

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال چهارم، شماره شانزدهم، زمستان ۱۳۹۷

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸

JNRM

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

یافتن تجزیه‌ی قطبی یک ماتریس به وسیله‌ی یک روش تکراری کارا

فرشاد کیومرثی*

گروه ریاضی، واحد شهرکرد، دانشگاه آزاد اسلامی، شهرکرد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۳/۲۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۹/۱۶

چکیده

هدف از این مقاله، مطالعه‌ی ساختن یک روش تکرار ماتریسی مرتبه بالاتر برای محاسبه‌ی تجزیه‌ی قطبی یک ماتریس مناسب می‌باشد. به‌طور تحلیلی نشان داده می‌شود که روش جدید همگراست و دارای مرتبه‌ی بالا است. نتایج مقاله به وسیله‌ی مثال‌های عددی به تصویر کشیده می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: تجزیه قطبی، تکرار ماتریسی، عامل قطبی، روش تکراری.

۱- پیش‌نیازات

یکی از تجزیه‌های مهم ماتریسی با کاربردهای مختلف [۱۱]، تجزیه‌ی قطبی می‌باشد. این تجزیه که در واقع تعمیمی به ماتریس‌های مختلط از فرم مثلثاتی یک عدد مختلط می‌باشد، برای اولین بار توسط آتون در کار بنیادین [۱] معرفی گشت. اگر a یک اسکالر حقیقی باشد، آن‌گاه $a = \text{sign}(a)|a|$ که $\text{sign}(a) = \pm 1$ همان تابع علامت آشنا در حالت اسکالر است. تجزیه‌ی قطبی یک تعمیم از این تجزیه‌ی اسکالر به ماتریس‌های مختلط می‌باشد که در آن $\text{sign}(a)$ همان عامل U با ستون‌های ارتونورمال و $|a|$ ماتریس نیمه معین مثبت هرمیتی H خواهند بود.

برای آن‌که به‌صورت دقیق‌تر تعریف کنیم، فرض کنیم $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ یک ماتریس مختلط دلخواه باشد. آن‌گاه ماتریس $U \in \mathbb{C}^{m \times n}$ و ماتریس نیمه معین مثبت هرمیتی $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ چنان یافت می‌شوند که

$$A = UH, U^*U = I_r, \quad (۱،۱)$$

$$\text{rank}(U) = r = \text{rank}(A).$$

اگر $\text{rank}(A) = n$ آن‌گاه H معین مثبت است و U به‌طور منحصر به فردی یافت می‌شود.

فرض می‌کنیم که $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ دارای تجزیه مقدار منفرد زیر باشد:

$$A = P \begin{pmatrix} \Sigma \\ \cdot \end{pmatrix} Q^*, \quad (۲،۱)$$

که در آن $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ و $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ یکانی هستند و

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n), \quad \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0. \quad (۳،۱)$$

جالب آن است که U و H در صورتی منحصر به فرد هستند که $\text{Range}(U^*) = \text{Range}(H)$ برابر باشند. از این‌رو، یک فرد می‌تواند یک نتیجه‌ی از منبع [۳] را درباره‌ی منحصر به فرد بودن U و H به‌صورت زیر استفاده کند:

$$U = U_r V_r^*, H = U^*, \quad (۴،۱)$$

که در آن U_r یک ماتریس $m \times r$ است و از r اولین ستون P و V_r یک ماتریس $n \times r$ است که از r اولین ستون Q تشکیل می‌شوند. در این‌جا نکته آن است که اگر U محاسبه گردد آن‌گاه یک فرد به راحتی می‌تواند H را محاسبه کند.

اگر تمایل به محاسبه‌ی تجزیه‌ی قطبی داشته باشیم، این کار را می‌توانیم به وسیله‌ی یک روش تکراری نقطه‌ی ثابت به فرم زیر

$$U_{k+1} = \varphi(U_k), \quad (۵،۱)$$

انجام دهیم به شرط آن‌که ماتریس آغازین U مفروض باشد. یک روش مهم در این کلاس از روش‌های نقطه‌ی ثابت‌گون، روش معروف نیوتن است که برای اولین بار برای تجزیه قطبی در [۹] ارائه گشت:

$$U_{k+1} = \frac{1}{\gamma} (U_k + U_k^{-*}). \quad (۶،۱)$$

توجه کنید که در طی این تحقیق U_k^{-*} بیانگر $(U_k^{-1})^*$ است. علامت‌های مشابه نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند. در حقیقت، یک رابطه‌ی تنگاتنگ میان روش ماتریسی برای تجزیه قطبی و روش‌های تکراری ریشه‌یابی وجود دارد [۱۲]. این موضوع در بخش بعد بیان خواهد شد.

