دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره هفدهم، فروردین و اردیبهشت ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

نقطه ثابت دوتایی در فضاهای متریک مخروطی مرتب و کاربرد آن در معادلات انتگرال

سمانه قدس[۱*]، مجید اسحاقی گرجی[۲]

(۱) استادیار، گروه علوم پایه، دانشکده فنی و مهندسی، واحد سمنان، دانشگاه آزاد اسلامی، سمنان، ایران
(۲) استاد، گروه ریاضی، دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۲/۱۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۶/۱۰

چکیده

در این مقاله ابتدا به اثبات برخی از قضایای نقطه ثابت دوتایی در فضاهای متریک مخروطی مرتب جزئی بر نگاشت‌هایی که دارای خاصیت یکنوای آمیخته هستند پرداخته و سپس یکتایی این نقاط ثابت دوتایی را تحت شرایطی اثبات می‌نماییم. در قضایای مذکور فضاهای متریک مخروطی مرتب، لزوماً نرمال نیستند؛ و در پایان به بیان کاربردی از نتایج اصلی در معادله انتگرال می‌پردازیم. با وجود آنکه دوو در مقاله

[W. S. Du, A note on cone metric fixed point theory and its equivalence, Nonlinear Analysis, 72(2010) 2259-2261.]

نشان داد که نتایج نقطه ثابت در فضاهای متریک مخروطی دارای خاصیت انقباض خطی در فضاهای متریک برقرار است، اما دوو در مقاله

[W. S. Du, New cone fixed point theorems for nonlinear multivalued maps with their applications, Applied Mathematic Letters, 24(2011)172-178]

و همچنین جانکوویچ و همکاران در مقاله

[S. Jankovic, Z. Kadelburg, S. Radenovic, On cone metric spaces: A survey, Nonlinear Analysis, 74(2011) 2591-2601.]

ثابت کردند که هرگاه فضاهای متریک مخروطی غیرنرمال باشند، قضایای فضای متریک ممکن است برقرار نباشند. نتایج این مقاله به این دسته از فضاها اختصاص دارد.

واژه‌های کلیدی: نقطه ثابت دوتایی، فضاهای متریک مخروطی، ترتیب جزئی، معادله انتگرال.

*. عهده‌دار مکاتبات. Email:s1ghods@gmail.com

۱. مقدمات

نظریه نقطه ثابت توسط بسیاری از محققین مورد مطالعه قرار گرفت و قضایای بسیاری همراه با کاربردهای آن ارائه گردید. [۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹،۱۰،۱۱] قضایای نقطه ثابت در فضای متریک مخروطی، ابتدا توسط هانگ و ژانگ [۱۲]، مورد مطالعه قرار گرفت. بسیاری از محققان قضایای نقطه ثابت در فضاهای متریک مخروطی را در شرایط انقباضی اثبات نمودند. [۱۳،۱۴] دوو در [۱۵] نشان داد که نتایج نقطه ثابت در فضاهای متریک مخروطی که خاصیت انقباض خطی دارند، در فضاهای متریک برقرار است؛ اما دوو [۱۶] و جانکوویچ و همکاران [۱۷] ثابت کردند که هرگاه فضاهای متریک مخروطی غیر نرمال باشند، قضایای فضای متریک ممکن است برقرار نباشند. نویسندگان بسیاری قضایای نقطه ثابت و نقطه ثابت دوتایی را در فضاهای متریک مخروطی مرتب جزئی، که لزوماً نرمال نبودند، اثبات نمودند. [۱۸،۱۹] اکنون به یادآوری برخی از تعاریف مرتبط با فضاهای متریک مخروطی و برخی از خواص آنها می‌پردازیم. [۱۲]

فرض کنید E یک فضای باناخ حقیقی و P یک زیر مجموعه از E باشد. فرض کنید θ عنصر صفر E و IntP درون P باشد.

زیر مجموعه P یک مخروط نامیده می‌شود اگر و فقط اگر:

(i) P بسته و ناتهی باشد و $P \neq \{\theta\}$؛

(ii) اگر $a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0, x, y \in P$، آنگاه $ax + by \in P$؛

(iii) اگر $x \in P$ و $-x \in P$ آنگاه $x = \theta$.

مخروط P را جامد گویند هرگاه دارای نقطه درونی باشد، یعنی $\mathrm{IntP} \neq \emptyset$.

مخروط $P \subseteq E$ مفروض است. رابطه ترتیب جزئی $\preccurlyeq$ روی E را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow y - x \in P.$$

گوییم $x \prec y$، هرگاه $x \preccurlyeq y$ و $x \neq y$. همچنین گوییم $x \ll y$، هرگاه $y - x \in \mathrm{IntP}$.

مخروط P از فضای باناخ حقیقی E را نرمال گویند هرگاه عدد $K > 0$ چنان موجود باشد که برای هر $x, y \in E$ اگر $\theta \preccurlyeq x \preccurlyeq y$ آنگاه $\| x \| \leq K \| y \|$. به کوچکترین عدد مثبت K که در رابطه فوق صدق می‌کند، ثابت نرمال P گویند. واضح است که $K \geq 1$.

در این مقاله، فرض می‌کنیم که E یک فضای باناخ حقیقی، P یک مخروط در E با $\mathrm{IntP} \neq \emptyset$ و $\preccurlyeq$ رابطه ترتیب جزئی روی E باشند.

