دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره پانزدهم، پاییز ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۵۸۸X–۲۵۸۸

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

مدلی برای انتخاب پروژه با منابع محدود به کمک تحلیل پوششی داده‌ها

محمد علی جهان تیغی*

گروه ریاضی، واحد زاهدان، دانشگاه آزاد اسلامی، زاهدان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۵/۱۲/۱۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۶/۰۳/۱۹

چکیده

در ارزیابی عملکرد، انتخاب یک زیر مجموعه از بین مجموعه راه حل‌هایی که دارای منابع محدود هستند، امری ضروری می‌باشد. توجه نمایید که اگر بیش از یک ورودی و یک خروجی وجود داشته باشد، مدل‌های بهینه سازی تحلیل پوششی داده‌ها ارزیابی و اندازه‌گیری عملکرد بر اساس خروجی وزن دار شده نسبت به ورودی وزن‌دار شده انجام می‌شود. در این تحقیق، دو مدل بهینه سازی با منابع محدود که برگرفته از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها است ارائه می‌شود. هر پروژه با استفاده از منابع ورودی مختلف مجموعه‌ای از خروجی‌ها را تولید می‌کند. در این روش زیرمجموعه از پروژه‌های طوری انتخاب می‌شود که می‌تواند در محدودیت‌های منابع به عنوان یک پروژه مرکب (ترکیبی) صدق کند. این پروژه‌های مرکب به وسیله پروژه‌های در دسترس و با تکنولوژی تولید در تحلیل پوششی داده‌ها تعریف شده و سپس ارزیابی می‌شوند. در واقع، ارزیابی و انتخاب، در مدل جدید ترکیب می‌شوند که این کار را به وسیله قرار دادن یک مدل تحلیل پوششی داده‌ها در یک چارچوب برنامه ریزی خطی دودویی–ترکیبی انجام می‌شود. مدل دوم شامل انتخاب یک مجموعه از بهترین یا ارجح‌ترین مکان‌هایی برای تسهیلات جدید است. مجدداً مدل ارائه شده دوم نیز مربوط به انتخاب‌ها با یک منابع محدود است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، انتخاب پروژه، کارایی، برنامه‌ریزی دودویی.

*.عهده‌دار مکاتبات: Email: mohamadjahantig@yahoo.com

۱- مقدمه

مساله شامل انتخاب مربوط به زیر مجموعه‌ای از پروژه‌ها (DMUs) از یک مجموعه بزرگ از پیشنهادها، است. پروژه‌ها باید منافعی (خروجی) را با مصرف منابع اولیه (ورودی) تحت زمان خاص به دست آورند. این امر برای تعیین یک زیر مجموعه از پروژه ها که بهترین استفاده از منابع در دسترس را توجیه می‌کند، مناسب می‌باشد. مسئله اولویت دهی در چند دهه اخیر مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. روش انتخاب شده در این تحقیق بر اساس مدل DEA-CCR است. این یک مدل نسبتا پیچیده چند مرحله‌ای برای ارزیابی و انتخاب پروژه‌ها معرفی کرد. اما روش انتخاب شده در این تحقیقات، ارزیابی و انتخاب را در یک مدل تک مرحله‌ای انجام می‌دهد و همچنان به مدل DEA-CCR پایبند است و از پیچیدگی کمتری برخوردار است. در راستای این تحقیق می‌توان به کارهای باکر و فریلند (۱۹۷۵)، مهرز و سینونی (۱۹۸۳)، امیری (۲۰۱۰)، وانگ و همکاران (۲۰۱۴)، صالحی (۲۰۱۵)، جعفر زاده و همکاران (۲۰۱۸)، یمامی و همکاران (۲۰۱۸) و لیو و همکاران (۲۰۱۹) اشاره نمود.

سه عامل تخصیص بهینه منابع محدود، انتخاب تیم مناسب و مدیریت مطلوب به یک کسب و کار کمک می‌کنند تا در موعد مقرر بتواند به تعهدات خود عمل کند. اکوسیستم- یکی از دشوارترین وظایف رهبران کسب و کار، تصمیم‌گیری‌های سرنوشت ساز راجع به پروژه‌ها و وظایف مهم است. به عنوان مدیر یک کسب و کار هر روز با وظایفی از قبیل مدیریت یک بحران یا موقعیت اورژانسی، اولویت بندی پروژه‌ها و تصمیم‌گیری در مورد مسائل تاثیر گذار بر بقای کسب و کار روبرو هستید؛ قطعا نمی‌توانید به تنهایی تمام این وظایف را انجام دهید؛ از اینرو به عنوان رهبری باهوش، به یک تیم کاری عالی و همچنین شبکه‌ای از ارتباطات مؤثر احتیاج دارید. اما سوالی که مطرح می‌شود این است که چگونه می‌خواهید منابع محدود را تقسیم‌بندی کنید، به ویژه زمانی که هر یک از پروژه‌ها را به عنوان یک اولویت برتر می‌بینید؟

اکثر مردم به منظور سامان دهی وظایف خود، کارها را بر اساس اهمیت و ضرورت‌شان اولویت‌بندی می‌کنند. بر همین اساس، موارد فوری و ضروری اولویت اول محسوب می‌شوند و سایر موارد نیز اولویت پایین‌تری دارند. جیک گیبسون (مؤسس شرکت نردوالت) معتقد است، این روش برای مدیران متوسط در شرکت‌های بالغ کارآمد است؛ اما برای کارآفرینانی که تازه کسب و کار خود را تاسیس کرده‌اند، کارها به این سادگی انجام نمی‌شود؛ زیرا اولویت‌های زیادی با دامنه نامشخص وجود دارد و خطوط واضح و روشنی به منظور اولویت بندی بر مبنای اهمیت موجود نیست.

بنابراین رهبران استارتاپ‌های تازه تاسیس، باید اولویت‌های قبلی خود را مجددا بازبینی کنند. سودآوری هر فرآیند، منابعی که به آن‌ها تخصیص می‌دهند، سرعت انجام هر پروژه و ارزشی که برای مشتریان و سرمایه‌گذاران به وجود می‌آورد را دوباره بررسی کنند تا بتوانید بهترین تصمیم‌گیری را انجام دهند.