از طرف دیگر، علاقه اخیر در روش‌های ریشه‌یابی چند نقطه‌ای در سال‌های اخیر به علت توسعه‌ی سریع کامپیوترها، محاسبات پیشرفته و محاسبات سمبلی نمایان شده است. متعاقباً، این امر ساختن روش‌های مرتبه بالاتر را ممکن می‌سازد.

به عنوان مثالی دیگر، روش‌های [۷] با مرتبه‌ی همگرایی ۳ برای تجزیه قطبی به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$U_{k+1} = \left[U_k \left(3I + U_k^* U_k \right) \right] \times \left[I + 3U_k^* U_k \right]^{-1}. \quad (۷،۱)$$

این فرمول خاص دارای این سود است که قابل اجرا بر ماتریس‌های منفرد یا مستطیلی نیز می‌باشد. در واقع (۶) تنها بر روی ماتریس‌های مربعی نامنفرد قابل به‌کارگیری

که در آن I ماتریس همانی از بعد مناسب است. این امر رابطه‌ی میان تجزیه قطبی و تابع علامت ماتریسی را نیز بیان می‌کند (برای مثال مراجع [۱۰] و [۱۳] را ببینید). اکنون روش ریشه‌یابی مرتبه ۴ جدید زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u, & k = 0, 1, \dots, \\ y_k = u_k - \gamma^{-1} f'(u_k)^{-1} f(u_k), \\ z_k = u_k - f'(y_k)^{-1} f(u_k), \\ u_{k+1} = z_k - [(z_k - y_k)^{-1} \\ \times (f(z_k) - f(y_k))]^{-1} f(z_k) \end{cases} \quad (2.2)$$

که در مطالعه‌ی خطای زیر صدق می‌کند

$$\zeta_{k+1} = \left(\frac{c_{\gamma}^{\gamma}}{\gamma} - c_{\gamma} \frac{c_{\gamma}}{\lambda} \right) \zeta_k^{\gamma} + O(\zeta_k^{\delta}), \quad (3.2)$$

و در آن

$$C_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j! f'(\alpha)}$$

و $\zeta_k = u_k - \alpha$ در حالی که یک معادله‌ی غیرخطی اسکالر هموار را حل می‌کنیم. حل معادله $u^{\gamma} - 1 = 0$ با (۲،۲) منجر به روش تکرار ماتریس زیر می‌شود:

$$U_{k+1} = \left[U_k \left(\gamma I + Y_k \right) \left(I + \gamma Y_k \right) \right] \left[I + \gamma Y_k + \gamma^2 Z_k \right]^{-1}, \quad (4.2)$$

که در آن $U_k = A$ و $Z_k = Y_k Y_k, Y_k = U_k^* U_k$

توجه کنید که پیشرفت‌ها در سخت‌افزار و نرم‌افزار سرانجام غیر قابل چشم‌پوشی است زیرا روش مرتبه بالاتر تقریب‌های با دقت‌های بسیار بالا و آنالیز همگرایی پیچیده‌ی را شامل می‌شوند که تنها از طریق محاسبات سمبلی ممکن می‌باشند. متعاقباً در این تحقیق، ما از نرم‌افزار متمتیکا [۱۵] به کرات استفاده می‌کنیم.

اکنون یک روش تکرار ماتریسی نقطه‌ی ثابت‌گون برای یافتن تجزیه قطبی از طریق محاسبه‌ی ماتریس یکانی

است، حال آن‌که تجزیه قطبی حتی برای حالت‌های مستطیلی نیز برقرار است. برای رفع این مشکل، نویسنده [۴] رابطه‌ی زیر را پیشنهاد کرد:

$$U_{k+1} = \frac{1}{\gamma} (U_k + U_k^{\dagger*}), \quad (8.1)$$

که در آن U^{\dagger} بیان‌گر معکوس تعمیم‌یافته‌ی مور-پنروز است. برای به‌دست آوردن اطلاعات بیشتر در این باره، لطفاً به کارهای [۶]، [۸] و [۱۴] مراجعه شود.

