دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال سوم، شماره دوازدهم، زمستان ۱۳۹۶
شماره شاپا: ۰۱۶۹-۱۶۸۲

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

برخی خواص و عدد احاطه‌گر متمم یک گراف جدید وابسته به یک حلقه جابجایی

جعفر امجدی [*]

گروه ریاضی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۰۴/۰۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۱۲/۱۶

چکیده

در این مقاله، برخی خواص متمم گراف جدید وابسته به حلقه‌ی جابجایی R ، مورد بررسی قرار می گیرد. این گراف جدید که با نماد Ω_{R}^{*} نمایش داده شده، گرافی است غیر جهت دار که مجموعه رأس‌های آن، ایده‌آل‌های غیربدیهی R بوده و دو رأس متمایز I و J از آن مجاورند هرگاه $J\mathrm{Ann}_R(I)=(\circ)$ یا $I\mathrm{Ann}_R(J)=(\circ)$. در ادامه ضمن بررسی برخی خواص متمم گراف Ω_{R}^{*}، شرایط لازم و کافی برای عدم وجود رئوس منفرد درحلقه‌های کاهشی بررسی و حلقه‌هایی مشخص می‌شود که به ازای آنها این گراف، $\overline{\Omega_{\mathrm{R}}^{*}}$، مسطح است.

واژه‌های کلیدی: ایده‌آل پوچ شونده، ایده‌آل $\mathrm{N}-$ اول ماکسیمال $(\circ)$، گراف مسطح، عدد احاطه‌ای.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: j-amjadi@azaruniv.edu

۱- مقدمه

نظریه حلقه‌ها شاخه‌ای از جبر است که به بررسی خواص آنها به عنوان یک ساختار مهم جبری می‌پردازد.
از طرفی مطالعه ساختارهای جبری با تکیه بر خواص گراف‌ها، یکی از موضوعات تحقیقاتی مورد علاقه محققین در چند دهه اخیر است که منجر به اثبات نتایج بسیار جالب و همچنین طرح مسائل قابل ملاحظه‌ای گشته است[7,12]. مقالات بسیاری به چاپ رسیده‌اند که در آنها گرافی خاص را به یک ساختار جبری مانند گروه یا حلقه نسبت داده و به کمک خواص آن گراف، نتایج با ارزشی در مورد ویژگی‌های جبری آن ساختار بدست آورده‌اند[1, 2, 25, 26, 28]. هدف از معرفی این گراف‌ها، بکارگیری مفاهیم ترکیباتی برای درک بهتر بحث مجرد حلقه‌ها است. این ایده ارتباطی بین نظریه گراف و نظریه حلقه برقرار می‌سازد که نتایجی برای این دو شاخه از ریاضیات به بار می‌آورد.
اولین بار در سال ۱۹۸۸ بک[1] مفهوم گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه جابجایی را معرفی نمود[13]. وی تمام عناصر حلقه را به عنوان رئوس گراف در نظر گرفت که در آن دو رأس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر $xy=0$. هدف اصلی او یافتن شرایط لازم و کافی برای متناهی بودن عدد رنگی گراف مذکور بوده است. اندرسون[2] و نصیر[3] با ادامه مطالعه بر روی عدد رنگی این گراف، با ارائه مثالی نشان دادند [6]، حدس وی در خصوص برابری اعداد خوشه‌ای و رنگ آمیزی درست نبوده و آن را برای حلقه‌های نوتری منظم با تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال به اثبات رساندند. اندرسون و لیوینگستون[4] گرافی را تعریف کردند [8] که مجموعه رأس‌های آن، مجموعه مقسوم علیه‌های غیر صفر حلقه R بوده و دو رأس متمایز x و y از آن مجاورند اگر و تنها اگر $xy=0$. این گراف را گراف مقسوم علیه صفر نامیده و آن را با نماد $\Gamma(R)$ نمایش دادند. ضمنا، ایشان ویژگی‌های مقسوم علیه‌های صفر حلقه و خواص جبری آنها را با استفاده از نظریه گراف‌ها مورد بررسی قرار دادند.
وجود رابطه بسیار نزدیک ساختارهای جبری یک حلقه با رفتار و خواص ایده‌آل‌ها نسبت به اعضای آن، موجب تعریف و معرفی گراف‌هایی بامجموعه رئوس ایده‌آل‌های حلقه شده است. بهبودی و راکعی با تعمیم مجموعه رئوس گراف $\Gamma(R)$، به مجموعه ایده آل‌های واقعی و غیر بدیهی R، گراف جدیدی تعریف کردند، که در آن دو رأس I و J مجاورند اگر و فقط اگر $I.J=(\circ)$ [14,15]. در ادامه‌ی تحقیق در باره گراف‌های وابسته به حلقه‌ها، گراف‌های مختلفی تعریف و معرفی شده‌اند که هرکدام از منظری متفاوت به بررسی ساختارهای جبری حلقه‌ها و خواص گراف‌ها پرداخته‌اند [3, 5, 9, 10, 16, 17].
در مقاله حاضر، متمم گراف جدید معرفی شده در [4] مورد مطالعه قرار گرفته و برخی خواص آن بویژه شرایط لازم برای همبندی و مسطح بودن آن بررسی و در نهایت کرانهایی برای عدد احاطه‌ای آن بدست می‌آید.