تعریف ۱. ۱. [۱۲] فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و نگاشت $d: X \times X \to E$ در شرایط زیر صادق باشد:

(i) برای هر $x, y \in X$ و $x \neq y$ داریم $\theta \preccurlyeq d(x,y)$ همچنین $d(x,y) = \theta$ اگر و تنها اگر $x = y$،

(ii) برای هر $x, y \in X$ داریم $d(y,x) = d(x,y)$،

(iii) برای هر $x, y, z \in X$ داریم

$d(x,y) \preccurlyeq d(x,z) + d(z,y)$،

در اینصورت d یک متریک مخروطی بر X است و (X, d) را فضای متریک مخروطی می‌نامند.

تعریف ۱. ۲. [۱۲] فرض کنید (X, d) یک فضای متریک مخروطی و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد و $x \in X$. اگر برای هر $c \in E$ که $\theta \ll c$، عدد Nای موجود باشد که برای هر $n > N$، $d(x_n, x) \ll c$، در اینصورت $\{x_n\}$ را همگرا گویند. از عبارت $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ یا $x_n \to x$ وقتی $n \to \infty$ زمانی استفاده می‌نماییم که $\{x_n\}$ به x همگرا باشد یا x حد $\{x_n\}$ باشد. اگر برای هر $c \in E$ که $\theta \ll c$ عدد Nای موجود باشد که برای هر $n, m > N$، $d(x_n, x_m) \ll c$، در اینصورت $\{x_n\}$ را دنباله‌ای کوشی در X می‌گویند. فضای متریک مخروطی (X, d) را یک فضای متریک مخروطی کامل گویند هرگاه هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

لم ۱. ۳. [۱۲] فرض کنید (X, d) یک فضای متریک مخروطی، P یک مخروط نرمال و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد. در اینصورت:

(i) $\{x_n\}$ به x همگراست اگر و تنها اگر $d(x_n, x) \to \theta$ وقتی $n \to \infty$.
(ii) $\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی است اگر و تنها اگر $d(x_n, x_m) \to \theta$ هرگاه $n, m \to \infty$.
آلتن و همکاران [۱۴] قضایای جالبی را مطرح کردند که به برخی از آن‌ها اشاره می‌نماییم:

قضیه ۱. ۴.[۱۸] فرض کنید $(X, \sqsubseteq)$ یک مجموعه مرتب جزئی و متریک مخروطی d بر X چنان موجود باشد که (X, d) یک فضای متریک مخروطی کامل باشد. فرض کنید $f: X \to X$ نسبت به ترتیب جزئی $\sqsubseteq$، نگاشتی پیوسته و نانزولی باشد. همچنین فرض کنید که دو رابطه زیر برقرار باشند:
(i) $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ که $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$ چنان موجودند که برای هر $x, y \in X$ که $y \sqsupseteq x$،

$$d(fx, fy) \preccurlyeq \alpha\, d(x, y) + \beta[d(x, fx) + d(y, fy)] + \gamma[d(x, fy) + d(y, fx)],$$

(ii) x_0 ای در X موجود است که $fx_0 \sqsupseteq x_0$،
دراینصورت f دارای نقطه ثابت $x^* \in X$ است.

قضیه ۱. ۵.[۱۸] فرض کنید $(X, \sqsubseteq)$ یک مجموعه مرتب جزئی و متریک مخروطی d بر X چنان موجود باشد که (X, d) یک فضای متریک مخروطی کامل باشد. فرض کنید $f: X \to X$ نسبت به ترتیب جزئی $\sqsubseteq$ نگاشتی نانزولی باشد. همچنین فرض کنید که سه رابطه زیر برقرار باشند:
(i) $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ که $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$ چنان موجودند که برای هر $x, y \in X$ که $y \sqsupseteq x$،

$$d(fx, fy) \preccurlyeq \alpha\, d(x, y) + \beta[d(x, fx) + d(y, fy)] + \gamma[d(x, fy) + d(y, fx)],$$

(ii) x_0 ای در X موجود است که $fx_0 \sqsupseteq x_0$،
(iii) اگر دنباله صعودی $\{x_n\}$ به $x \in X$ همگرا باشد، آنگاه برای هر n، $x \sqsupseteq x_n$،
در اینصورت f دارای نقطه ثابت $x^* \in X$ است.

حال، تعاریف خاصیت یکنوای آمیخته و نقطه ثابت دوتایی رابیان می‌نماییم.

تعریف ۱. ۶.[۲۰] فرض کنید $(X, \sqsubseteq)$ یک مجموعه مرتب جزئی و $F: X \times X \to X$. گوییم F دارای خاصیت یکنوای آمیخته است هرگاه، $F(x, y)$ در x یکنوای نانزولی و در y یکنوای ناصعودی باشد. بعبارتی برای هر $x, y \in X$،

$$x_1, x_2 \in X,\ x_1 \sqsubseteq x_2 \Longrightarrow F(x_1, y) \sqsubseteq F(x_2, y)$$

و

$$y_1, y_2 \in X, y_1 \sqsubseteq y_2 \Longrightarrow F(x, y_1) \sqsupseteq F(x, y_2).$$

تعریف ۱. ۷.[۲۰]. عنصر $(x, y) \in X \times X$ را یک نقطه ثابت دوتایی نگاشت F می‌نامیم هرگاه

$$F(y, x) = y,\ F(x, y) = x\,.$$

در ادامه، ابتدا به بیان و اثبات قضایای جدیدی از نقطه ثابت در فضاهای متریک مخروطی مرتب می‌پردازیم سپس اثبات می‌کنیم که با اضافه کردن شرایطی، نقاط ثابت به دست آمده منحصر به فرد است. شایان ذکر است که در قضایای ما فضای متریک مخروطی لزوماً نرمال نیست.