ادامه‌ی این تحقیق مطالب را به‌صورت زیر باز خواهد کرد. بخش ۲، یک روش تکراری برای محاسبه‌ی عددی تجزیه‌ی قطبی در حالت مستطیلی عام را ارائه می‌کند و به سادگی آن را تعمیم خواهیم داد. در بخش ۳، به‌صورت تئوری ثابت می‌کنیم که این روش تحت چند شرط متداول به جواب واقعی همگراست. علاوه بر این، نشان می‌دهیم که روش دارای همگرایی مرتبه ۴ به ازای انتخاب ماتریس آغازین مناسب می‌باشد. پیچیدگی محاسباتی در بخش ۴ به‌صورت دقیق بحث خواهد شد. بخش ۵ به کاربرد روش ماتریسی پیشنهاد شده در حل چندین مثال اختصاص دارد. سرانجام، بخش ۶ یک نتیجه‌گیری از این کار را ارائه می‌کند.

۲- بیان مسأله

روش‌های عددی چند نقطه‌ای متعلق به کلاس کاراترین روش‌ها برای حل معادلات اسکالر غیر خطی می‌باشند. علاقه‌ی اخیر در تحقیق و توسعه این نوع روش‌ها از توانای آن‌ها در فائق آمدن بر جنبه‌های تئوری روش‌های تک نقطه‌ای درباره‌ی مرتبه‌ی همگرایی و شاخص کارایی می‌باشد، برای مثال مرجع [۲] و مراجع درون آن را ببینید.

رابطه‌ی میان روش‌های تکرار ماتریسی برای محاسبه‌ی تجزیه قطبی و روش‌های نقطه‌ی ثابت‌گون یک یا چند نقطه‌ای برای معادلات غیرخطی در ابتدا مشخص نیست. در واقع فرم ماتریسی روش‌های نقطه‌ی ثابت‌گون برای تجزیه قطبی حالت‌های توسعه‌یافته‌ی از به‌کارگیری روش‌های ریشه‌یابی برای معادله ماتریسی زیر می‌باشند:

$$U^{\gamma} = I, \quad (2.1)$$

$$d_i^{(k+1)} \left[d_i^{(k)} \left(\gamma + d_i^{(k)\top} \right) \left(1 + \gamma d_i^{(k)\top} \right) \right] \\ \left[1 + \gamma d_i^{(k)\top} + \gamma d_i^{(k)\top} \right]^{-1} \quad (۴،۳)$$

محاسبات ساده منجر به رابطه‌ی زیر می‌شود:

$$\frac{d_i^{(k+1)} - 1}{d_i^{(k+1)} + 1} = \frac{-1 + \gamma d_i^{(k)} - \gamma d_i^{(k)\top}}{1 + \gamma d_i^{(k)} + \gamma d_i^{(k)\top}} \\ + \frac{\gamma d_i^{(k)\top} - \gamma d_i^{(k)\top} + \gamma d_i^{(k)\top}}{1 + \gamma d_i^{(k)} + \gamma d_i^{(k)\top}} \quad (۵،۳)$$

چون σ_i مثبت است، (۵،۳) به ازای هر i برقرار می‌باشد.

بنابراین $1 \rightarrow \left| \frac{d_i^{(k+1)} - 1}{d_i^{(k+1)} + 1} \right| \rightarrow 0$ زمانی که $k \rightarrow \infty$ یعنی

$$D_k \rightarrow \begin{pmatrix} I_r & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (۶،۳)$$

که در آن صفرها ممکن است موجود نباشند. بنابراین زمانی که $k \rightarrow \infty$ ، $U_k \rightarrow U_r V_r^* = U$. این برهان را تمام می‌کند.

قضیه ۲،۳. گیریم $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ یک ماتریس دلخواه است. آن‌گاه روش جدید (۴،۲) دارای مرتبه‌ی چهار برای یافتن عامل قطبی یکانی U می‌باشد.

