanner