فصلنامه علمی پژوهشی
دانش مالی تحلیل اوراق بهادار
شماره پانزدهم
پاییز ۱۳۹۱

مقایسه مدل‌گزینی بیزی بر اساس روش MCMC و سری‌های زمانی مالی (مدل گارچ)

محمدرضا صالحی راد[۱]
نفیسه حبیبی‌فرد[۲]

تاریخ دریافت: ۹۰/۶/۲۲ تاریخ پذیرش: ۹۱/۱/۲۰

چکیده

یکی از شیوه‌های تجزیه و تحلیل داده‌های مالی و بررسی چگونگی تغییرات آن‌ها در طی زمان معین در گذشته و پیش‌بینی چگونگی رخداد آن‌ها در آینده استفاده از مدل‌های سری‌های زمانی است.

در مباحث مالی به‌دلیل ناهم‌واریانس بودن مشاهدات موجود، نمی‌توان از مدل‌های سری‌های زمانی کلاسیک استفاده کرد. در این حالت، یکی از مدل‌های متداول، مدل‌های نوع گارچ[۱] (GARCH) است که نشان‌دهنده رده وسیعی از مدل‌های اقتصادسنجی ناهم‌واریانس هستند. این مدل‌ها اولین بار توسط بولرسلو[۲] در سال ۱۹۸۶ معرفی شدند. مدل‌های سری‌های زمانی مانند مدل‌های رگرسیونی خطای تصادفی دارند. مدل‌های گارچ نیز از این امر مستثنی نیستند و این خطاهای تصادفی توزیع مشخصی دارند.

به دلیل این‌که در مدل‌های گارچ تغییرپذیری مستقیماً قابل رؤیت نیست، به‌منظور براورد پارامترهای موجود در این مدل‌ها از روش‌های مدل‌گزینی بیزی استفاده می‌کنند. برای این منظور، ابتدا توزیع‌های پیشینی را روی این پارامترها در نظر می‌گیرند که توزیع پسین حاصل از آن انتگرال‌پذیر باشد. سپس توزیع پسین پارامترها را با استفاده از روش‌های محاسباتی زنجیر مارکوفی مونت‌کارلو[۳]، مانند نمونه‌گیری گیبس[۴] و الگوریتم متروپولیس- هستینگ[۵] تقریب می‌زنند. اگر انتگرال موجود در مخرج کسر توزیع پسین قابل محاسبه نباشد، آن‌گاه از روی نمونه‌های حاصل از توزیع پسین، درستنمایی مدل را با به‌کار گرفتن روش‌های مستقیم مدل‌گزینی بیزی شامل: براوردگر میانگین همساز، براوردگر نقاط مهم معکوس[۶] و نمونه‌گیری بریج[۷] براورد می‌کنند. یک روش غیرمستقیم برای براورد درستنمایی مدل، استفاده از خروجی نمونه‌گیری گیبس است که به براوردگر کاندید چیب معروف است. برای بهبود این روش، با استفاده از خروجی الگوریتم MH، برای درستنمایی می‌توان براوردی به‌دست آورد. هم‌چنین روش MCMC پرشی برگشت‌پذیر برای نمونه‌های تولیدشده از توزیع پسین توأم بر اساس روش MH استاندارد استفاده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مدل‌گزینی بیزی- مدل گارچ – درستنمایی مدل- زنجیر مارکوفی مونت‌کارلو.

۱- استادیار گروه اقتصاد دانشگاه علامه طباطبایی (مسئول مکاتبات) salehirad@atu.ac.ir
۲- کارشناس ارشد ریاضیات مالی، دانشکده اقتصاد، گروه آمار، ریاضی و کامپیوتر nhf222@gmail.com