در گام بعدی باید اطمینان حاصل کنید که ابزار مناسب جهت بررسی پروژه‌ها و اختصاص منابع به آنها در اختیار دارید. بعضی از نرم‌افزارهای مدیریت پروژه و مدیریت منابع به گونه‌ای طراحی شده است که به شما اجازه می‌دهند مهارت‌ها، ظرفیت‌ها و قابلیت‌های کارمندان‌تان را با دستورالعمل‌ها و اولویت‌های هر پروژه تطبیق دهید.

این راهکار عینی تخصیص منابع باعث می‌شود که بتوانید درک صحیحی از ملزومات هر پروژه داشته باشید و از اطلاعات به منظور توزیع منابع در پروژه‌های مختلف بهره ببرید.

بالغ بر ۴۰ درصد کارآفرینان برتر، توانایی در برقراری ارتباطات، توصیف اهداف و به وجود آوردن انگیز در تیم کاری را بزرگ‌ترین دستاوردهای خود می‌دانند. تیم کاری شما در واقع نیروهایی هستند که مسئولیت موفقیت پروژه‌ها را دارند، به همین دلیل حائز اهمیت است که افراد مناسبی را برای همکاری انتخاب کنید. با این وجود چنانچه قصد دارید تمام پروژه‌ها با موفقیت به اتمام برسند باید دقیقا نقاط ضعف و قوت تیم خود را شناسایی کنید و بدانید چگونه این فراز و فرودها را به توازن برسانید. البته این کار برای کارآفرینان تازه کار و سازمان‌هایی که در آنها یک هیئت مدیره حاکم است، دشوارتر خواهد بود.

سپردن مسئولیت پروژه‌های مختلف به رهبران و مدیرانی که بتوانند منابع مورد نیاز برای هر پروژه را از شما تحویل بگیرند و به شما اطمینان بدهند که در موعد مقرر پروژه‌ها را تکمیل می‌کنند، یکی از کلیدهای موفقیت است.

اگر سعی کنید تمام کارها را به تنهایی مدیریت کنید، فقط بدون اینکه پروژه‌ها را بهینه و مؤثر پیش ببرید زمان زیادی را هدر خواهید داد. بهتر است افراد قابل اعتمادی را برای مدیریت پروژه‌ها انتخاب کنید و به یاد داشته باشید که روی اولویت‌های مهم‌تر تمرکز کنید.

۲- مفاهیم پایه

فرض کنید n واحد تصمیم گیرنده متجانس به صورت

$$\left\{ DMU_j = \begin{pmatrix} X_j \\ Y_j \end{pmatrix} : j = 1,\ldots,n \right\}$$

موجود است. که هر یک از واحدهای تصمیم گیرنده از بردار ورودی نامنفی و غیر صفر $X_j = (x_{1j},\ldots,x_{mj})$ جهت تولید بردار خروجی نامنفی و غیر صفر $Y_j = (y_{1j},\ldots,y_{sj})$ استفاده می‌کند.

مجموعه امکان تولید با لحاظ نمودن اصول شمول مشاهدات، بازده به مقیاس ثابت، تحدب، امکان پذیری و کمینه برونیابی به صورت زیر می‌باشد:

$$T_C = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} : X \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \;\; \& Y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \;\; \& \; \lambda \geq 0 \right\}$$

مدل CCR به فرم پوششی در ماهیت ورودی برای ارزیابی کارایی نسبی DMU_p به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} Min \quad & \theta \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \leq \theta X_p \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \leq Y_p \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \qquad (۱)$$

دوآل مدل (۱) به صورت (۲) می‌باشد که آن را مدل CCR به فرم مضربی در ماهیت ورودی می‌نامنند.

$$\begin{aligned} Max \quad & UY_p \\ s.t. \quad & UY_j - VX_j \leq 0, \quad j = 1,\ldots,n \\ & VX_p = 1 \\ & U \geq 0, V \geq 0 \end{aligned} \qquad (۲)$$

که در آن U و V به ترتیب بردارهای وزن متناظر خروجی و ورودی می‌باشد.

تحلیل حساسیت در یک مساله برنامه‌ریزی خطی می‌تواند در یکی از حوزه‌های تغییر در بردار هزینه، تغییر در بردار منابع، تغییر در ماتریس تکنولوژی، افزودن یک فعالیت جدید و افزودن یک محدودیت جدید انجام پذیرد.

۳- مدلسازی

یک مجموعه $P = \{1,\ldots.,k,\ldots,|P|\}$ از پروژه‌های پیشنهادی وجود دارند، که هر یکی از آنها خروجی‌های $O = \{1,\ldots.,j,\ldots,|O|\}$ را با مصرف ورودی‌های $I = \{1,\ldots.,i,\ldots,|I|\}$ می‌توانند تولید کنند. پروژه k به وسیله مقدار ورودی‌های مصرفی و همچنین خروجی‌هایی که تولید می‌کند، مشخص می‌شود. محدودیت L_i در ورودی iام در تمامی پروژه‌های مجموعه وجود دارد، و ما فرض می‌گیریم که در حداقل یک پروژه در این محدودیت‌ها صدق می‌کند. مطلوب است انتخاب یک زیر مجموعه از پروژه‌ها به صورت $s^* \subset P$، که می‌تواند بهترین استفاده از منابع در دسترس را داشته باشد.