برهان. با به‌کارگیری قضیه ۱،۳، روش پیشنهادی (۲،۴) مقادیر منفرد U_k ها را به‌صورت زیر نگاشت می‌کند:

$$\sigma_i^{(k+1)} = \left[\sigma_i^{(k)} \left(\gamma + \left(\sigma_i^{(k)} \right)^\top \right) \right] \\ \left[1 + \gamma \left(\sigma_i^{(k)} \right)^\top \right] \left[1 + \gamma \left(\sigma_i^{(k)} \right)^\top \right]^{-1} + \\ \gamma \left(\sigma_i^{(k)} \right)^\top \right]^{-1}, \quad 1 \leq i \leq r \quad (۷،۳)$$

و بردارهای منفرد را ناوردا باقی می‌گذارد. از رابطه‌ی (۷،۳) آسان است که نشان دهیم همگرایی مقادیر منفرد

U داریم. ما بیان می‌کنیم که این روش دارای ویژگی‌های جذابی از قبیل قابلیت موازی‌سازی را دارا می‌باشد.

۳- آنالیز همگرایی

برای تقریب‌زدن سرعت همگرایی روش پیشنهادی (۴،۲) که در آن $Z_k = Y_k Y_k$ و $Y_k = U_k^* U_k$ ما از مفهوم q -مرتبه‌ی همگرایی استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱،۳. گیریم $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ یک ماتریس دلخواه باشد، آن‌گاه دنباله تکرارهای ماتریسی $\{U_k\}_{k=0}^\infty$ از (۴،۲) همگرا به U هستند زمانی که $U = A$ انتخاب می‌شود.

برهان. برای اثبات، از تجزیه مقدار میانگین به‌صورت $A = P \Sigma Q^*$ استفاده می‌کنیم که در آن

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_r & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad r = \text{rank}(A)$$

ممکن است موجود نباشد. تعریف می‌کنیم:

$$D_k = P^* U_k. \quad (۱،۳)$$

متعاقباً از (۴،۲) داریم

$$D_{k+1} = \Sigma \quad (۲،۳)$$

$$D_{k+1} = \left[D_k \left(\gamma I + D_k^\top \right) \left(I + \gamma D_k^\top \right) \right] \\ \left[I + \gamma D_k^\top + \gamma D_k^\top \right]^{-1}.$$

چون $D_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ قطری با درایه‌های صفر قطری مثبت است، با استقراء ثابت می‌شود که دنباله‌ی $\{D_k\}_{k=0}^\infty$ قابل تعریف است و داریم

$$D_k = \begin{pmatrix} \text{diag}(d_i^{(k)}) & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad d_i^{(k)} > 0 \quad (۳،۳)$$

که در آن صفرها ممکن است موجود نباشند. بنابراین (۲،۳) بیان‌گر r روش تکراری اسکالر غیر کوپل‌شده به‌صورت زیر است:

$$d_i^{(k+1)} = \sigma_i, \quad 1 \leq i \leq r$$

به سمت واحد مرتبه چهار است و یکنوا می‌باشد (به ازای $k \geq 1$):

$$\frac{\sigma_i^{(k+1)} - 1}{\sigma_i^{(k+1)} + 1} = \frac{(-1 + \sigma_i^{(k)})^4}{(1 + \sigma_i^{(k)})^4} \quad (۸.۳)$$

اکنون، داریم:

$$\left| \frac{\sigma_i^{(k+1)} - 1}{\sigma_i^{(k+1)} + 1} \right| \leq \left(\left| \frac{-1 + \sigma_i^{(k)}}{1 + \sigma_i^{(k)}} \right| \right)^4 \quad (۹.۳)$$

این مرتبه‌ی چهار همگرایی را برای روش جدید (۴.۲) نشان می‌دهد. برهان در اینجا به اتمام می‌رسد.

همگرایی درجه ۴ روش (۴.۲)، یک همگرایی سریع را در مراحل نهایی روش تکرار نشان می‌دهد. سرعت همگرایی می‌تواند در ابتدای پروسه کند باشد، بنابراین لازم است که ماتریس A را قبل از اجرای روش عددی اسکیل کنیم. این نوع تسریع ما را قادر می‌سازد تا سریع‌تر وارد فاز نهایی همگرایی شویم. در هر صورت این نگرش نیاز به محاسبه‌ی نرم ۲ در هر تکرار دارد که امری پرهزینه‌تر است.