۲. نتایج اصلی

فرض کنید $(X, \sqsubseteq)$ یک مجموعه مرتب جزئی و d یک متریک مخروطی بر X باشد. یک رابطه ترتیب جزئی بر $X \times X$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall (x, y), (u, v) \in X \times X;\ (u, v) \sqsubseteq (x, y) \Longrightarrow y \sqsubseteq v,\ x \sqsupseteq u.$$

در این مقاله، از نمادهای زیر استفاده خواهیم کرد:
فرض کنید $F: X \times X \to X$ نگاشتی دلخواه باشد.
(i) قرار می‌دهیم $F^0(x, y) = x,\ F^0(y, x) = y$.
(ii) برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$F^n(x,y) = F\big(F^{n-1}(x,y), F^{n-1}(y,x)\big),\ \forall\,(x,y) \in X\times X$$
و
$$F^n(y,x) = F\big(F^{n-1}(y,x), F^{n-1}(x,y)\big),\ \forall\,(x,y) \in X\times X.$$

قضیه ۲. ۱. فرض کنید $(X,\sqsubseteq)$ یک مجموعه مرتب جزئی و متریک مخروطی d بر X چنان موجود باشد که (X,d) یک فضای متریک مخروطی کامل باشد. فرض کنید $F: X\times X \to X$ نسبت به ترتیب جزئی $\sqsubseteq$ نگاشتی پیوسته باشد که خاصیت یکنوای آمیخته دارد. همچنین فرض کنید که دو رابطه زیر برقرار باشند:

(i) $\alpha,\beta,\gamma \geq 0$ که $2\alpha + 3\beta + 3\gamma < 1$ چنان موجودند که برای هر $x,y,u,v \in X$ که $(u,v) \sqsubseteq (x,y)$، (یعنی $x \sqsupseteq u$, $y \sqsubseteq v$)
$$d\big(F(x,y),F(u,v)\big) \preccurlyeq \alpha\, d(x,u) + \beta\big[d\big(x,F(x,y)\big) + d\big(u,F(u,v)\big)\big] + \gamma[d(x,F(u,v)) + d(u,F(x,y))]،$$

(ii) x_0,y_0ای در X موجود باشد که $x_0 \sqsubseteq F(x_0,y_0)$ و $y_0 \sqsupseteq F(y_0,x_0)$، در اینصورت $x^*,y^* \in X$ موجود است بطوریکه $x^* = F(x^*,y^*)$ و $y^* = F(y^*,x^*)$.

اثبات: از آنجا که $F\,(X,X) \subseteq X$ و $x_0,y_0 \in X$، لذا $x_1,y_1 \in X$ موجودند به طوریکه $x_1 = F(x_0,y_0)$ و $y_1 = F(y_0,x_0)$. به همین ترتیب $x_2,y_2 \in X$ موجودند به طوریکه $x_2 = F(x_1,y_1)$ و $y_2 = F(y_1,x_1)$. با ادامه این روند می‌توان دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در X را ساخت به طوریکه:
$$x_{n+1} = F(x_n,y_n)\,,\quad y_{n+1} = F(y_n,x_n) \qquad (۱)$$

با توجه به روابط بالا و مفروضات داریم:
$$x_0 \sqsubseteq F(x_0,y_0) = x_1, y_0 \sqsupseteq F(y_0,x_0) = y_1 \qquad (۲)$$

چون
$$F^2(x_0,y_0) = F(F(x_0,y_0),F(y_0,x_0)) = F(x_1,y_1) = x_2$$

و بنابر خاصیت یکنوایی آمیخته F و (۲)،
$$x_2 = F^2(x_0,y_0) = F(x_1,y_1) \sqsupseteq F(x_0,y_1) \sqsupseteq F(x_0,y_0) = x_1$$

به عبارتی
$$x_2 \sqsupseteq x_1 \sqsupseteq x_0.$$

همچنین
$$F^2(y_0,x_0) = F(F(y_0,x_0),F(x_0,y_0)) = F(y_1,x_1) = y_2,$$

بنابر خاصیت یکنوایی آمیخته F و (۲)،
$$y_2 = F^2(y_0,x_0) = F(y_1,x_1) \sqsubseteq F(y_0,x_1) \sqsubseteq F(y_0,x_0) = y_1$$

به عبارتی
$$y_2 \sqsubseteq y_1 \sqsubseteq y_0.$$

از طرفی، برای $n = 1,2,\dots$، داریم:
$$x_{n+1} = F^{n+1}(x_0,y_0) = F(F^n(x_0,y_0),F^n(y_0,x_0))$$
و
$$y_{n+1} = F^{n+1}(y_0,x_0) = F\big(F^n(y_0,x_0),F^n(x_0,y_0)\big),$$

بنابراین،
$$x_0 \sqsubseteq F(x_0,y_0) = x_1 \sqsubseteq F^2(x_0,y_0) = x_2 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq F^{n+1}(x_0,y_0) \sqsubseteq \cdots \qquad (۳)$$
و
$$y_0 \sqsupseteq F(y_0,x_0) = y_1 \sqsupseteq F^2(y_0,x_0) = y_2 \sqsupseteq \cdots \sqsupseteq F^{n+1}(y_0,x_0) \sqsupseteq \cdots \qquad (۴)$$