فرض کنید تمامی پروژه‌ها قابل استفاده و همگی آنها دارای منابع محدود هستند. همچنین فرض کنید که پروژه‌ها با یکدیگر همکاری و تداخل ندارند؛ در این حالت اگر هر دو پروژه α و β انتخاب شوند، خروجی برابر مجموعه خروجی آنها و ورودی نیز برابر مجموع ورودی هر دو آنها است. اگر تابع کارایی

$$\theta_k = \theta\left(x_{k1},\ldots,x_{ki},\ldots,y_{k1},\ldots,y_{ki},\ldots\right)$$

در دسترس بود در این صورت برای رتبه‌بندی پروژه‌ها می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. بعلاوه، s^* می‌تواند در یک روش مستقیم و ساده به دست آید. یک نمایش برای این شرایط را می‌توان در یک مسئله کوله پشتی صفر و یک به صورت زیر نشان داد:

$$\begin{aligned} & Max \sum_{k\in P} c_k\theta_k \\ & \sum_{k\in P} c_k x_{ki} \le L_i, \quad i\in \mathrm{I}, \\ & c_k \in \{0,1\}, \qquad k\in P \end{aligned} \tag{۳}$$

عدم دسترسی به تابع θ بزرگترین مشکل است.
یک مدل پایه‌ای DEA می‌تواند مشکل مدل (۳) را رفع نماید و لذا هر پروژه تحت بررسی خودش را در مقایسه با دیگر پروژه‌ها ارزیابی می‌کند. در واقع هر پروژه اجازه دارد خودش را از طریق پیشینه کردن نسبت هزینه/ سود (ورودی/ خروجی) ارزیابی کند:

$$h_k = \frac{\sum_{j\in O} u_{kj} y_{kj}}{\sum_{i\in I} v_{kj} x_{kj}} \tag{۴}$$

توجه نمایید که اوزان u_{kj} و v_{ki} در خروجی‌ها و ورودی‌های پروژه k به کار می‌رود و تنها محدودیت تحمیلی این است که هیچ پروژه p اجازه دریافت یک نسب بالاتر از ۱ با وزن‌های فوق را نخواهد داشت. در DEA خود ارزیابی به وسیله حل مسئله برنامه‌ریزی خطی روی پروژه تحت بررسی به دست می‌آید.
در حالی که خود ارزیابی در این روش کاملاً قابل توجه است اما یک تناسب ضمنی در پروسه کار دیده می‌شود و مقادیر بدست آمده تنها به نسبت داده‌های هر پروژه تحت بررسی به داده‌های دیگر پروژه‌ها بستگی دارد.
مقادیر h_k می‌تواند برای رتبه‌بندی پروژه‌ها به کار گرفته شود. اما مشکل مربوط به چگونگی انتخاب یک زیرمجموعه است که در محدودیت‌های منابع صدق نماید.
با توجه به اینکه هر یک از پروژه‌های مستقل هستند و هیچ گونه تداخل و همکاری بین آنها وجود ندارد، هر زیر مجموعه s از مجموعه پروژه‌های P می‌توانند به عنوان پروژه مرکب در نظر گرفته شود. خروجی‌های این پروژه مرکب Y_{sj} است که از مجموع خروجی‌های پروژه‌های تشکیل دهنده پروژه های s ساخته شده است و به طور مشابه X_{sj} ورودی‌های این پروژه مرکب است که به طریق مشابه خروجی‌ها ساخته می‌شود. پس در اینجا تمرکز اصلی بر ارزیابی نسبی هر پروژه مرکب در مجموعه تمامی پروژه‌های مرکب است. مجموعه تمامی پروژه‌های مرکب را $\omega(P)$ می‌نامند $(\omega(P)\neq 0)$.
بنابراین با توجه به نماد گذاری‌های $X_{si}=\sum_{k\in s} x_{ki}$, $Y_{sj}=\sum_{k\in s} y_{ki}$ مدل (۲) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} Max \quad & h_s = \sum_{j\in O} u_{sj} y_{sj}, & & s\in\omega(P), \\ s.t. \quad & \sum_{i\in I} v_{si} x_{si} = 1, & & \\ & \sum_{j\in O} u_{sj} y_{pj} - \sum_{i\in I} v_{si} x_{pi} \le 0, & & s\in\omega(P), \\ & u_{sj}, v_{si} \ge \varepsilon, & & j\in O, i\in I. \end{aligned} \tag{۵}$$

از آنجایی که تعداد پروژه‌های مرکب در $\omega(P)$,$2^{|P|}-1$ است، لذا حتی برای $|P|$ کوچک نیز تعداد پروژه‌های مرکب زیاد خواهد بود و این باعث می‌شود که مدل (۵) به عنوان یک مدل کاربردی شناخته نشود. به عنوان یک گام اولیه به سوی کاربردی کردن تعداد محدودیت‌ها کاهش آنها در (۵) می‌تواند از $2^{|P|}-1$ به $|P|$ کاهش یابد.
محدودیت‌های $\le$ در (۵) را در دو گروه در نظر بگیرید. اولین گروه مرتبط با زیر مجموعه های تک عضوی P مانند $\{1\},\{2\},\ldots,\{|P|\}$ است، و گروه دوم مرتبط یا زیر مجموعه‌های غیر تک عضوی مانند $\{1,2\},\{1,3\}$ و... است. بنابراین مدل (۵) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} Max \quad & h_s = \sum_{j\in O} u_{sj} y_{sj}, & & s\in\omega(P), \\ s.t. \quad & \sum_{i\in I} v_{si} x_{si} = 1, & & \\ & \sum_{j\in O} u_{sj} y_{pj} - \sum_{i\in I} v_{si} x_{pi} \le 0, & & s\in P, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j\in O} u_{sj}\, y_{qj} - \sum_{i\in I} v_{si}\, x_{qi} \le 0, \quad q\in \omega(P)-P', \\ &u_{sj}, v_{si} \ge \varepsilon, \qquad j\in O, i\in I. \end{aligned} \tag{۶}$$

که $p' = \{\{1\},\{2\},\ldots,\{|P|\}\}$ مجموعه همه زیر مجموعه‌های تک عضوی P است.