۲- تعاریف و مفاهیم اولیه

در این قسمت برخی تعاریف و مفاهیم اولیه و همچنین نتایجی از جبر جابجایی را که در بخشهای بعدی مورد استفاده واقع می‌شوند، بیان می‌گردد. در این مقاله، R حلقه‌ای جابجایی و یکدار است که حوزه صحیح نیست.
$\mathrm{zd}(R)$ مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر حلقه‌ی R است. فرض کنید X عضوی از R یا یک زیر مجموعه‌ای از R باشد، پوچساز X بصورت $\{r\in R \mid rX=(\circ)\}$ تعریف و با نماد $\mathrm{Ann}_R(X)$ نمایش داده می‌شود. توجه شود که $\mathrm{Ann}_R(X)$ یک ایده‌آل حلقه R است. ایده آل I از حلقه Rرا یک ایده‌آل پوچ شونده گویند هرگاه $\mathrm{Ann}_R(I)\neq(\circ)$. مجموعه ایده‌آل‌های غیرصفر پوچ شونده Rرا با نماد $\mathrm{A}^*(R)$ نشان می‌دهند.
فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف ساده با مجموعه رأسی $V=V(G)$ و مجموعه یالی $E=E(G)$ باشد. دو رأس v و u از $V(G)$ را مجاور گویند هرگاه v و uدو انتهای یک یال از Gباشند. برای هر رأس v از $V(G)$، تعداد اعضای مجموعه

1-Beck
2-Anderson
3-Naseer
4-Livingston

$\{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ را با $\deg_G(v)$ نمایش داده و آن را درجه‌ی رأس v نامند. نمادهای P_n, C_n و K_n به ترتیب برای نمایش مسیر، دور و گراف کامل n رأسی بکار برده می‌شوند. گراف G را یک گراف دوبخشی گویند در صورتی که بتوان رأس‌های آن را به دو زیر مجموعه‌ی ناتهی Uو W افراز کرد به طوری که هر یال G دارای یک نقطه انتهایی در U و یک نقطه انتهایی در W باشد. مجموعه‌های Uو W را بخشهای گراف G می‌گویند. یک گراف دو بخشی را دوبخشی کامل گویند در صورتی که هر رأس از یک بخش با تمام رأس های بخش دیگر مجاور باشد. یک گراف دو بخشی کامل را که اندازه‌ی بخش‌های آن m و n باشد با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهند. متمم گراف G که با نماد $\overline{G}$ نمایش داده می‌شود، گرافی است که مجموعه رأس‌های آن، همان مجموعه رأس‌های گراف G بوده و دو رأس v و u در $\overline{G}$ مجاورند اگر و فقط در G مجاور نباشند. گراف مسطح گرافی است که بتوان آن را در یک صفحه طوری رسم نمود که یال‌هایش همدیگر را فقط در رأس‌ها قطع کنند. گرافی که بدین ترتیب در صفحه رسم گردد یک گراف مسطح شده در صفحه نامیده می‌شود. شرط لازم و کافی برای مسطح بودن یک گراف توسط کوراتووسکی[1] (۱۹۳۰) بیان شده است. وی نشان داد که ([23] صفحه ۱۵۳) گراف G مسطح است اگر و فقط اگر شامل هیچ زیر تقسیمی از گراف‌های K_5 یا $K_{3,3}$ نباشد.