۱- مقدمه

در جامعه‌های امروزی عده کثیری از افراد به سرمایه‌گذاری در بورس و خرید و فروش سهام روی آورده‌اند. از آن‌جایی که انجام این‌گونه معامله‌ها دارای ریسک بالایی است، بهتر است به‌منظور مدیریت ریسک و دستیابی به یک سرمایه‌گذاری موفق، در کنار تجربه، از روش‌های علمی برای تعیین چگونگی تغییرات قیمت سهام نیز استفاده کنیم. بنابراین، در این مقاله به معرفی مدل‌هایی می‌پردازیم که می‌توانند در پیش‌بینی قیمت‌هایی که در آن‌ها ویژگی ناهم‌واریانسی وجود دارد، نقش به‌سزایی را ایفا کنند. هر چند این پیش‌بینی‌ها به دلیل انتشار اخبار گوناگون در زمینه‌های مختلف اقتصادی و تأثیرگذار بودن آن‌ها روی روند تغییرات قیمت‌ها، ۱۰۰ درصد قابل استناد نیستند، اما به دلیل وجود نظریه‌های قوی در این مدل‌ها، استفاده از آن‌ها مناسب است. به دلیل غیر قابل رؤیت بودن مستقیم تغییرپذیری در قیمت سهام و وابستگی آن به زمان از مدل‌های سری‌های زمانی مالی تحت عنوان مدل‌های آرچ و گارچ استفاده می‌شود که در این پژوهش آزمون می‌گردد تا بتوان مدل مناسب را به منظور پیش‌بینی قیمت سهام در آینده به کمک ملاک‌های انتخاب، شناسایی کرد.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

تعمیمی از مدل آرچ (ARCH) مدل گارچ (GARCH) بولرسلو (۱۹۸۶) است. مدل ای-گارچ توسط نلسون (۱۹۹۱) پیشنهاد شده است. مدل نا هم واریانسی شرطی میانگین متحرک اتورگرسیو (CHARMA) توسط تی‌سی (۱۹۸۷) معرفی شده است. مدل اتورگرسیو با ضریب تصادفی (RCA) توسط نیکولز[8] و کوئین[9] (۱۹۸۲) ارایه شده است و مدل‌های تغییرپذیری تصادفی (SV) که توسط ملی‌نو[10] و ترن‌بال[11] (۱۹۹۰)، هاروی[12]، روئیز[13] و شفارد[14] (۱۹۹۴) ارایه و مورد بررسی قرار گرفته‌اند. حبیبی (۱۳۹۰) با بررسی این موضوعات به پیش بینی قیمت سهام پرداخته است.

۳- مدل‌های پژوهش

مدل‌های سری‌های زمانی مالی مورد بررسی

در این مقاله دو نوع مدل گارچ را در نظر می‌گیریم. تفاوت این دو مدل در نوع توزیع شوک‌های تصادفی آن‌ها است. هم‌چنین برای محاسبه خودهمبستگی احتمالی در داده‌های مالی، یک فرایند اتورگرسیو مرتبه‌ی یک را انتخاب می‌کنیم. در این‌جا سری زمانی مورد بررسی را با $\{Y_t\}$ نشان می‌دهیم. مدل اول را تحت عنوان مدل AR(1)-GARCH(1,1) در نظر می‌گیریم و آن را با M_1 نشان می‌دهیم. توزیع خطاها در این مدل نرمال است و آن را به‌صورت زیر توصیف می‌کنیم:

$$M_1:\quad \begin{cases} y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + e_t\,, \qquad t = 1,2,..,T \\ e_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{cases} \qquad (۱)$$

که در آن I_{t-1} نشان‌دهنده‌ی مشاهدات سری زمانی تا زمان t-1 است. این مدل دارای محدودیت‌های $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1 \geq 0$ و $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ است. از این مدل $\sigma_t^2 > 0$ را براورد می‌کنیم.

نکته مهم در مدل‌های گارچ این است که معمولاً خطاها می‌توانند مقادیر بزرگ‌تر (مثبت یا منفی) را اختیار کنند. به همین دلیل توزیع t که

دم‌های چاق‌تری دارد، برای داده‌های مالی مناسب‌تر است.

مدل دوم M_2 را تحت عنوان مدل AR(1)-GARCH(1,1)-t به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$M_2: \begin{cases} y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + e_t\ , \quad t = 1,2,..,T \\ e_t | I_{t-1} \sim T_v(0, \sigma_t^2), \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{cases} \quad (2)$$

که در آن $T_v(0,\sigma_t^2)$ نشان‌دهنده توزیع t غیرمرکزی با میانگین صفر و واریانس σ_t^2 و درجه‌آزادی v است.