واضح است که هر محدودیت در گروه دوم از محدودیت‌های $\le$ به صورت یک ترکیب جمعی از دو یا چند محدودیت در گروه اول می‌باشد بنابراین هر ترکیب از محدودیت‌های گروه اول باید در گروه دوم نیز صدق کند و گروه دوم شامل تنها محدودیت‌های زائد است و می‌توانند حذف گردند. درنتیجه مدل پایه ای اولویت دهی برای پروژه‌های مرکب به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} &MAX \quad h_s = \sum_{j\in O} u_{sj}\, y_{sj}, \qquad s\in \omega(P), \\ &st. \quad \sum_{i\in I} v_{si}\, x_{si} = 1, \\ &\qquad \sum_{j\in O} u_{sj}\, y_{pj} - \sum_{i\in I} v_{si}\, x_{pi} \le 0, \quad s\in P, \\ &\qquad u_{sj}, v_{si} \ge \varepsilon, \qquad j\in O, i\in I. \end{aligned} \tag{۷}$$

اکنون مجموعه s را در تابع هدف (۷) به وسیله شناسایی آن به صورت زیر مجموعه خاص از $\omega(P)$محدود می‌کنیم. این زیرمجموعه S می‌تواند به وسیله شرایط زیر مشخص گردد:

۱. برای هر $s\in S$ محدودیت ها در تمامی منابع صدق می‌کنند:

$$\forall\, i\in I, \quad \sum_{k\in s} x_{ki} \le L_i, \tag{۸}$$

۲. برای هر پروژه‌ای که شرط ۱ را به هم بزند به زیر مجموعه ساخته شده اضافه نمی‌شود:

$$\begin{aligned} &\forall p\in P-s \;, \quad \exists i\in I \\ &such\ that \quad \sum_{k\in s\cup\{p\}} x_{ik} \succ L_i, \end{aligned} \tag{۹}$$

شرط ۱ یک نیاز بدیهی است در حالی که شرط ۲ همه پروژه‌های مرکب امکان‌پذیر، که دارای بیشترین اعضا هستند، را به دنبال دارد. پس پیشنهاد مربوط به جستجوی پروژه‌های مرکبی است که حداقل یک منبع را تا حد ممکن مصرف می‌کنند؛ یعنی هر مقداری که از آن منابع باقی می‌ماند برای استفاده پروژه دیگر کافی نخواهد بود. سپس در بین زیرمجموعه‌های پروژه‌های مرکب با شرایط مذکور، یک پروژه مرکب یافت می‌شود که در آن نسبت منافع تجمیعی (مجموع خروجی) به هزینه تجمیعی (مجموع ورودی) ماکزیمم می‌شود.

در ادامه به جای تولید مجموعه S به طور صریح و متعاقباً ارزیابی هر عضو آن به وسیله مدل (۷)، ارزیابی را به وسیله قرار دادن مدل (۷) در یک چارچوب برنامه ریزی غیرخطی صفر و یک ترکیبی به صورت مدل (۱۰) انجام می‌دهیم. در اینجا c_k برابر عدد ۱ است اگر پروژه k عضو پروژه مرکب s^* باشد و گرنه مقدار آن صفر است. بنابراین بهینه سازی روی c_k, u_k, v_k انجام می‌شود.

$$\begin{aligned} &MAX \quad \sum_{j\in O} u_j \Big(\sum_{k\in P} c_k\, y_{kj}\Big) \\ &st. \quad \sum_{i\in I} v_i \Big(\sum_{k\in P} c_k\, x_{ki}\Big) = 1, \\ &\sum_{j\in O} u_j\, y_{pj} - \sum_{i\in I} v_i\, x_{pi} \le 0, \qquad p\in P, \\ &\sum_{k\in P} c_k\, x_{ki} + l_i = L_i, \qquad i\in I, \\ &(1-c_k)x_{ki} + Mc_k + Md_{ki} \ge l_i + \frac{1}{M}, \quad k\in P, i\in I, \\ &\sum_{i\in I} d_{ik} \le |I|-1, \qquad k\in P, \\ &c_k, d_{ki} \in \{0,1\}, \qquad k\in P, i\in I, \\ &u_j, v_i \ge \varepsilon, l_i \ge 0, \qquad j\in O, i\in I, \\ &M \gg 0. \end{aligned} \tag{۱۰}$$

قبل از خطی سازی مدل (۱۰) به برخی از توضیحات اشاره می‌کنیم. این مدل به دنبال بهترین زیر مجموعه ارزیابی شده است که در شرایط ۱ و ۲ صدق می‌کند. واضح است که شرط ۱ به شرح زیر برگردانده می‌شود:

$$\sum_{k\in P} c_k\, x_{ki} + l_i = L_i \tag{۱۱}$$

که l_i متغیر کمکی مربوط به منبع i ام است. شرط ۲ مقداری مشکل‌تر است اما به وسیله محدودیت‌های زیر اجرا می‌شود:

$$(1-c_k)\,x_{ki} + Mc_k + Md_{ki} \ge l_i + \frac{1}{M}$$

$$,k \in P \ , i \in I$$

$$\sum_{i \in I} d_{ik} \le |I|-1 \qquad (۱۲)$$

$$,k \in P$$

در نتیجه نیاز است که لااقل یکی از متغیرهای کمکی l_i بسیار کوچک باشد تا به پروژه‌های دیگر اجازه ورود به s^* را نداشته باشد. برای یک $s \in S$ در نظر گرفته شده، محدودیت اول در (۱۲) را برای برخی $k \in S$، یعنی $c_k = 1$ در نظر بگیرید. این محدودیت برقرار است، زیرا ضریب M در سمت چپ، مثبت بسیار بزرگ است. اکنون حالتی را در نظر بگیرید که در آن برخی $k \notin S$، یعنی $c_k = 0$ و $x_{ki} \le L_i$ است. اولین محدودیت می‌تواند ایجاب کند $d_{ki} = 1$، به هر حال محدودیت دوم اطمینان می‌دهد که لااقل یکی از متغیرهای $d_{k|I|},...,d_{k2},d_{k1}$ صفر باقی می‌ماند. از این رو $\exists i \in I$ که $x_{ki} \ge L_i + \frac{1}{M}$.