تعریف ۱،۲. زیرمجموعه‌ی D از $V(G)$ را یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای G گویند هرگاه هر رأس از $V(G)-D$ با رأسی از D مجاور باشد. عدد احاطه‌گر، $\gamma(G)$، کمترین اندازه‌ی مجموعه‌های احاطه‌گر G است.

بدلیل کاربردهای مفهوم احاطه‌گری، این موضوع مورد توجه محققین مختلف قرار گرفته و مقالات زیادی در این زمینه چاپ شده است. بخش‌هایی از این تحقیقات در مرجع [۱۹] گردآوری شده است.

تعریف ۲،۲. ایده‌آل اول P از حلقه‌ی R را یک ایده‌آل اول وابسته‌ی R گویند هرگاه به ازای عنصر غیر صفر x از R، $P = \mathrm{Ann}_R(x)$.

نمادهای $\mathrm{Max}(R)$، $\mathrm{Ass}(R)$ و $\mathrm{Min}(R)$ به ترتیب برای نمایش مجموعه ایده‌آل‌های ماکسیمال، ایده‌آل‌های اول وابسته و ایده‌آل‌های اول مینیمال بکار می‌روند.

تعریف ۳،۲. ایده‌آل اول P از حلقه‌ی R را یک ایده‌آل N- اول ماکسیمال (0) گویند هرگاه $P \subseteq zd(R)$ و P نسبت به رابطه شمول ماکسیمال باشد [20].

قضیه ۴،۲. فرض کنید x عضو دلخواهی از $\mathrm{zd}(R)$ باشد، در اینصورت ایده‌آل N- اول ماکسیمال (0) مانند P وجود دارد که $x \in P$.

برهان: مراجعه شود به [22] قضیه ۱.

نتیجه ۵،۲. اگر $\{P_\alpha\}_{\alpha\in A}$ مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های N- اول ماکسیمال (0) در حلقه R باشد، آنگاه $\mathrm{zd}(R) = \bigcup_{\alpha\in A} P_\alpha$. همچنین R دارای ایده‌آل N- اول ماکسیمال (0)منحصر بفرد است اگر و فقط اگر $\mathrm{zd}(R)$ ایده‌آلی از R باشد.

نمادهای $\mathrm{nil}(R)$، $\mathrm{J}(R)$ و $\dim(R)$ بترتیب برای نمایش مجموعه عناصر پوچتوان، اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال و بُعد کرول R بکار برده می‌شود. حلقه‌ی R را کاهشی گویند هرگاه $\mathrm{nil}(R) = (0)$.

تعریف ۶،۲. حلقه‌ی R را یک حلقه‌ی منظم ون- نئومن[2] گویند هرگاه به ازای هر xاز R، عضوی چون y از Rموجود باشد بطوریکه $x = x^2y$.

گزاره ۷،۲. R یک حلقه‌ی منظم ون- نئومن است اگر و فقط اگر R کاهشی بوده و $\dim(R) = 0$.

1-Kuratowski
2-Von-Neumann regular

برهان: مراجعه شود به [18]، تمرین (d)۱۶ صفحه۱۱۱.