در مدل M_1، بردار پارامتر به‌صورت $\theta_1 = (a_0, a_1, \alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$ و تابع درستنمایی برای بردار مشاهده‌ی $Y = (y_1, y_2, \dots, y_T)$ عبارت است از:

$$L_1 = f(Y|\theta_1) = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left\{-\frac{e_t^2}{2\sigma_t^2}\right\}$$

هم‌چنین برای مدل M_2، بردار پارامتر، به صورت $\theta_2 = (a_0, a_1, \alpha_0, \alpha_1, \beta_1, v)$ است و تابع درستنمایی برای بردار نمونه Y به قرار زیر است:

$$L_2 = f(Y|\theta_2) =$$

$$\prod_{t=1}^{T} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{\pi(v-2)\sigma_t^2}} \left(1 + \frac{e_t^2}{(v-2)\sigma_t^2}\right)^{-(v+1)/2}$$

روش‌های براورد پارامترهای این مدل‌ها را در بخش بعد ارایه می‌دهیم.

برآورد پارامترهای مدل‌های M_1 و M_2

در این بخش، برای براورد پارامترهای دو مدل M_1 و M_2، از روش‌های مدل‌گزینی بیزی استفاده می‌کنیم. مهم‌ترین این روش‌ها، روش سنتی، روش‌های مستقیم، براوردگر کاندید چیب و الگوریتم زنجیر مارکوف مونت‌کارلوی پرشی برگشت‌پذیر هستند. این روش‌هارا در ادامه بررسی می‌کنیم.

روش سنتی

پایه و اساس روش براورد پارامترهای یک مدل به کمک روش بیزی، قضیه بیز است. مدل‌های ترکیبی، مشخصه‌ای از توزیع توام داده‌ها و پارامترهای غیرقابل مشاهده مدل هستند. در روش سنتی مدل‌گزینی بیزی، فرض می‌کنیم مشاهدات Y توسط مدل M_i، که مدلی از مجموعه مدل‌های رقیب M می‌باشد، تولید شده‌است. هر مدل، توزیع Y را صرف‌نظر از بردار پارامتر نامعلوم θ_i که n_i بعدی است، مشخص می‌کند. تابع چگالی آن را با $f(Y|\theta_i, M_i)$ نشان می‌دهیم. تحت چگالی‌های پیشین $\pi(\theta_i|M_i)$، توزیع حاشیه‌ای Y با انتگرال‌گیری روی پارامترها، به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$p(Y|M_i) = \int f(Y|\theta_i, M_i)\ \pi(\theta_i|M_i)\ d\theta_i \qquad (5)$$

$p(Y|M_i)$ را درستنمایی مدل M_i می‌نامند. بنابراین توزیع پسین برای مدل M_i عبارت است از:

$$p(M_i|Y) = \frac{p(Y|M_i)\,.\,\pi(M_i)}{\sum_{k=1}^{n} p(Y|M_k)\pi(M_k)}$$

با توجه به اینکه توزیع‌های پیشین، $\pi(M_i)$، متفاوتی را می‌توان در نظر گرفت، انتخاب بین دو مدل M_2 و M_1 اغلب بر اساس عامل بیز B_{12}

$$B_{12} = \frac{p(M_1|Y)/p(M_2|Y)}{\pi(M_1)/\pi(M_2)}$$

یعنی نسبت بخت‌های پسین به نسبت بخت‌های پیشین دو مدل M_1 و M_2، صورت می‌گیرد. و با استفاده از توزیع پسین داریم:

$$B_{12} = \frac{\left[\frac{p(Y|M_1)\,.\,\pi(M_1)}{p(Y)}\right] \Big/ \left[\frac{p(Y|M_2)\,.\,\pi(M_2)}{p(Y)}\right]}{\pi(M_1)/\pi(M_2)} = \frac{p(Y|M_1)}{p(Y|M_2)}$$

یعنی، عامل بیز برابر است با نسبت درست نمایی‌های مدل‌های M_1 و M_2.