حال بنا بر (i)، (۳) و (۴) داریم:
$$\begin{aligned}
&d(F^{n+1}(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0))\\
&= d(F(F^n(x_0,y_0),F^n(y_0,x_0)), F(F^{n-1}(x_0,y_0),F^{n-1}(y_0,x_0)))\\
&\preccurlyeq \alpha\, d((F^n(x_0,y_0),F^{n-1}(x_0,y_0))\\
&+ \beta\,[d\Big(\big(F^n(x_0,y_0),F^{n+1}(x_0,y_0)\big)\\
&+ d\big(F^{n-1}(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0)\big)\Big]\\
&+\gamma\,[d\big(F^n(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0)\big)\\
&\preccurlyeq \alpha d\big(F^n(x_0,y_0),F^{n-1}(x_0,y_0)\big))\\
&+ \beta\, d\big(F^n(x_0,y_0),F^{n+1}(x_0,y_0)\big)
\end{aligned}$$

$$+\beta\, d\big(F^{n-1}(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0)\big)$$
$$+\gamma\, d\big(F^{n-1}(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0)\big)$$
$$+\gamma\, d\big(F^n(x_0,y_0),F^{n+1}(x_0,y_0)\big),$$

لذا

$$(1-\beta-\gamma)d(F^{n+1}(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0)) \preccurlyeq (\alpha+\beta+\gamma)d\big(F^n(x_0,y_0),F^{n-1}(x_0,y_0)\big),$$

یعنی

$$d\big(F^{n+1}(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0)\big) \preccurlyeq \frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(1-\beta-\gamma)} d\big(F^n(x_0,y_0),F^{n-1}(x_0,y_0)\big), \forall n \geq 1.$$

با ادامه این روند، داریم:

$$d\big(F^{n+1}(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0)\big) \preccurlyeq k^n d(F(x_0,y_0),x_0)، \qquad (۵)$$

که در آن $k=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(1-\beta-\gamma)}<\frac{1}{2}<1$. به طور مشابه اگر قرار دهیم $k=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(1-\beta-\gamma)}$، با استفاده از (i)، (۳) و (۴) داریم:

$$d(F^{n+1}(y_0,x_0),F^n(y_0,x_0)) = d(F(F^n(y_0,x_0),F^n(x_0,y_0)), F(F^{n-1}(y_0,x_0),F^{n-1}(x_0,y_0)))$$
$$\preccurlyeq \alpha\, d((F^n(y_0,x_0),F^{n-1}(y_0,x_0))$$
$$+\beta\,[d((F^n(y_0,x_0),F^{n+1}(y_0,x_0))$$
$$+d(F^{n-1}(y_0,x_0),F^n(y_0,x_0))]$$
$$+\gamma\,[d(F^n(y_0,x_0),F^n(y_0,x_0))$$
$$+d((F^{n-1}(y_0,x_0),F^{n+1}(y_0,x_0))]$$
$$\preccurlyeq \alpha d(F^n(y_0,x_0),F^{n-1}(y_0,x_0)))$$
$$+\beta\, d(F^n(y_0,x_0),F^{n+1}(y_0,x_0))$$
$$+\beta\, d(F^{n-1}(y_0,x_0),F^n(y_0,x_0))$$
$$+\gamma\, d(F^{n-1}(y_0,x_0),F^n(y_0,x_0))$$
$$+\gamma\, d(F^n(y_0,x_0),F^{n+1}(y_0,x_0)).$$

بنابراین

$$(1-\beta-\gamma)d(F^{n+1}(y_0,x_0),F^n(y_0,x_0)) \preccurlyeq (\alpha+\beta+\gamma)d\big(F^n(y_0,x_0),F^{n-1}(y_0,x_0)\big)،$$

یعنی

$$d\big(F^{n+1}(y_0,x_0),F^n(y_0,x_0)\big) \preccurlyeq \frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(1-\beta-\gamma)} d\big(F^n(y_0,x_0),F^{n-1}(y_0,x_0)\big) = kd\big(F^n(y_0,x_0),F^{n-1}(y_0,x_0)\big), \forall n \geq 1.$$

با ادامه این روند، داریم:

$$d\big(F^{n+1}(y_0,x_0),F^n(y_0,x_0)\big) \preccurlyeq k^n d(F(y_0,x_0),y_0) \qquad (۶)$$

فرض کنید $m>n$، بنابر رابطه (۵)، داریم:

$$d(F^m(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0))$$
$$\preccurlyeq d(F^m(x_0,y_0),F^{m-1}(x_0,y_0)) + \cdots$$
$$+ d(F^{n+1}(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0))$$
$$\preccurlyeq (k^{m-1}+k^{m-2}+\cdots$$
$$+k^n)\, d(F(x_0,y_0),x_0)$$
$$=\frac{k^n-k^m}{1-k} d(F(x_0,y_0),x_0)$$
$$\preccurlyeq \frac{k^n}{1-k} d(F(x_0,y_0),x_0).$$

بنابراین،

$$d\big(F^m(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0)\big) \preccurlyeq \frac{k^n}{1-k} d(F(x_0,y_0),x_0). \qquad (۷)$$

اکنون نشان می‌دهیم که $\{F^n(x_0,y_0)\}_{n\geq 1}$ یک دنباله کوشی در (X,d) است. فرض کنید $\theta \ll c$ دلخواه باشد. از آنجا که $c\in \mathrm{Int}P$، یک همسایگی از θ مانند

$$N_\delta(\theta) = \{y \in E: \parallel Y \parallel < \delta, \delta > 0\}$$

چنان موجود است که $c+N_\delta(\theta) \subseteq \mathrm{Int}\,P$.