برای آن که بیش‌تر بحث کنیم، در عمل محاسبه‌ی مقدار بهین تسریع زیر

$$\theta_{opt} = \sqrt{\sigma_1(U_k) \sigma_n(U_k)}, \quad (۱۰.۳)$$

در هر مرحله شدنی نیست. زیرا این امر نیاز به محاسبه‌ی مقادیر منفرد اکسترمال U_k در هر تکرار دارد، اما یک تقریب خوب برای θ_{opt} با هزینه‌ی ناچیز قابل محاسبه است.

از این‌رو، دو راه عملی جایگزین برای تولید پارامتر اسکیلینگ به‌صورت کار در هر گام ممکن است. یک راه بر اساس مرجع [۴] به‌صورت زیر است

$$\theta_k = \left(\frac{\|U_k^\dagger\|, \|U_k^\dagger\|_\infty}{\|U_k\|, \|U_k\|_\infty} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (۱۱.۳)$$

و راه جایگزین دیگر برای (۱۰.۳) در نرم فروبنیوس در [۵] و [۱۳] به‌صورت زیر پیشنهاد شد:

$$\theta_k = \left(\frac{\|U_k^\dagger\|_F}{\|U_k\|_F} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۱۲.۳)$$

پارامتر اسکیلینگ θ_k به گونه‌ای معرفی می‌شود که همگرایی آغازین سریع‌تر شود. در واقع، هر گام یا در بازه‌های منظم، محدوده‌ی مقادیر منفرد U_k ها تقریب زده می‌شود و سپس ماتریس U_k به $\theta_k U_k$ اسکیل می‌شود که مقادیر منفرد را بیشتر حول یک متمرکز کرده است. روش جدید بنابراین به فرم تسریع‌یافته‌ی زیر قابل ارائه است:

$$\begin{cases} k = 0, 1, \dots \\ T_k = [I + \gamma \theta_k^\gamma Y_k + \gamma^3 \theta_k^\gamma Z_k] \\ X_{k+1} = [\theta_k U_k (\gamma I + \theta_k^\gamma Y_k) (I + \gamma^3 \theta_k^\gamma Y_k)] T_k^{-1} \end{cases}$$

از روی روش (۴.۲) و به کارگیری یکبار روش تکرار نیوتن که در واقع در رابطه‌ی (۸.۱) می‌توان آن را مشاهده کرد، می‌توانیم یک روش تکراری جدید (که نوآوری این کار نیز محسوب می‌شود) را ارائه کرد.

بنابراین روش تکرار ماتریسی نقطه ثابت‌گون زیر را پیشنهاد می‌کنیم:

$$\begin{cases} L_k = [U_k (\gamma I + Y_k) (I + \gamma^3 Y_k)] N_k, \\ U_{k+1} = \frac{1}{\gamma} (L_k + L_k^*), \end{cases}$$

که در آن

$$N_k = [I + \gamma Y_k + \gamma^3 Z_k]^{-1}.$$

دقت کنید که همانند بالا بر اساس آنالیز مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های تکرار از یک گام به گام بعد می‌توان ثابت کرد که این روش جدید دارای مرتبه‌ی همگرایی ۸ است.

۴- کارایی محاسباتی

یک جنبه‌ی مهم از هر روش عددی، پیچیدگی محاسباتی آن است. یعنی، باید مطالعه و پاسخ داده شود که آیا پیچیدگی محاسباتی روش جدید مرقون به صرفه است یا خیر؟ زیرا، مهم‌ترین هدف توسیع‌دادن بحث‌های تئوری برای مسائل عملی و به‌دست آوردن زمان اجرای بهتر در حل مسائل می‌باشد.

در این بخش، ما به این سؤال پاسخ می‌دهیم و نشان می‌دهیم که روش (۴،۲) اقتصادی می‌باشد. در ابتدا، یک فرد ممکن است روش ماتریسی (۴،۲) را در مقابل (۶،۱) و (۷،۱) دست کم بگیرد، زیرا دارای ضرب‌های ماتریسی در ماتریس بیشتری نسبت به رقبا می‌باشد. دقیق‌تر صحبت کنیم، مهم‌ترین عوامل برای ارزیابی کارایی محاسباتی یک روش ماتریسی برای تجزیه قطبی، هزینه یافتن معکوس (مربعی مور-پنروز) و تعداد کل تکرارها است.