روش‌های مستقیم

در انجام محاسبات، برای راحتی کار از تمام توزیع‌های شرطی ، شرط M_i را حذف می‌کنیم. هم‌چنین، براورد درستنمایی مدل $p(Y)$، را با $\hat{p}(Y)$ نشان می‌دهیم. از رابطه (5)، با استفاده از روش مونت‌کارلوی ساده داریم:

$$\hat{p}(Y) = \frac{1}{G}\sum_{g=1}^{G} f\left(Y|\theta^{(g)}\right) \qquad (6)$$

که در آن $\{\theta^{(g)}, g = 1, \dots, G\}$ نمونه‌ای از توزیع پیشین $\pi(\theta)$ است. ایراد این روش این است که براوردگر $\hat{p}(Y)$ کارا نیست. زیرا در این‌جا برای نمونه‌گیری تنها از توزیع پیشین انتخاب شده استفاده کرده‌ایم و دلیل موجهی برای این‌که این توزیع پیشین مناسب باشد، در دست نیست. برای بهبود کارایی این براوردگر، در ادامه سه براورد درستنمایی را می‌آوریم.

برآوردگر میانگین همساز

برای افزایش کارایی براوردگر درستنمایی مدل، بهتر است از نمونه‌هایی از توزیع پسین را استفاده کنیم. نیوتن و رفتری[۱۵] (۱۹۹۴) میانگین همساز درستنمایی نمونه پسین را به عنوان براوردگر درستنمایی مدل پیشنهاد کردند، که به صورت زیر است:

$$\hat{p}_{HM}(Y) = \left[\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{f(Y|\theta^{(m)})}\right]^{-1} \qquad (7)$$

که در آن $\{\theta^{(m)}, m = 1, \dots, M\}$ نمونه‌ای از توزیع پسین $p(\theta|Y)$ است. این روش ممکن است ناپایدار باشد. زیرا وجود برخی از مقادیر درستنمایی نزدیک صفر در عبارت فوق، باعث می-شود که واریانس $\frac{1}{f(Y|\theta^{(m)})}$ بیش از حد بزرگ شود (نامتناهی شود). در نتیجه از این معکوس درستنمایی برای براورد $p(Y)$ ، نمی‌توان استفاده کرد.

برآوردگر نقاط مهم معکوس

با در نظر گرفتن نمونه‌های $\{\theta^{(m)}, m = 1, \dots, M\}$ از توزیع پسین، گلفاند و دی[۱۶] (۱۹۹۴) برای بهبود براوردگر میانگین همساز، براوردگر نمونه‌گیری نقاط مهم معکوس را به‌صورت زیر پیشنهاد کردند:

$$\hat{p}_{RI}(Y) = \left[\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{h(\theta^{(m)})}{f(Y|\theta^{(m)})\,\pi(\theta^{(m)})}\right]^{-1} \qquad (8)$$

این براوردگر نسبت به انتخاب تابع h حساس است. گلفاند و دی یک توزیع نرمال چند متغیری و تابع چگالی t را با میانگین و کواریانس براورد شده از نمونه توزیع پسین، پیشنهاد دادند.

نمونه‌گیری بریج

روش نمونه‌گیری بریج اولین بار توسط منگ و وانگ[17] (۱۹۹۶) بررسی شده‌است. فرض کنید $h(\theta)$ در رابطه (۸) یک چگالی با ثابت نرمال‌ساز معلوم باشد که تقریبی ساده برای چگالی پسین است. هم‌چنین فرض کنید $\alpha(\theta)$ تابع دلخواهی باشد. روش نمونه‌گیری بریج بر اساس رابطه‌ی کلیدی زیر پایه‌ریزی شده است:

$$p(Y)=\frac{\int \alpha(\theta)f(Y|\theta)\pi(\theta)h(\theta)d\theta}{\int \alpha(\theta)h(\theta)\ p(\theta|Y)d\theta}=\frac{E_h\left(\alpha(\theta)f(Y|\theta)\pi(\theta)\right)}{E_p\left(\alpha(\theta)h(\theta)\right)}$$

که در آن E_λ، یعنی امید ریاضی نسبت به چگالی $\lambda(.)$ محاسبه می‌شود.