تعریف ۲،۸. حلقه‌ی R را یک حلقه ایده‌آل اصلی خاص گویند هرگاه هر ایده‌آل آن اصلی بوده و R فقط یک ایده‌آل اول داشته باشد. به اختصار حلقه ایده‌آل اصلی خاص را با نماد SPIR نمایش می‌دهند.

۳- برخی خواص $\overline{\Omega}_R^*$

علیلو و همکاران [۴]، یک گراف غیرجهت دار و ساده به یک حلقه جابجایی و یکدار R، $\overline{\Omega}_R^*$، نسبت داده‌اند که مجموعه رئوس آن، ایده‌آل‌های غیربدیهی R است و دو رأس متمایز I و J از آن مجاورند هرگاه $I\mathrm{Ann}_R(J)=(\circ)$ یا $J\mathrm{Ann}_R(I)=(\circ)$.
در این بخش، ارتباط بین تعداد ایده‌آل‌های N- اول ماکسیمال $(\circ)$ در حلقه R و عدم وجود رأس منفرد در گراف $\overline{\Omega}_R^*$ بررسی می گردد.

تذکر۳،۱. فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آل غیربدیهی از آن باشد. اگر $\mathrm{Ann}_R I=(\circ)$ آنگاه I یک رأس منفرد در $\overline{\Omega}_R^*$ است.

تذکر ۳،۲. اگر حلقه‌ی R دارای حداقل دو ایده‌آل غیربدیهی بوده و $\overline{\Omega}_R^*$ داری رأس منفرد نباشد، آنگاه به ازای هر ایده‌آل غیربدیهی I از R داریم:
$\mathrm{Ann}_R(I)\neq(\circ)$.

گزاره ۳،۳. فرض کنید R یک کاهشی و دارای حداقل دو ایده‌آل غیربدیهی است. در این صورت گزاره های زیر معادلند:
الف) $\overline{\Omega}_R^*$ فاقد رأس منفرد است.
ب) هر ایده‌آل غیربدیهی R دارای پوچساز غیرصفر است.
برهان. اگر $\overline{\Omega}_R^*$ فاقد رأس منفرد باشد آنگاه از تذکر ۳،۲ نتیجه می‌شود که هر ایده‌آل غیربدیهی R دارای پوچساز غیرصفر است. بالعکس فرض کنید I یک رأس منفرد از $\overline{\Omega}_R^*$ باشد. طبق فرض داریم $\mathrm{Ann}_R(I)\neq(\circ)$. در نتیجه عضوی مانند a از $R-(\circ)$ وجود دارد بطوریکه $aI=(\circ)$. حال فرض کنید $J=(a)$. چون I یک رأس منفرد است، نتیجه می شود $\mathrm{Ann}_R(I)\subseteq\mathrm{Ann}_R(J)$ یا $\mathrm{Ann}_R(J)\subseteq\mathrm{Ann}_R(I)$. فرض کنید $\mathrm{Ann}_R(I)\subseteq\mathrm{Ann}_R(J)$. با توجه به اینکه $I.J=(\circ)$ نتیجه می‌شود $J\subseteq\mathrm{Ann}_R(I)$ و این ایجاب می‌کند که $J^2=(\circ)$. چون R کاهشی است پس $J=(\circ)$ که یک تناقض است. حال اگر $\mathrm{Ann}_R(J)\subseteq\mathrm{Ann}_R(I)$ آنگاه به طریق مشابه یک تناقض حاصل می‌شود. از این‌رو $\overline{\Omega}_R^*$ دارای رأس منفرد نیست.