عدد طبیعی N_1 را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$\parallel -\frac{k^{N_1}}{1-k} d(F(x_0,y_0),x_0) \parallel < \delta.$$

در اینصورت برای هر $n \geq N_1$، $-\frac{k^n}{1-k} d(F(x_0,y_0),x_0) \in N_\delta(\theta)$ و لذا

$$c-\frac{k^n}{1-k} d(F(x_0,y_0),x_0) \in c+N_\delta(\theta) \subseteq \mathrm{Int}\,P.$$

بنابراین برای هر $n \geq N_1$،

$$\frac{k^n}{1-k} d(F(x_0,y_0),x_0) \ll c$$

حال با توجه به (۷)، برای هر $m>n\geq N_1$،

$$d\big(F^m(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0)\big) \ll c.$$

بنابراین $\{F^n(x_0,y_0)\}_{n\geq 1}$ یک دنباله کوشی در (X,d) است. به طور مشابه، $\{F^n(y_0,x_0)\}_{n\geq 1}$ نیز یک دنباله کوشی در (X,d) است. از طرفی (X,d) یک فضای متریک مخروطی کامل است بنابراین $x^*,y^*\in X$ای موجودند که هرگاه $n\to\infty$، آنگاه $F^n(x_0,y_0)\to x^*$ و هرگاه $m\to\infty$ آنگاه $F^m(y_0,x_0)\to y^*$.

در نهایت، ادعا می‌کنیم که $x^*=F(x^*,y^*)$ و $y^*=F(y^*,x^*)$.

فرض کنیم $\theta\ll\epsilon$. چون F در (x^*,y^*) پیوسته است، برای $\theta\ll\frac{\epsilon}{2}$، $\theta\ll\delta$ای موجود است به طوری که

$$d(x^*,u^*)+d(y,v)\prec\delta \Longrightarrow d\big(F(x^*,y^*),F(u,v)\big)\ll\frac{\epsilon}{2}. \tag{۸}$$

از آنجا که $F^n(x_0,y_0)\to x^*$ و $F^m(y_0,x_0)\to y^*$، برای $\theta\ll\eta=\min\left(\frac{\epsilon}{2},\frac{\delta}{2}\right)$، m_0,n_0ای موجودند که برای $n\geq n_0$ و $m\geq m_0$،

$$d(F^n(x_0,y_0),x^*)\prec\eta,\ d(F^m(y_0,x_0),y^*)\prec\eta \tag{۹}$$

حال از (۸) و (۹)، برای $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq\max\{m_0,n_0\}$، داریم:

$$\begin{aligned}
&d(F(x^*,y^*),x^*)\\
&\preccurlyeq d\big(F(x^*,y^*),F^{n+1}(x_0,y_0)\big)\\
&+d(F^{n+1}(x_0,y_0),x^*)\\
&=d\Big(F(x^*,y^*),F\big(F^n(x_0,y_0),F^n(y_0,x_0)\big)\Big)\\
&+d(F^{n+1}(x_0,y_0),x^*)\ll\eta+\frac{\epsilon}{2}\preccurlyeq\epsilon.
\end{aligned}$$

بنابراین $x^*=F(x^*,y^*)$. به طور مشابه ثابت می‌شود که $y^*=F(y^*,x^*)$.

اگر به جای پیوستگی F در قضیه ۲. ۱، شرایط (iii) و (iv) از قضیه زیر را جایگزین کنیم، نتایج قضیه همچنان برقرار است.

قضیه ۲. ۲. فرض کنید $(X,\sqsubseteq)$ یک مجموعه مرتب جزئی و متریک مخروطی d بر X چنان موجود باشد که (X,d) یک فضای متریک مخروطی کامل باشد. فرض کنید $F:X\times X\to X$ نسبت به ترتیب جزئی $\sqsubseteq$ نگاشتی باشد که خاصیت یکنوای آمیخته دارد. همچنین فرض کنید که روابط زیر برقرار باشند:

(i) $\alpha,\beta,\gamma\geq 0$ که $2\alpha+3\beta+3\gamma<1$ چنان موجودند که برای هر $x,y,u,v\in X$ که $(u,v)\sqsubseteq(x,y)$، (یعنی $x\sqsupseteq u$, $y\sqsubseteq v$)

$$\begin{aligned}
&d\big(F(x,y),F(u,v)\big)\preccurlyeq\alpha\, d(x,u)+\\
&\beta\big[d\big(x,F(x,y)\big)+d\big(u,F(u,v)\big)\big]+\\
&\gamma[d(x,F(u,v))+d(u,F(x,y))],
\end{aligned}$$

(ii) x_0,y_0ای در X موجود باشد که

$$x_0\sqsubseteq F(x_0,y_0) \text{ و } y_0\sqsupseteq F(y_0,x_0),$$

(iii) برای دنباله نانزولی $\{x_n\}\to x$ داشته باشیم

$$x_n\sqsubseteq x,\quad \forall n,$$

(iv) برای دنباله ناصعودی $\{y_n\}\to y$ داشته باشیم

$$y_n\sqsupseteq y,\quad \forall n,$$

در اینصورت $x^*,y^*\in X$ موجود است بطوریکه

$$x^*=F(x^*,y^*) \text{ و } y^*=F(y^*,x^*)$$

اثبات: با توجه به اثبات قضیه ۲. ۱، کافی است ثابت کنیم،

$$x^*=F(x^*,y^*) \text{ و } y^*=F(y^*,x^*)\,.$$

فرض کنید $\theta\ll c$. از آنجا که $\{F^n(x_0,y_0)\}\to x^*$ و $\{F^n(y_0,x_0)\}\to y^*$، لذا اعداد طبیعی m_1,n_1 موجودند که برای $n\geq n_1$ و $m\geq m_1$ داریم:

$$d(F^n(x_0,y_0),x^*)\ll\frac{\epsilon}{3},$$
$$d(F^m(y_0,x_0),y^*)\ll\frac{\epsilon}{3}.$$