اگر نمونه‌های $\{\theta^{(m)}, m=1,\dots,M\}$ و $\{\tilde{\theta}^{(l)}, l=1,\dots,L\}$ به‌ترتیب از توزیع پسین $p(\theta|Y)$ و چگالی تقریبی $h(\theta)$ در دست باشند، در این صورت براوردگر نمونه‌گیری بریج به‌صورت زیر است:

$$\hat{p}_{BS}(Y)=\frac{\sum_{l=1}^{L}\alpha(\tilde{\theta}^{(l)})f(Y|\tilde{\theta}^{(l)})\pi(\tilde{\theta}^{(l)})/L}{\sum_{m=1}^{M}\alpha(\theta^{(m)})h(\theta^{(m)})/M} \qquad (9)$$

براوردگر کاندید چیب

برای راحتی کار و اجتناب از تعیین تقریب تابع h، چیب[18] (۱۹۹۵) یک روش غیرمستقیم را برای براورد درستنمایی‌های مدل از خروجی نمونه‌گیری گیبس پیشنهاد داده است. برای بهبود این روش، چیب و الیازکوف[19] (۲۰۰۱) با استفاده از خروجی الگوریتم MH، براوردی برای درستنمایی مدل ارایه دادند. این روش بر اساس درستنمایی حاشیه‌ای $p(Y)$ به صورت زیر است:

$$p(Y)=\frac{f(Y|\theta)\pi(\theta)}{p(\theta|Y)}$$

که در آن $p(\theta|Y)$ نامعلوم است. از آن‌جایی که این رابطه برای هر مقدار θ برقرار است، فقط یک براورد از چگالی پسین به صورت $\hat{p}(\theta^*|Y)$ را در یک نقطه خاص مانند θ^* نیاز داریم. در این صورت براورد درستنمایی مدل، با انتخاب θ^*، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\log[\hat{p}_{CE}(Y)] = \log f(Y|\theta^*)+\log\pi(\theta^*)-\log\hat{p}(\theta^*|Y) \qquad (10)$$

که در آن $\hat{p}_{CE}(Y)$ براوردگر کاندید چیب است.

می‌دانیم که، دقیق‌ترین براورد برای $p(\theta|Y)$ معمولاً با استفاده از مد پسین یا یک مقدار نزدیک به آن به‌دست می‌آید. با توجه به توضیح‌های بالا می‌خواهیم $\hat{p}(\theta^*|Y)$ را با فرض معلوم بودن نمونه به‌دست آمده از چگالی پسین $p(\theta|Y)$، یعنی $\{\theta^{(g)}, g=1,\dots,G\}$، براورد کنیم.

زنجیر مارکوف مونت‌کارلوی پرشی برگشت پذیر

روش‌های براورد درستنمایی مدل، $p(Y)$، براساس نمونه‌گیری از توزیع پسین که با استفاده از روش‌های MCMC تولید شده‌اند، عمل می‌کنند. رهیافت دیگری که مورد توجه بسیاری از محققین است، به این صورت عمل می‌کند که مدل نشانگر M_i، به عنوان یک پارامتر در الگوریتم نمونه‌گیری وارد می‌شود.

ابزار اصلی برای همه روش‌های ارایه شده در بالا، جهت استنباط بیزی برای بردار پارامتر θ به شرط داده‌های Y، استفاده از چگالی پسین $p(\theta|Y)$

است. چگالی پسین مورد استفاده را به صورت $p(\theta|Y) = cf(Y|\theta)\pi(\theta)$ نشان می‌دهیم.

برای برخی از مسایل واقعی، به‌دست آوردن $p(\theta|Y)$ دشوار است. بنابراین جهت تقریب این چگالی از روش‌های MCMC استفاده می‌کنیم. برای به‌دست آوردن تقریب اولیه‌ای برای توزیع پسین در ابتدا لازم است که یک توزیع پیشین را به عنوان کاندید معرفی کنیم. این تقریب اولیه را در مرحله بعدی به عنوان توزیع پیشین در نظر می‌گیریم و توزیع پسین جدیدی را تولید می‌کنیم. با تکرار مجدد این روش، در هر مرحله پسین جدیدی از روی پسین قبلی که به عنوان پیشین در نظر گرفته شده است حاصل می‌شود(11). چون نتایج حاصل از هر مرحله به مرحله قبلی وابسته است، پس یک زنجیر مارکوف ایجاد می‌شود. اگر تقریب‌های به‌دست آمده، یک زنجیر مارکوف نادوره‌ای، تحویل ناپذیر و بازگشتی مثبت را ایجاد کند در این صورت توزیع پسین همگرا خواهد شد و در مراحل انتهایی زنجیر، به یک توزیع حالت پایای پسین $p(\theta|Y)$ می‌رسیم. توزیع شرطی به‌دست آمده همان احتمال انتقال زنجیر مارکوف از مرحله t به t+1 است که به صورت $K(\theta',\theta'') = \pi\left(\theta^{(t+1)} = \theta''|\theta^{(t)} = \theta'\right)$ نشان داده می‌شود. بنابراین $K(\theta',\theta'')$ *تقریبی برای* $p(\theta|Y)$ *است*. در این صورت، با توجه به شرایط ارگودیک بودن زنجیر مارکوف حاصل، اگر $t \to \infty$، آنگاه توزیع $\theta^{(t)}$ به $p(\theta|Y)$ میل می‌کند.