در حالی که نرم افزارها قابلیت حل کردن مدل (۱۰) را دارد اما آن را می‌توان به صورت مدل خطی صفر و یک تبدیل کرد، که حل آن راحت تر انجام می‌شود تا اینکه آن را به کمک حل کننده‌های مسائل غیرخطی اجرا کرد. این خطی شدن شامل این تغییرات می‌شود: $b_{ki} = c_k v_i \, , a_{kj} = c_k u_j$. بنابراین با توجه به این تغییر متغیرها، مدل (۱۰) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\max \quad \sum_{k \in P, j \in O} a_{kj} y_{kj}$$

$$s.t \qquad \sum_{k \in P, i \in I} b_{ki} x_{ki} = 1$$

$$\sum_{j \in O} u_j y_{pj} - \sum v_i x_{pi} \le 0 \quad ,p \in P$$

$$\sum_{k \in P} c_k x_{ki} + l_i = L_i \quad ,i \in I \qquad (۱۳)$$

$$(1-c_k) x_{ki} + M c_k + M d_{ki} \ge l_i + \frac{1}{M} \quad ,k \in P \ , i \in I$$

$$\sum_{i \in I} d_{ik} \le |I|-1 \qquad ,k \in P$$

$$c_k , d_{ki} \in \{0,1\} \qquad ,k \in P, i \in I$$

$$a_{kj} \ge 0 \qquad ,k \in P, j \in O$$

$$a_{kj} \ge M c_k \qquad ,k \in P, j \in O$$

$$u_j \ge a_{kj} \qquad ,k \in P, j \in O$$

$$u_j \ge a_{kj} + M(1-c_k) \ ,k \in P, j \in O$$

$$b_{ki} \ge 0 \qquad ,k \in P, i \in I$$

$$b_{ki} \ge M c_k \qquad ,k \in P, i \in I$$

$$v_i \ge b_{ki} \qquad ,k \in P, i \in I$$

$$v_i \ge b_{ki} + M(1-c_k) \quad ,k \in P, i \in I$$

$$l_i \ge 0 \qquad ,k \in P, i \in I$$

$$M \gg 0$$

در مجموعه محدودیت‌های ۷ الی ۱۴ متغیرهای جدید a_{kj} و b_{kj} در مقابل متغیرهای اصلی u_j, c_k و v_i قلمداد می‌شوند.

شایان ذکر است که هدف ارزیابی به وسیله مدل (۳) در مدل (۱۳) نیز وجود دارد. پروژه‌های پیشنهادی دارای اهمیت یکسانی در شکل‌گیری مجموعه امکان تولید و همچنین ترکیب با دیگر پروژه‌ها است، که بایستی برای انتخاب مورد ارزیابی قرار بگیرند. این فرایند تنها به داده هر پروژه نسبت به دیگر پروژه ها با توجه به منابع در دسترس بستگی دارد.

۴- انتخاب پروژه به کمک مدلسازی تحلیل پوششی داده ها

در نظر بگیرید وضعیتی را که K_1 مکان (پروژه یا DMU) وجود دارد و فرض کنید که $\{y_{rk}\}_{r \in R}$ بردار R تایی از خروجی های تولید شده به وسیله مکان k باشد. همچنین فرض کنید که $\{x_{ik}\}_{i \in I}$ برداری از ورودی‌های باشد. در وضعیت انتخاب مکان، y_{rk} تعداد واحدهای فروش رفته از محصول گروه r در فروشگاه k را نشان می‌دهد. به طور مشابه، x_{ik} منبع نوع i مصرف شده به وسیله مکان k و یا متغیر غیر قابل کنترل متعلق به ارزش i را نمایش می‌دهد.

فرض کنید K_2 مکان‌های بالقوه موجود است که به عنوان مکان‌هایی برای فروشگاه‌های جدید در نظر گرفته می‌شود، و فرض کنید که یک پیش‌بینی برای تعداد واحدهای $\{y_{rk}\}_{r\in R}$ از محصول در گروه‌های $r \in R$ وجود دارد. در قسمت ورودی متغیر رقابت x_{1k} برای هر مکان k غیر قابل کنترل است (مقدار آن داده شده است). دو ورودی دیگر x_{2k} (بودجه عملیاتی) و x_{3k} (هزینه سرمایه) است. این دو ورودی همان متغیرهای تصمیم گیری هستند. اگر یک فروشگاه در محل k قرار گیرد، مقادیر معین شده x_{2k} و x_{3k} بر نسبت عملکرد فروش تاثیر خواهد گذاشت. به طور معمول، نمره عملکرد برای مکان k به صورت $e=\dfrac{\sum_{r\in R}\mu_r y_{rk}}{\sum_{i\in I} v_i x_{ik}}$ بیان می‌شود، که در مقایسه با سایر مکان‌های موجود و همچنین مکان‌هایی که جدید ایجاد می‌شوند، بدست می‌آید. در بحث ما ورودی‌های قابل کنترل (DI) و غیرقابل کنترل (NDI) وجود دارد، لذا نمره عملکرد برای مکان k به صورت $e=\dfrac{\sum_{r\in R}\mu_r y_{rk}-\sum_{i\in ND} v_i x_{ik}}{\sum_{i\in DI} v_i x_{ik}}$، به دست می‌آید.

با توجه به منابع محدود، مسئله چگونگی انتخاب زیر مجموعه S از مکان‌های جدید بالقوه $\{K_1+1,K_1+2,\dots,K_1+K_2\}$ است که بدون تخطی کردن از محدودیت منابع، منافع تجمیعی بیشتر برای سازمان را داشته باشد. این ایده مشابه مسئله اولویت‌بندی پروژه کوک و گرین (۲۰۰۰) می‌باشد که در بخش قبلی بحث شده است. تفاوت مهم در مقایسه با مسئله انتخاب پروژه این است که در مسئله انتخاب پروژه x_{ik} منابع ثابت است، اما x_{ik} در روش کنونی متغیرهای تصمیم‌گیری است که مقادیر شان می‌تواند توسط مدل تعیین شود.