قرار می‌دهیم $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq\max\{m_1,n_1\}$. حال با استفاده از $x^*\sqsupseteq F^n(x_0,y_0)$ و $y^*\sqsubseteq F^n(y_0,x_0)$ داریم:

$$\begin{aligned} d(F(x^*,y^*),x^*) &\preccurlyeq d(F(x^*,y^*),F^{n+1}(x_0,y_0)) + d(F^{n+1}(x_0,y_0),x^*) \\ &= d(F(x^*,y^*),F(F^n(x_0,y_0)),F^n(y_0,x_0))) + d(F^{n+1}(x_0,y_0),x^*) \\ &\preccurlyeq \alpha\, d(x^*,F^n(x_0,y_0)) + \beta\,[d(x^*,F(x^*,y^*)) + d(F^n(x_0,y_0),F^{n+1}(x_0,y_0))] \\ &+ \gamma[d(x^*,F^{n+1}(x_0,y_0)) + d(F^n(x_0,y_0),F(x^*,y^*))] + d(F^{n+1}(x_0,y_0),x^*). \end{aligned}$$

حال اگر $n \to \infty$، آنگاه

$$d(F(x^*,y^*),x^*) \preccurlyeq \beta\, d\big(x^*,F(x^*,y^*)\big) + \gamma d\big(x^*,F(x^*,y^*)\big),$$

به عبارتی،

$$d(F(x^*,y^*),x^*) \preccurlyeq (\beta + \gamma) d\big(x^*,F(x^*,y^*)\big),$$

با توجه به شرط (i) قضیه،

$$d(F(x^*,y^*),x^*) \preccurlyeq \frac{1}{3} d\big(x^*,F(x^*,y^*)\big),$$

یعنی

$$\frac{2}{3} d\big(x^*,F(x^*,y^*)\big) \preccurlyeq \theta..$$

بنابراین $-d(F(x^*,y^*),x^*) \in P$ و لذا $d(F(x^*,y^*),x^*) \in P$. پس $d\big(x^*,F(x^*,y^*)\big) = \theta$ و این یعنی $x^* = F(x^*,y^*)$. به طور مشابه ثابت می‌شود که $y^* = F(y^*,x^*)$.

اکنون ثابت می‌کنیم که اگر فضای حاصلضربی $X \times X$ دارای ویژگی‌های زیر باشد، نقطه ثابت دوتایی یکتاست.

(الف) هر زوج از عناصر دارای یک حد پایین یا یک حد بالا است.

در [۷] نشان داده شده است که این شرط معادل است با:

(ب) برای هر $(u,v),(x,y) \in X \times X$ وجود دارد $(z_1,z_2) \in X \times X$ که قابل مقایسه با (x,y) و (u,v) است.

قضیه ۲. ۳. اگر شرط (ب) به فرضیات قضیه ۲. ۱، اضافه شود، نقطه ثابت دوتایی F یکتاست.

اثبات: فرض کنید $(x,y) \in X \times X$ نقطه ثابت دوتایی دیگری برای F باشد، نشان می‌دهیم که:

$$d(x,x^*) + d(y,y^*) = \theta,$$

که در آن $\{F^n(x_0,y_0)\} \to x^*$ و $\{F^m(y_0,x_0)\} \to y^*$.

دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت۱: اگر (x,y) نسبت به ترتیب جزئی $\sqsubseteq$ در $X \times X$ با (x^*,y^*) قابل مقایسه باشد، برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، $(x^*,y^*) = \big(F^n(x^*,y^*),F^n(y^*,x^*)\big)$ با $(x,y) = \big(F^n(x,y),F^n(y,x)\big)$ قابل مقایسه است. همچنین،

$$\begin{aligned} d(x,x^*) + d(y,y^*) &= d(F^n(x,y),F^n(x^*,y^*)) + d(F^n(y,x),F^n(y^*,x^*)) \preccurlyeq k^n[d(x,x^*) + d(y,y^*)] + k^n[d(y,y^*) + d(x,x^*)] \\ &= 2k^n[d(x,x^*) + d(y,y^*)]. \end{aligned}$$

این بدان معنی است که $d(x,x^*) + d(y,y^*) = \theta$.