از الگوریتم MH نیز می‌توان برای به‌دست آوردن $p(\theta|Y)$ استفاده کرد، زیرا این الگوریتم ساده‌ترین روش نمونه‌گیری را ارایه می‌دهد.

گرین[20] (۱۹۹۵) بر اساس روش MH استاندارد، روش MCMC پرشی برگشت‌پذیر را برای نمونه‌های تولید شده از توزیع پسین توأم $p(M_i,\theta_i|Y)$ ارایه کرده‌است. این روش یک زنجیر مارکوف روی فضای $M \times U_{j\in M}\,\Theta_j$ تولید می کند که در آن M– مجموعه متناهی مدل‌ها است و $\theta_j \in \Theta_j \subset R^{n_j}$.

شوارز[21] (۱۹۷۸)، ملاک اطلاع بیزی[22] BIC را برای نمونه‌گیری فوق به‌کاربرده است. این روش یکی از روش‌های عمومی کلاسیک در مدل‌گزینی بیزی است. برای یک نمونه بزرگ با اندازه T، تقریب عامل بیزی مدل یک به مدل دو، B_{12}، از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\log B_{12} \approx \Delta BIC = \log\frac{f(Y|\hat{\theta}_1,M_1)}{f(Y|\hat{\theta}_2,M_2)} + \frac{n_1-n_2}{2}\log T$$

جمله دوم در عبارت فوق جبران کننده مقدار خطایی است که از لگاریتم نسبت تابع درستنمایی دو مدل حاصل می‌شود.

در بخش بعد با یک مثال کاربردی، روش‌هایی را که در بخش‌های قبل ارایه کردیم، بررسی و توصیف می‌کنیم.

۴- نتایج پژوهش

در این بخش، مدل‌های اتورگرسیو-گارچ با توزیع‌های نرمال و تی-استیودنت را در یک مثال کاربردی توصیف می‌کنیم و به کمک ملاک‌های انتخاب مدل معرفی شده، مدل مناسب را جهت پیش‌بینی قیمت سهام تعیین می‌کنیم. داده‌های مورد بررسی مربوط به شاخص سهام (DJIA) بازار مالی آمریکا است که به صورت مقادیر پایانی روزانه در اختیار می‌باشند. این داده‌ها، مربوط به سال‌های

۲۰۰۶ تا ۲۰۱۰ هستند که در مجموع ۱۲۵۳ مشاهده را شامل می‌شوند، که از شرکت مطالعات اقتصادی آریا سهم خریداری شده است. مقادیر بازده مرکب پیوسته را به کمک تبدیل $G_t = \log\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right)$ از داده‌های خام p_t به‌دست می‌آوریم. شکل (۱) نمودارهای ترتیبی p_t و هم‌چنین بافت‌نگار سری زمانی G_t، شاخص سهام را نشان می‌دهد. بافت‌نگار داده‌ها در این نمودار نمایان‌گر یک توزیع تقریباً متقارن و دم‌کلفت می‌باشد.

برای انجام استنباط بیزی ابتدا توزیع پیشین برای پارامترهای مدل اتورگرسیو-گارچ را تعیین می‌کنیم.