برای مقایسه کردن رفتار روش‌های ماتریسی متفاوت به منظور یافتن U ، ما تعریف شاخص کارایی مفروض به وسیله‌ی

$$EI = p\bar{e} \quad (1.4)$$

را فراخوانی می‌کنیم که در آن C و p بیان‌گر هزینه‌ی محاسباتی و مرتبه‌ی همگرایی می‌باشند. در اینجا به منظور داشتن یک مقایسه‌ی عادلانه و چون در هر گام معکوس یافتن و ضرب ماتریس در ماتریس داریم، رابطه‌ی شماره (۱،۴) را به‌صورت زیر تعمیم می‌دهیم:

$$CEI = \frac{1}{p^{s(m+c)}}, \quad (4.2)$$

تا قادر باشیم که همه‌ی عوامل درگیر در یک الگوریتم را به توی تعریف شاخص کارایی محاسباتی وارد کنیم. در (۲،۴) s ، m و c بیان‌گر تعداد تکرارهای لازم به‌وسیله‌ی یک روش برای همگرایی به U ، تعداد ضرب‌های ماتریس در ماتریس در هر گام و هزینه‌ی محاسبه‌شده ماتریس معکوس در هر گام می‌باشند.

از طرف دیگر به منظور داشتن مقایسه‌ی عادلانه، فرض می‌کنیم که هزینه‌ی یک ضرب ماتریس در ماتریس یک واحد و متعاقباً هزینه‌ی یافتن معکوس ماتریس دو واحد باشد. گرچه هزینه‌ی محاسبه‌ی معکوس ماتریس ممکن از ۲ برابر ضرب ماتریس در ماتریس بیشتر باشد، ما این تقریب را برای سادگی محاسبات در این‌جا در نظر می‌گیریم. هم‌چنین از هزینه‌ی جمع، تفریق و ... صرفه نظر می‌کنیم زیرا در مقابل هزینه‌ی یافتن معکوس و ضرب ماتریس در ماتریس، هزینه‌ی بسیار پایین‌تری دارند.

اکنون شاخص کارایی محاسباتی تقریبی برای روش‌های

مختلف عبارت است از $CEI_{\epsilon} \approx \frac{1}{2^{s_1(1+\epsilon)}}$

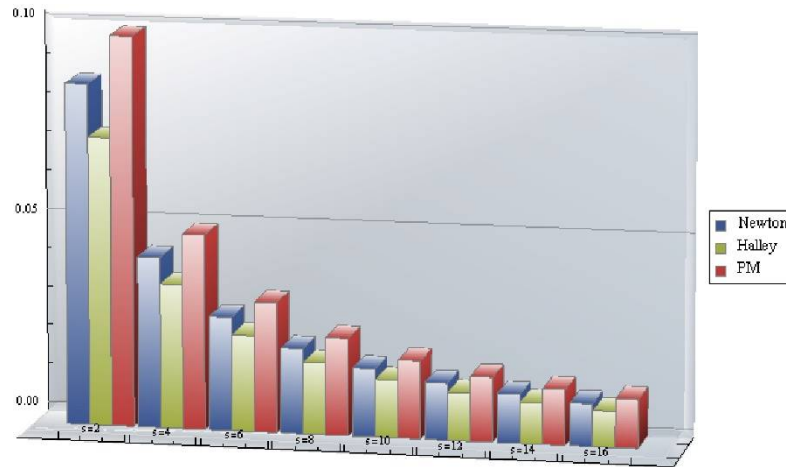
و $CEI_{\gamma} \approx \frac{1}{3^{s_2(2+\gamma)}}$ که در

آن s_1 ، s_2 و s_3 تعداد کل تکرارهای لازم در روش‌های (۶،۱)، (۷،۱) و (۴،۲) برای همگرا شدن می‌باشند.