فرض کنید $I_1 \subseteq I$ نمایانگر زیرمجموعه از ورودی‌ها (قابل کنترل) است که کران‌هایش محدود شده است. در مسئله مکان یابی، I_1 شامل دو منبع ورودی (هزینه‌های عملیاتی و سرمایه) است. متقابلا، $\overline{I_1}$ نشان دهنده مکمل I_1 است. همچنین، فرض کنید K_1 نمایانگر مجموعه موجود از DMU های $\{1,\dots,K_1\}$ است، و K_2 مجموعه مکان‌های جدید بالقوه $\{K_1+1,\dots,K_1+K_2\}$ است. برای هر زیر مجموعه S، اندازه عملکرد S به وسیله جواب مسئله بهینه سازی زیر محاسبه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\max \frac{\sum_{k\in S}[\sum_{r\in R}\mu_r y_{rk}-\sum_{i\in I_1} v_i x_{ik}]}{\sum_{k\in S}\sum_{i\in I_1} v_i x_{ik}}\\
&s.t\quad \frac{\sum_{r\in R}\mu_r y_{rk}-\sum_{i\in I_1} v_i x_{ik}}{\sum_{i\in I_1} v_i x_{ik}}\le 1 \qquad ,k\in K_1\\
&\overline{\theta_1}\le \frac{\sum_{k\in S}\sum_{r\in R}\mu_r y_{rk}-\sum_{i\in I_1} v_i x_{ik}]}{\sum_{i\in I_1} v_i x_{ik}}\le\overline{\theta_2} \qquad ,k\in S\\
&\sum_{k\in S} x_{ik}\le c_i \qquad ,i\in I_1\\
&x_{ik}\ge L_i \qquad ,k\in S\ ,\ i\in I_1\\
&x_{ik}\ge 0 \qquad ,k\in S\ ,\ i\in I_1\\
&\mu_r, v_i\ge\varepsilon \qquad ,\forall r,i
\end{aligned}
\tag{۱۴}
$$

همانطور که در کوک و گرین (۲۰۰۰) بحث شده است، موقعی که ترکیب DMU ها در نظر گرفته می‌شود (S یک ترکیب است)، تکنولوژی تولید مناسب CRS است. در واقع لازم است که فرض شود برای هر DMU، هر مضرب مثبت آن نیز متعلق به مجموعه امکان تولید است. از این رو برای بررسی های ترکیبی، CRS یک تکنولوژی متناسب تلقی می‌شود.

کران پایین $\overline{\theta_1}$ در دسته قیود دوم (۱۳) به وسیله مدیریت انتخاب می‌شود. برای مثال، ممکن است مینیمم سطح عملکرد برای هر مکان جدید $(k\in S)$؛ حداقل $\overline{\theta}_1=80\%$ در نظر گرفته شود. کران بالای $\overline{\theta_2}$ برای هر فروشگاه $k\in S$ ممکن است ارزش کمتر از یک در

نظر گرفته شود. ما $\overline{\theta}_2 = 1$ در نظر نمی‌گیریم، زیرا این اجازه می‌دهد که مکان ساخته شده مقدار خیلی کم از هر منابع استفاده کند، لذا ممکن است تمامی DMU های موجود را به صورت ناکارا درآورد. از آنجایی که مقادیر خروجی (مجموع واحدهای تولیدی در هر دسته) تخمین زده می‌شوند، رقم های واقعی آنها ممکن است افزایش یافته و مکان‌های پیشنهادی را در خارج از مرز امکان تولید پیشنهاد دهد. بنابراین تنها مکان‌های شناخته شده در مجموعه امکان تولید را معرفی می‌کنند.

دسته محدودیت سوم در مدل (۱۴) کران C_i را برای مقدار ورودی منبع اولیه در دسترس نوع i را تولید می‌کند. واضح است که این گونه محدودیت برای هر ورودی غیر قابل کنترل معنی نخواهد داشت. دسته محدودیت چهارم مدل (۱۴) مینیمم الزامات L_i را روی تعهدات منبع x_{ik} برای مکان‌های جدید ساخته شده، تحمیل می‌کند. در مورد سرمایه، L_i ممکن است حداقل اندازه تسهیلات (امکان اختصاص یافته) در نظر گرفته شود.

توجه نمایید در این مرحله که بهینه‌سازی یک نسبت خروجی وزن‌دار شده به ورودی وزن‌دار شده انجام می‌شود، ممکن است تنها یک مکان انتخاب شود، یعنی تعداد اعضای S برابر ۱ باشد. در اغلب مثال‌ها محدودیت‌ها روی منابع C_i هیچ نقشی را در فرایند بهینه‌سازی ندارند، یا اینکه نقش بسیار جزئی دارند. به هر حال، روش کار انتخاب مکان‌هایی است که بهترین استفاده را از منابع در دسترس دارند. این بدان معنی است که هر مجموعه از مکان‌های S که می توان یک مکان مازاد به آن را بدون نقص محدودیت‌های منبع افزود، را اضافه کرد.

برای تضمین اینکه زیرمجموعه‌های مکان‌هایی که هیچ مکان اضافی نمی‌توان به آن افزود داده شده باشد، ما ابتدا دسته قیود سوم مدل (۱۴) را به صورت زیر تبدیل کرده‌ایم:

$$\sum_{k \in S} v_i x_{ik} + v_i s_i = v_i C_i \quad i \in I_1 \qquad (۱۵)$$

که در آن S_i متغیر کمکی متناظر با محدودیت $i\epsilon I_1$ در دسته قیود سوم مدل (۱۶،۳) می‌باشد.

سپس به ازای تمام زیرمجموعه‌های ممکن S، متغیرهای صفر و یک d_k را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$d_k = \begin{cases} 1 & if \;\; a \; store \; is \; to \\ & be \; located \; at \; k \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad (۱۶)$$

اکنون y_{rk} را با $d_k y_{rk}$ و متغیر تصمیم‌گیری x_{ik} را نیز با $d_k x_{ik}$ جابه جا می‌نماییم. بنابراین، هر زیر مجموعه از مجموعه‌های S متناظر با یک مجموعه ویژه از متغیرهای مثبت d_k است.