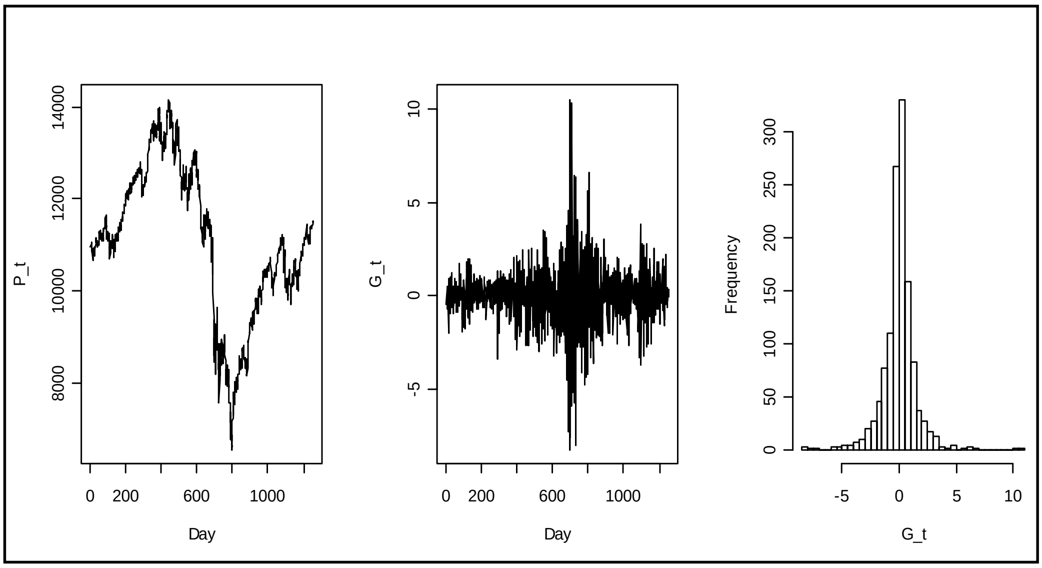
برای مدل اتورگرسیو-گارچ با توزیع‌های نرمال و تی-استیودنت توزیع‌های پیشین سره:

$$a_0, a_1 \sim N(0,5),\ \alpha_0 \sim LN(-3 / 7,5),\ \alpha_1 \sim LN(-2 / 3,5),\ \beta_1 \sim LN(-0 / 12,5)$$

را انتخاب کرده‌ایم. هم‌چنین در مدل اتورگرسیو-گارچ با توزیع تی-استیودنت برای پارامتر درجهٔ آزادی، یک توزیع نمایی با میانگین ۰/۱ به عنوان توزیع پیشین در نظر گرفته شده است. برای انتخاب این توزیع‌های پیشین، اطلاعات حاصل از براوردگرهای ماکسیمم درستنمایی و انحراف استاندارد آن‌ها در نظر گرفته شده است. استنباط بیزی براساس حجم نمونهٔ ۳۰۰۰ از زنجیر شبیه‌سازی شده با ۲۰۰۰۰ تکرار، مرحلهٔ سوخت ۵۰۰۰ و تاخیر پنجم می‌باشد.

جدول (۱)، لگاریتم برآورد تابع درستنمایی مدل و عامل بیزی را به روش‌های میانگین همساز (HM)، نقاط مهم معکوس(RI)، نمونه‌گیری بریج (BS)، کاندید چیب (CCE) و ملاک اطلاع بیزی (BIC) نشان می‌دهد.

با توجه به این‌که عامل بیزی نزدیک به صفر است، به‌طور قوی می‌توان نتیجه گرفت که مدل اتورگرسیو-گارچ با توزیع t مدلی مناسب برای داده‌های فوق می‌باشد.



شکل (۱): نمودارهای ترتیبی و بافت‌نگار سری زمانی شاخص سهام

پیش‌بینی

پیش‌بینی مقدار جدید قیمت سهام از طریق توزیع پیشگوی بیزی و به‌کمک برابری

$$p\left(y_{new}|\underline{y}\right) = \int_{\Theta} f(y_{new}|\underline{\theta})\pi\left(\underline{\theta}|\underline{y}\right) d\underline{\theta}$$

به‌دست می‌آید.

جدول (۲)، پیش‌بینی مقدار جدید و انحراف استانداردها را برای L=10,50,100 روز آینده شاخص سهام نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود انحراف استاندارد پیش‌بینی‌ها برای زمان‌های جلوتر افزایش می‌یابد. اما در کل مقدار کوچکی دارند که بیانگر دقت رهیافت بیزی است و در مقایسه پیش‌بینی صورت گرفته با داده‌های واقعی روش مورد بررسی دارای مطلوبیت کافی است و می‌توان برای پیش‌بینی به آن استناد کرد.