سرانجام، در نظر می‌گیریم که $S_3 = S$ و بنابراین تعداد تکرارها برای (۶،۱) و (۷،۱) تقریباً برابر خواهد بود با $2S$ و $3S$ زیرا آنها دارای مرتبه‌ی همگرایی ۲ و ۳ هستند (در

مقابل مرتبه‌ی ۴ روش (۴،۲)). نتایج مقایسه اکنون در نمودار میله‌ای شکل ۱ نمایش داده می‌شود. در این شکل مشاهده می‌شود که هرگاه تعداد تکرارهای بیشتری لازم است (معمولاً برای ماتریس‌های با بعد بالا)، آن‌گاه روش جدید از لحاظ هزینه‌ی محاسباتی و زمان اجرا بهتر است، زیرا نیاز به محاسبه‌ی تعداد کمتری معکوس ماتریس دارد. برای مثال در شکل ۱، $S = 4$ یعنی تعداد کل تکرارهای لازم برای همگرایی روش (۴،۲) چهار می‌باشد و متعاقباً برای روش‌های (۶،۱) و (۷،۱) برابر با ۸ و ۶ تکرار خواهند بود. توجه کنید که در این‌جا لگاریتم شاخص کارایی محاسباتی را در شکل ۱ برای نشان دادن بیشتر تمایزها به تصویر کشیده‌ایم.

شکل ۱. مقایسه شاخص‌های کارایی برای یافتن عامل قطبی یکانی



$m=500; n=510;$

$A = \text{RandomReal}[\{0, 10\}, \{m, n\}];$

نتایج مقایسات در جدول ۱ و با به‌کارگیری تلورانس $\epsilon = 10^{-4}$ در نرم ∞ به نمایش قرار داده شده‌اند. به راحتی مشاهده می‌شود که تقلیل چشم‌گیری در تعداد تکرارها و زمان CPU برای یافتن تجزیه‌ی قطبی با به‌کارگیری PM وجود دارد [۱۶].

در این بخش زمان اجرا را به کمک دستور `AbsoluteTiming[]` در مثال‌ها، گزارش کرده‌ایم. مشخصات کامپیوتر عبارت هستند از: CPU 3.20HZ و Pentium (R) 4 و Windows XP Intel(R) با 4GB رم. از نتایج عددی افزایش در دقت تقریب‌های حاصل از روش پیشنهادی قابل مشاهده است.

مثال ۵، ۲. در این مثال، رفتار روش‌های مختلف را روی ماتریس مختلط 200×200 تصادفی زیر

`SeedRandom[123];`

$m = 200; n = 200;$

$A = \text{RandomComplex}[\{0, 5\}, \{m, n\}];$

را با استفاده از نگرش تسریع از طریق اسکیلینگ برای تمام روش در نظر گرفته‌شده مطالعه می‌کنیم. در این‌جا

این برتری روش پیشنهادی در بخش بعد با حل مثال‌های عددی بیشتر پشتیبانی می‌شود. مشاهده خواهیم کرد که روش عددی پیشنهادی زمان اجرای بهتری دارند (بدون در نظر گرفتن پارامتر تسریع‌کننده).

۵- مثال‌های عددی

روش (۴،۲) را که با PM نشان می‌دهیم، را در این‌جا به کمک نرم‌افزار متمتیکا^۸ در حساب ممیز شناور (۱۶ رقم اعشار) مورد آزمایش قرار می‌دهیم. جدای از این روش، چندین روش تکراری از قبیل (۶،۱) را که با Newton و (۷،۱) را که با Halley نشان می‌دهیم را مورد مقایسه قرار می‌دهیم.

شرط توقف در نظر گرفته‌شده در این کار عبارت است از:

$$\frac{\|U_{k+1} - U_k\|_*}{\|U_{k+1}\|_*} \leq \epsilon$$

که در آن ϵ تلورانس و $\|\cdot\|_*$ یک نرم ماتریسی مناسب است.

مثال ۵، ۱. در این مثال، رفتار روش‌های مختلف را روی ماتریس تصادفی مستطیلی 510×500 زیر مورد مقایسه قرار می‌دهیم:

`SeedRandom [12345];`

۶- نتایج

برای محاسبه‌ی یک تقریب از تجزیه قطبی $A = UH$ ، معمولاً عامل قطبی U تقریب زده می‌شود. روش تکرار ماتریسی پیشنهادی این مقاله بر اساس (۲،۲)، برای ریشه‌ی دوم ۱ به دست آمد و دنباله‌ی (۴،۲) به دست آمده به ازای $U = A$ همگرا بود.

در (۴،۲) ترکیب معکوس و مزدوج هرمیتی آن چنان استفاده شد تا در تجزیه‌ی مقدار منفرد، عوامل یکانی یکسان باقی بمانند و رابطه‌ی مورد نظر به (۷،۳) در حالت مقادیر منفرد ساده شود.