حالت۲: اگر (x,y) نسبت به ترتیب جزئی $\sqsubseteq$ در $X \times X$ با (x^*,y^*) قابل مقایسه نباشد، $(z_1,z_2) \in X \times X$‌ای موجود است که با (x^*,y^*) و (x,y) قابل مقایسه است، لذا برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، $\big(F^n(z_1,z_2),F^n(z_2,z_1)\big)$ با $(x^*,y^*) = \big(F^n(x^*,y^*),F^n(y^*,x^*)\big)$ و $(x,y) = \big(F^n(x,y),F^n(y,x)\big)$ قابل مقایسه است و داریم:

$$\begin{aligned} d(x,x^*) + d(y,y^*) &= d(F^n(x,y),F^n(x^*,y^*)) + d(F^n(y,x),F^n(y^*,x^*)) \\ &\preccurlyeq d(F^n(x,y),F^n(z_1,z_2)) + d(F^n(z_1,z_2),F^n(x^*,y^*)) \\ &+ d(F^n(y,x),F^n(z_2,z_1)) + d(F^n(z_2,z_1),F^n(y^*,x^*)) \\ &\preccurlyeq k^n[d(x,z_1) + d(y,z_2)] + k^n[d(z_1,x^*) + d(z_2,y^*)] + k^n[d(y,z_2) + d(x,z_1)] \\ &+ k^n[d(z_2,y^*) + d(z_1,x^*)] \\ &= 2(k^n[d(x,z_1) + d(y,z_2)] + k^n[d(z_1,x^*) + d(z_2,y^*) \to \theta \end{aligned}$$

وقتی $n \to \infty$. از طرفی (z_1, z_2) قابل مقایسه با (x^*, y^*) و (x, y) است. از اینرو

$$d(x, x^*) + d(y, y^*) = \theta.$$

۳. کاربرد

اکنون، به بیان کاربردی از نتایج اصلی بخش قبل، در معادله انتگرال می‌پردازیم.

قضیه ۳. ۱. فرض کنید $(X, \sqsubseteq)$ یک مجموعه مرتب جزئی و متریک مخروطی d بر X چنان موجود باشد که (X, d) یک فضای متریک مخروطی کامل باشد. فرض کنید $F: X \times X \to X$ نگاشتی دلخواه باشد. همچنین فرض کنید که تابعک خطی $\Theta: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ موجود باشد که در شرایط زیر صدق کند:

(i) برای هر $t > 0$، داشته باشیم $\Theta(t) > 0$،

(ii) Θ نانزولی باشد،

(iii) برای هر $\epsilon > 0$، $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ که $2\alpha + 3\beta + 3\gamma < 1$ چنان موجودند که برای $x, y, u, v \in X$ که $(u, v) \sqsubseteq (x, y)$; (یعنی $y \sqsubseteq v, x \sqsupseteq u$)،

$$\Theta\Big(d\big(F(x,y), F(u,v)\big)\Big) \preccurlyeq \Theta\Big(\alpha\, d(x,u) + \beta\big[d\big(x, F(x,y)\big) + d\big(u, F(u,v)\big)\big] + \gamma\big[d\big(x, F(u,v)\big) + d\big(u, F(x,y)\big)\big]\Big) + \epsilon,$$

در اینصورت F در شرط (i) از قضیه ۲. ۱، صدق می‌کند.

اثبات: فرض کنیم $\epsilon > 0$ مفروض باشد. بنابر (i)، $\Theta(\epsilon) > 0$. بنابر (iii)، $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, که $2\alpha + 3\beta + 3\gamma < 1$ چنان موجودند که برای $x, y, u, v \in X$ که $(u, v) \sqsubseteq (x, y)$; (یعنی $y \sqsubseteq v, x \sqsupseteq u$)،

$$\Theta\Big(d\big(F(x,y), F(u,v)\big)\Big) \preccurlyeq \Theta\Big(\alpha\, d(x,u) + \beta\big[d\big(x, F(x,y)\big) + d\big(u, F(u,v)\big)\big] + \gamma\big[d\big(x, F(u,v)\big) + d\big(u, F(x,y)\big)\big]\Big) + \Theta(\epsilon).$$

از آنجا که Θ یک تابعک خطی است، لذا برای $x, y, u, v \in X$ که $(u, v) \sqsubseteq (x, y)$؛

$$\Theta\Big(d\big(F(x,y), F(u,v)\big)\Big) \preccurlyeq \Theta\Big(\alpha\, d(x,u) + \beta\big[d\big(x, F(x,y)\big) + d\big(u, F(u,v)\big)\big] + \gamma\big[d\big(x, F(u,v)\big) + d\big(u, F(x,y)\big)\big] + \epsilon\Big).$$

به علاوه Θ نانزولی است، لذا برای $x, y, u, v \in X$ که $(u, v) \sqsubseteq (x, y)$؛

$$\Big(d\big(F(x,y), F(u,v)\big)\Big) \preccurlyeq \Big(\alpha\, d(x,u) + \beta\big[d\big(x, F(x,y)\big) + d\big(u, F(u,v)\big)\big] + \gamma\big[d\big(x, F(u,v)\big) + d\big(u, F(x,y)\big)\big] + \epsilon\Big);$$

و چون $\epsilon > 0$ دلخواه بود، اثبات کامل است.

حال به اثبات نتیجه نهایی این فصل می‌پردازیم.

نتیجه ۳. ۲. فرض کنید $(X, \sqsubseteq)$ یک مجموعه مرتب جزئی و متریک مخروطی d بر X چنان موجود باشد که (X, d) یک فضای متریک مخروطی کامل باشد. فرض کنید $F: X \times X \to X$ نسبت به ترتیب جزئی $\sqsubseteq$ نگاشتی پیوسته باشد که خاصیت یکنوای آمیخته دارد. همچنین فرض کنید که دو رابطه زیر برقرار باشند:

(i) $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ که $2\alpha + 3\beta + 3\gamma < 1$ چنان موجودند که برای هر $x, y, u, v \in X$ که $(u, v) \sqsubseteq (x, y)$، (یعنی $y \sqsubseteq v, x \sqsupseteq u$)،

$$\int_0^{d(F(x,y),F(u,v))} \varphi(t)dt \preccurlyeq \int_0^{\alpha\, d(x,u)+\beta[d(x,F(x,y))+d(u,F(u,v))]+\gamma[d(x,F(u,v))+d(u,F(x,y))]} \varphi(t)dt,$$

که در آن φ تابع انتگرال پذیر موضعی از $[0, \infty)$ به خودش است و

$$\int_0^s \varphi(t)dt > 0, \quad \forall s > 0,$$

(ii) x_0, y_0ای در X موجود باشد که

$x_0 \sqsubseteq F(x_0, y_0)$ و $y_0 \sqsubseteq F(y_0, x_0)$،

در اینصورت $x^*, y^* \in X$ موجود است بطوریکه

$x^* = F(x^*, y^*)$ و $y^* = F(y^*, x^*)$.