در نهایت برای تضمین عدم اضافه شدن مکان جدید به مجموعه تحت بررسی S، لازم است حداقل یکی از متغیرهای کمکی موجود در معادله (۱۵) باید خیلی کوچک باشد تا اینکه منبع کافی برای مکان جدید تخصیص نیابد. به ویژه، هر مجموعه شدنی از مکان‌های S بایستی دارای یک ورودی i باشد که هیچ منبع کافی S_i برای حمایت از هر مکان اضافی از ترکیبات S وجود نداشته باشد. برای انجام این کار، متغیرهای صفر و یک $(k\epsilon k_2, i\epsilon I_1) r_{ik}$ معرفی شده و محدودیت‌های جدید زیر اضافه می‌شوند:

$$v_i s_i \le v_i L_i - \frac{1}{M} + M d_k + M r_{ik}, \qquad (۱۷)$$

$$i \in I_1, k \in K_2$$

$$\sum_{i \in I_1} r_{ik} \le |I_1| - 1, \quad k \in K_2 \qquad (۱۸)$$

با توجه به معادله (۱۷) مشاهده می‌کنیم که چون در هر مکان $d_k = 1, k \in S$، قیدها به ازای هر iصدق می‌کند. به ازای هر $d_k = 0, k\epsilon \bar{S}$، که این نشانگر این است که $v_i S_i \le v_i L_i - \frac{1}{M}$ یا $r_{ik} = 1$. محدودیت (۱۸) اجازه می‌دهد که حداکثر $|I_1| - 1$ متغیر ۱ و یک r_{ik} مقدار صفر داشته باشد، این بدان معنی است که برای هر مکان انتخاب نشده k، حداقل یکی از ورودی های i باید متغیر کمکی (وزن دار شده) که به طور اکید کمتر از کران پایین (وزن دار شده) $v_i L_i$ است، را داشته باشد.

برای هر $\{d_k\}$ و $\{x_i\}$ مفروض (اگر این متغیرها ثابت هستند)، نتایج مربوط به مسائل مسئله برنامه‌ریزی خطی کسری (۱۴)-(۱۸) می‌تواند به وسیله یک مسئله برنامه‌ریزی خطی معادل جایگزین شود. با در نظر گرفتن ارزش‌های d_k و x_{ik} (فرض می‌کنیم که صفر نباشند)، مساله مذکور فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
& Max \quad \sum_{k\in K_2}\left[\sum_{r\in R} d_k \mu_r y_{rk} - \sum_{i\in \bar{I}_1} d_k v_i x_{ik}\right], \\
& s.t \qquad \sum_{k\in K_2}\sum_{i\in I_1} d_k v_i x_{ik} = 1, \\
& \sum_{r\in R}\mu_r y_{rk} - \sum_{i\in I_1} v_i x_{ik} \le 0, \qquad k\in K_1, \\
& \sum_{r\in R} d_k \mu_r y_{rk} - \sum_{i\in \bar{I}_1} d_k v_i x_{ik} - \\
& \bar{\theta}_2 \sum_{i\in I_1} d_k v_i x_{ik} \le 0, \quad k\in K_2, \\
& \sum_{r\in R} d_k \mu_r y_{rk} - \sum_{i\in \bar{I}_1} d_k v_i x_{ik} - \\
& \bar{\theta}_1 \sum_{i\in I_1} d_k v_i x_{ik} \ge 0, \quad k\in K_2, \\
& \sum_{i\in I_1} d_k v_i x_{ik} + v_i s_i = v_i C_i, \\
& \qquad i\in I_1, \\
& d_k x_{ik} \ge d_k L_i, \\
& \qquad i\in I, k\in K_2, \\
& v_i s_i \le v_i L_i - \frac{1}{M} + M d_k + M r_{ik}, \\
& \qquad i\in I, k\in K_2, \\
& \sum_{i\in I_1} r_{ik} \le |I_1| - 1, \qquad k\in K_2, \\
& x_{ik} \ge 0, \qquad i\in I, k\in K_2, \\
& \mu_r, v_i \ge, \qquad \forall r, i, \\
& d_k \in \{1,0\}, \qquad \forall k.
\end{aligned} \tag{۱۹}
$$

برای تسهیل در نوشتن مسئله برنامه‌ریزی خطی صفر و یک ابتدا توجه نمایید که با اضافه کردن محدودیت‌های

$$x_{ik} \le M d_k, \quad i\in I_1, k\in K_2 \tag{۲۰}$$

برای هر $i\epsilon I_1$، محصول $d_k x_{ik}$ را می‌توان با x_{ik} جابجا نمود. سپس تغییر متغیرهای زیر انجام خواهد شد:

$$
\begin{aligned}
& a_{rk} = d_k \mu_r, \quad \forall r, k\in K_2 \\
& b_{ik} = d_k v_i, \quad \forall i, k\in K_2 \\
& c_{ik} = x_{ik} v_i, \quad i\in I_1, k\in K_2 \\
& e_i = s_k v_i, \quad i\in I_1, k\in K_2
\end{aligned} \tag{۲۱}
$$

برای ارتباط a_{rk} با μ_r و d_k، از تبدیلات واضح به صورت محدودیت‌های غیرخطی پرهیز می‌کنیم، از این رو محدودیت‌های زیر را اعمال می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
& 0 \le a_{rk} \le M_{dk} \\
& a_{rk} \le \mu_r \le a_{rk} + M\left(1 - d_k\right)
\end{aligned} \tag{۲۲}
$$

از روابط فوق می‌توان نتیجه گرفت $d_k = 0$ نتیجه می‌دهد $a_{rk} = 0$ و $\mu_r \ge 0$. اگر $d_k = 1$ باشد، آنگاه $\mu_r = a_{rk}$.

به طور مشابه، تعریف b_{ik} نتیجه می‌دهد:

$$
\begin{aligned}
& 0 \le b_{ik} \le M d_k \\
& b_{ik} \le v_i \le v_{ik} + M\left(1 - d_k\right)
\end{aligned} \tag{۲۳}
$$

$v_i x_{ik}$

در نهایت، با جابه جا کردن $v_i x_{ik}$ به وسیله c_{ik}، برای $i\epsilon I_1$ می توان x_{ik} را بعد از حل مدل به صورت $\frac{c_{ik}}{v_i}$ محاسبه کرد. همچنین متغیرهای کمکی S_i به وسیله $\frac{e_i}{v_i}$ تعیین می‌شوند.