در این کار یک روش مرتبه ۴ موجود رار بررسی کردیم و به راحتی یک روش مرتبه ۸ را بر روی آن توسعه دادیم.

تلورانس $\epsilon = 10^{-11}$ در نرم بینهایت در نظر گرفته شده است. نتایج مقایسات را در جدول ۲ گزارش می‌کنیم. باید توجه شود که ما در این جا از ساده‌ترین نرم ماتریسی یعنی l_{∞} استفاده کرده‌ایم. واضحاً به کارگیری نرم‌های ماتریسی دیگر از قبیل l_p که برای حالت ماتریس‌های مختلط لازم است هزینه اجرای هر گام از روش‌های تکرار ماتریس را افزایش می‌دهند و واضحاً روش‌های مرتبه بالاتر از قبیل (۲،۴) که تعداد گام‌های کمتری را برای همگرایی لازم دارند، بیشتر مورد نیاز خواهند بود.

جدول ۱: نتایج مقایسات مثال (۱،۵)

Methods →	Newton	Halley	PM
IT	۱۵	۱۰	۸
$\frac{\ U_{k+1} - U_k\ _{\infty}}{\ U_{k+1}\ _{\infty}}$	2.63623×10^{-7}	1.93768×10^{-8}	5.29683×10^{-11}
Time	۸,۵۶۲۵۰۰۰	۷,۹۵۳۱۲۵۰	۷,۷۰۳۱۲۵۰

جدول ۲: نتایج مقایسات مثال (۲،۵)

Methods →	Newton(Accelerated)	Halley(Accelerated)	PM(Accelerated)
IT	۱۰	۸	۶
$\frac{\ U_{k+1} - U_k\ _{\infty}}{\ U_{k+1}\ _{\infty}}$	1.12444×10^{-15}	6.42657×10^{-15}	7.28183×10^{-15}
Time	۲.۰۹۳۷۵۰۰	۳.۳۴۳۷۵۰۰	۲.۹۰۶۲۵۰۰

- [11] N.J. Higham, D.S. Mackey, N. Mackey, F. Tisseur, Computing the polar decomposition and the matrix sign decomposition in matrix groups, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 25 (2004), 1178-1192.
- [12] N.J. Higham, *Functions of Matrices: Theory and Computation*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2008.
- [13] C. Kenney, A.J. Laub, On scaling Newton's method for polar decomposition and the matrix sign function, *SIAM J. Matrix Appl.*, 13 (1992), 688-706.
- [14] B. Laszkiewicz, K. Ziętak, Approximation of matrices and a family of Gander methods for polar decomposition, *BIT Numerical Mathematics*, 46 (2006), 345-366.
- [15] M. Trott, *The Mathematica Guide-Book for Numerics*, Springer, New York, NY, USA, 2006.
- [1] L. Autonne, Sur les groupes lineaires, reels et orthogonaux, *Bull. Sot. Math. France*, 30 (1902), 121-134.
- [2] D.K.R. Babajee, A. Cordero, F. Soleymani, J.R. Torregrosa, On improved three-step schemes with high efficiency index and their dynamics, *Numer. Algor.*, 65 (2014), 153-169.
- [3] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville, *Generalized Inverses Theory and Applications*, Second ed., SpringerVerlag, New York, 2003.
- [4] K. Du, The iterative methods for computing the polar decomposition of rank-deficient matrix, *Appl. Math. Comput.* 162 (2005), 95-102.
- [5] A.A. Dubrulle, Frobenius iteration for the matrix polar decomposition, *Hewlett-Packard Company*, 1994.
- [6] A. A. Dubrulle, An optimum iteration for the matrix polar decomposition, *Elect. Trans. Numer. Anal.*, 8 (1999), 21-25.
- [7] W. Gander, On Halley's iteration method, *Amer. Math. Monthly*, 92 (1985), 131-134.
- [8] W. Gander, Algorithms for the polar decomposition, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 11 (1990), 1102-1115.
- [9] N.J. Higham, Computing the polar decomposition-with applications, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7 (1986), 1160-1174.
- [10] N.J. Higham, The matrix sign decomposition and its relation to the polar decomposition, *Lin. Alg. Appl.*, 212/213 (1994), 3-20.