بعلاوه اگر شرط (ب) به فرضیات نتیجه اضافه شود، نقطه ثابت دوتایی Fیکتاست.

اثبات: فرض کنید φ تابع انتگرال پذیر موضعی از $[0,\infty)$ به خودش است که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\int_0^s \varphi(t)dt > 0, \quad \forall s > 0,$$

قرار می‌دهیم $\Theta(s)=\int_0^s \varphi(t)dt$، در اینصورت نتیجه از قضایای ۲. ۱، ۲. ۳ و ۳. ۱ حاصل می‌شود.

تذکر ۳. ۳. اگر به جای پیوستگی F، فرض‌های (iii) و (iv) قضیه ۲. ۲ را جایگزین کنیم، نتایج این بخش برقرار است.

تقدیر و تشکر. این تحقیق در قالب طرح پژوهشی با عنوان "قضایای نقطه ثابت بر مجموعه‌های مرتب جزئی و فضاهای فازی" و با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه آزاد اسلامی واحد سمنان انجام شده است.

فهرست منابع

[1]. A. Razani, V. Parvaneh, On Generalized Weakly-Contractive Mappings in Partially Ordered-Metric Spaces, Abstract and Applied Analysis, 2012 (2012), Article ID 701910, 18 pages.

[2]. R. J. Shahkoohi, A. Razani, Some fixed point theorems for rational Geraghty contractive mappings in ordered b-metric space, Journal of Inequalities and Applications, 2014:373 (2014).

[3]. A. Abkar, M. Gabeleh, Best proximity points for cyclic mappings in ordered metric spaces, Journal of Optimization Theory and Applications, 150(1)(2011) 188–193.

[4]. A. Abkar, B. S. Choudhury, Fixed point result in partially ordered metric spaces using weak contractive inequalities, Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics, 27(1) (2012) 1–11.

[5]. M. E. Gordji, H. Habibi, Fixed point theory in generalized orthogonal metric spaces, Journal of Linear and Topological Algebra, 06(03) (2017) 251-260.

[6]. M. E. Gordji, Y. J. Cho, S. Ghods, M. Ghods, M. H. Dehkordi, Coupled fixed-point theorems for contractions in partially ordered metric spaces and applications, Mathematical Problems in Engineering, 2012 (2012), Article ID 150363, 20 pages.

[7]. J. J. Nieto, R. Rodriguez-Lopez, Contractive mapping theorems in partially ordered sets andapplications to ordinary differential equations, Order 22 (2005) 223-239.

[8]. M. Paknazar, M. E. Gordji, M. De. La Sen, S. M. Vaezpour, N-fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces, Fixed Point Theory and Applications, 2013:111(2013).

[9]. R. Saadati, S. M. Vaezpour, P. Vetro, B. E. Rhoades, Fixed point theorems in generalized partially ordered G-metric spaces, Mathematical and Computer Modelling,52(5–6) (2010) 797-801.

[10]. M. E. Gordji, M. B. Ghaemi, B. Alizadeh, A fixed point approach to super stability of generalized derivations on non-Archimedean Banach algebras, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics 8 (07) (2011) 1611-1625.

[11]. M. B. Ghaemi, B. Lafuerza- Guillen, A. Razani, A common fixed point for operators in probabilistic normed spaces, Chaos, Solitons & Fractals, 40 (3) (2009) 1361-1366.

[12]. L. G. Huang, X. Zhang, Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mapping, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 332(2007) 1468-1476.

[13]. W. S. Du, A note on cone metric fixed point theory and its equivalence, Nonlinear Analysis. 72(2010) 2259-2261.

[14]. F. Khojasteh, Z. Goodarzi, A. Razani, Some fixed point theorems of integral type contraction in cone metric spaces, Fixed Point Theory and Applications, 2010:189684(2010).

[15]. W. S. Du, A note on cone metric fixed point
Theory and its equivalence, Nonlinear Analysis,
72(2010) 2259-2261.

[16]. W. S. Du, New cone fixed point theorems for nonlinear multi valued maps

with their applications, Applied Mathematic Letters, 24(2011) 172-178.

[17]. S. Jankovic, Z. Kadelburg, S. Radenovic, On cone metric spaces: A survey, Nonlinear Analysis, 74(2011) 2591-2601.

[18]. I. Altun, B. DamjanovC, D. Djoric C, Fixed point and common fixed point theorems on ordered cone metric spaces, Applied Mathematics Letters. 23 (2010) 310-316.

[19]. W. Shatanawi, Partially ordered cone metric spaces and coupled fixed point results, Computer and Mathematics with Applications. 60(2010) 2508-2515.

[20]. T. G. Bhaskar, V. Lakshmikantham, Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications, Nonlinear Analysis, 65(2006) 1379-1393.