توجه نمایید که محدودیت (۲۰) پس از ضرب کردن در v_i به فرم زیر در می‌آید:

$$c_{ik} \le M b_{ik}, \quad i\in I_1, k\in K_2 \tag{۲۴}$$

با توجه به تغییر متغیرها و محدودیت‌های ذکر شده، مدل برنامه‌ریزی صحیح ترکیبی برای انتخاب مکان به صورت زیر خواهد بود:

$$Max \quad \sum_{k\in K_2}\left[\sum_{r\in R} a_{rk} y_{rk} - \sum_{i\in \bar{I}_1} b_{ik} x_{ik}\right],$$

$$
\begin{aligned}
s.t \quad & \sum_{k \in K_2} \sum_{i \in \bar{I}_1} c_{ik} = 1, \\
& \sum_{r \in R} \mu_r y_{rk} - \sum_{i \in I} v_i x_{ik} \le 0, \\
& \qquad k \in K_1, \\
& \sum_{r \in R} a_{rk} y_{rk} - \sum_{i \in \bar{I}_1} b_{ik} x_{ik} - \theta_2 \sum_{i \in I_1} c_{ik} \le 0, \\
& \qquad k \in K_2, \\
& \sum_{r \in R} a_{rk} y_{rk} - \sum_{i \in \bar{I}_1} b_{ik} x_{ik} - \theta_1 \sum_{i \in I_1} c_{ik} \le 0, \\
& \qquad k \in K_2, \\
& \sum_{k \in K_2} c_{ik} + e_i = v_i C_i, \\
& \qquad i \in I_1, \\
& c_{ik} - M d_k \le 0, \\
& \qquad i \in I_1, k \in K_2, \\
& v_i L_i - e_i + M d_k + M r_{ik} \ge \frac{1}{M}, \\
& \qquad i \in I_1, k \in K_2, \\
& \sum_{i \in I_1} r_{ik} \le |I_1| - 1, \qquad k \in K_2, \\
& a_{rk} - M d_k \le 0 \qquad r \in R, k \in K_2, \\
& \mu_r - a_{rk} + M d_k \le M \qquad r \in R, k \in K_2 \\
& \mu_r - a_{rk} \ge 0 \qquad r \in R, k \in K_2 \\
& b_{ik} - M d_k \le 0 \qquad i \in I, k \in K_2 \\
& v_i - b_{ik} + M d_k \le M \qquad i \in I, k \in K_2 \\
& v_i - b_{ik} \ge 0 \qquad i \in I, k \in K_2 \\
& c_{ik} - M b_{ik} \le 0 \qquad i \in I, k \in K_2 \\
& r_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, e_i \ge 0, \\
& \mu_r \ge, v_i \ge r \in R, i \in I, k \in K_2 \\
& d_k, r_{ik} \in \{0,1\} \qquad i \in I, k \in K_2
\end{aligned}
\tag{۲۵}
$$

۵- نتیجه گیری

در این تحقیق، دو مدل بهینه سازی با منابع محدود که برگرفته از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها است ارائه شده است. هر پروژه با استفاده از منابع ورودی مختلف مجموعه ای از خروجی‌ها را تولید می‌کند. در این روش زیرمجموعه از پروژه‌های طوری انتخاب می‌شود که می‌تواند در محدودیت‌های منابع به عنوان یک مجموعه از پروژه‌های انتخاب شده صدق کند. به کمک این پروژه‌های انتخاب شده تکنولوژی تولید یا مجموعه امکان تولید در تحلیل پوششی داده‌ها تعریف شده و سپس ارزیابی در این مجموعه ساخته شده انجام گرفت تا از این طریق کارایی مجموعه‌های انتخاب شده و رتبه‌بندی آنها مورد تحلیل قرار گیرد. در واقع، ارزیابی و انتخاب، در مدل جدید ترکیب شدند که این کار را به وسیله قرار دادن یک مدل تحلیل پوششی داده‌ها در داخل یک مساله برنامه‌ریزی خطی دودویی انجام گرفت. از این طریق انتخاب مجموعه پروژه‌ها بر اساس عملکرد آنها در مقایسه با سایر مجموعه‌ها مورد بررسی قرار گیرد. مدل دوم شامل انتخاب یک مجموعه از بهترین یا ارجح‌ترین مکان‌هایی برای تسهیلات جدید است. مجددا مدل ارائه شده دوم نیز مربوط به انتخاب‌ها با یک منابع محدود است.

فهرست منابع

[1] Amiri P. M., (2010), “Project selection for oil-fields development by using the AHP and fuzzy TOPSIS methods”, Expert Systems with Applications, 37, 6218–6224.

[2] Baker N. and Freeland J., (1975), “Recent Advances in R&D Benefit Measurement and Project Selection Methods”, Management Science, 21, 10, 1164-1175.

[3] Jafarzadeh H., Akbari P. and Abedin B., (2018), “A methodology for project portfolio selection under criteria prioritisation, uncertainty and projects interdependency combination of fuzzy QFD and DEA”, Expert Systems With Applications, 110, 237–249.

[4] Liu F., Chen Y., Yang J., Xu D. and Liu W., (2019), “Solving multiple-criteria R&D project selection problems with a data-driven evidential reasoning rule”, International Journal of Project Management, 37, 87–97.

[5] Mehrez A. and Sinuany-Stern Z., (1983), “An Interactive Approach for Project Selection”, Operational Research Society, 34, 7, 621-626.

[6] Salehi K., (2015), “A hybrid fuzzy MCDM approach for project selection problem”, Decision Science Letters, 4, 109–116.

[7] Wang F., Chen-Hsoung H. and Tzeng G., (2014), “Applying a Hybrid MCDM Model for Six Sigma Project Selection”, Mathematical Problems in Engineering, 2014, 1-13.

[8] Yamami A. E., Mansouri K., Qbadou M. and Illousamen E. H., (2018), “Multi-objective IT Project Selection Model for Improving SME Strategy Deployment”, International Journal of Electrical and Computer Engineering (IJECE), 8, 2, 1102-1111.