۵- نتیجه‌گیری و بحث

در این مقاله، به‌منظور مطالعه و بررسی داده‌های سری‌های زمانی بازده شاخص سهام در بازارهای مالی، مدل‌های گارچ را به‌کار بردیم. برای براورد پارامترهای این مدل از روش‌های MCMC استفاده و مدل گارچ را با دو توزیع نرمال و t روی خطاهای تصادفی مدل، بررسی کردیم. سپس MSE پارامترهای این مدل‌ها حاصل از کاربرد را از روش حداکثر درستنمایی و بیز با یکدیگر مقایسه نمودیم و در نهایت با انتخاب مناسب‌ترین مدل، پیش‌بینی‌های حاصل از این مدل را برای قیمت سهام در آینده به‌دست آوردیم که در حقیقت مدل بیزی است.

جدول (۱): لگاریتم براورد درستنمایی مدل و عامل بیزی برای داده‌های بازار مالی.

مدل	HM	RI	BS	CC	BIC
توزیع نرمال	−۱۸۵۸/۷۷	−۱۸۷۴/۵۴	−۱۸۷۵/۰۲	−۱۹۵۵/۰۳	−۱۸۷۰/۰۱
توزیع t	−۱۸۲۴/۰۱	−۱۸۵۷/۵۴	−۱۸۴۴/۰۶	−۱۹۲۸/۱۵	−۱۸۴۱/۱۸
عامل بیزی	۱۶e-۸/۰۱	۸e-۴/۱۳	۱۴e-۳/۵۸	۱۲e-۲/۱۲	۱۳e-۳/۰۱

جدول (۲): پیش‌بینی و انحراف استاندارد شاخص سهام برای مدل اتورگرسیو با توزیع t

روز	مقدار پیش‌بینی	انحراف استاندارد
L=10	0.0878	0.695
L=50	0.0798	1.165
L=100	0.072	1.422

فهرست منابع

۱) حبیبی (۱۳۹۰)، مقایسه مدل‌گزینی بیزی بر اساس روش MCMC و کاربرد آن در سری‌های زمانی مالی (مدل گارچ)، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه علامه طباطبایی.

2) Bollerslev, T. (1986). A generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, Journal of Econometrics 31:307-327۳۱

3) Chib, S. (1995). Marginal likelihood from the Gibbs output, Journal of the American Statistical Association 90(432): 1313-1321.

4) Chib, S. and Jeliazkov, I. (2001). Marginal likelihood from the Metropolis-Hastings output, Journal of the American Statistical Association 96(453): 270-281.
5) Gelfand, A. and Dey, D. (1994). Bayesian model choice: Asymptotic and exactcalculations, Journal of the Royal Statistical Society,Set.B 56,501-514.
6) Green, P. (1995). Reversible jump MCMC computation and Bayesian model determination, Biometvika 82: 711-732.
7) Melino, A. and S. Turnbull (1990) “Pricing Foreign Currency Options with Stochastic Volatility,“ Journal of Econometrics, 45, 2399266.
8) Meng, X. and Wong, W. (1996). Simulating ratios of normalizing constants via a simple identity, Statistical Sinica 6: 831-860.
9) Nelso,, D.B. (1991) “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach”, Econometrica, 59, 347-370.
10) Newton, M. and Raftery, A. (1994). Approximate Bayesian inference by the
11) weighted likelihood bootstrap, Journal of Royal Statistical Society, Set. B 56: 1-48.
12) Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model, The Annals of Statistics. 6, 461-464.
13) Tsay, Ruey S. (1987), Analysis of Financial Time Series, Financial Econometrics.

یادداشت‌ها

1. Generalized Autoregressive Conditionally Heteroscedastic (GARCH)
2. Bollerslev
3. Markov Chain Monte Carlo (MCMC)
4. Gibbs
5. Metropolis Hasting (MH)
6. Reciprocal Importance Estimator
7. Bridge Sampling
8. Nicholls
9. Quinn
10. Melino
11. Turnbull
12. Harvey
13. Ruiz
14. Shephard
15. Newton and Raftery
16. Gelfand and Day
17. Meng and Wong
18. Chib
19. Jeliazkov
20. Green
21. Schwarz
22. Bayesian Information Creterion