لم۳،۴. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهشی و $P_1,P_2,\ldots,P_n$ همه ایده‌آل‌های N- اول ماکسیمال $(\circ)$ باشند که در آن $n\geq ۲$. اگر $\overline{\Omega}_R^*$ دارای رأس منفرد نباشد آنگاه $\bigcap_{i=1}^n P_i=(\circ)$.
برهان. فرض کنید $\overline{\Omega}_R^*$ دارای رأس منفرد نباشد. بنابر تذکر ۳،۲ هر ایده‌آل غیربدیهی R دارای پوچساز غیرصفر است. پس به ازای هر $i\in[n]$، a_iای در $R-\{\circ\}$ موجود است بطوریکه $P_ia_i=(\circ)$. ادعا می‌شود به ازای هر دو عضو متمایز i و j از $[n]$، $a_ia_j=\circ$.
فرض کنید چنین نباشد و i و j دو عضو متمایز از $[n]$ باشندکه $a_ia_j\neq\circ$. چون $P_i\subseteq\mathrm{Ann}_R(a_i)$ و $P_j\subseteq\mathrm{Ann}_R(a_j)$ و P_i و P_j هر دو ایده‌آل N – اول ماکسیمال $(\circ)$ هستند نتیجه می‌شود که $P_i=\mathrm{Ann}_R(a_i)$ و $P_j=\mathrm{Ann}_R(a_j)$. چون R حلقه‌ی کاهشی است پس $a_i,a_j\notin P_i\cup P_j$. بسادگی دیده می‌شود که $\mathrm{Ann}_R(a_j)=\mathrm{Ann}_R(a_ia_j)=\mathrm{Ann}_R(a_i)$ از اینرو $P_i=P_j$ که یک تناقض است. بنابراین به ازای هر دو عضو متمایز i وj از $[n]$ $a_ia_j=\circ$. از اینکه $a_i\in P_i$، نتیجه می‌شود $a_i\in\bigcap_{j\in[n]-\{i\}}P_j$. چون $\mathrm{zd}(R)=\bigcup_{i=1}^n P_i$ لذا $\sum_{i=1}^n a_i\notin\mathrm{zd}(R)$. حال اگر x عضو دلخواهی از $\bigcap_{i=1}^n P_i$ باشد، آنگاه

$x(\sum_{i=1}^{n} a_i)=\circ$، بنابراین $x=\circ$ و این برهان را تمام می‌کند.

تذکر ۵،۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهشی و P تنها ایده‌آل N− اول ماکسیمال (۰) باشد. در اینصورت $\mathrm{Ann}_R(P)=(\circ)$ و بویژه P یک رأس منفرد $\overline{\Omega}_{\mathrm{R}}^{*}$ است.

برهان: فرض کنید $r\in \mathrm{Ann}_R(P)$. چون $\mathrm{zd}(R)=P$ نتیجه می شود $r.P=(\circ)$ و چون R کاهشی است خواهیم داشت $r=\circ$. بنابراین $\mathrm{Ann}_R(P)=(\circ)$. بنابر تذکر ۳،۲، P یک رأس منفرد $\overline{\Omega}_{R}^{*}$ است.

لم ۶،۳. فرض کنید $\overline{\Omega}_{\mathrm{R}}^{*}$ دارای رأس منفرد نباشد. در اینصورت هر ایده‌آل N− اول ماکسیمال (۰) یک ایده‌آل ماکسیمال است.

برهان. فرض کنید P یک ایده‌آل N- اول ماکسیمال (۰) باشد. در این صورت ایده‌آل ماکسیمالی مانند M موجود است بطوریکه $P\subseteq M$. بنابر تذکر ۳،۲ داریم $\mathrm{Ann}_R(M)\neq(\circ)$. پس $M\subseteq \mathrm{zd}(R)$ از تعریف ایده‌آل N- اول ماکسیمال (۰) نتیجه میشود $P=M$.

قضیه۷،۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهشی با تعداد متناهی ایده‌آل N- اول ماکسیمال (۰) باشد. در اینصورت گزاره‌های زیر معادلند:

الف) $\overline{\Omega}_{\mathrm{R}}^{*}$ فاقد رأس منفرد است.

ب) $R=F_1\times\cdots\times F_n$ که در آن $n\geq ۲$ و برای هر $i\in[n]$، F_i یک میدان است.

برهان. (الف)$\Leftarrow$(ب) فرض کنید $\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}$ مجموعه همه ایده‌آل‌های N- اول ماکسیمال (۰) باشد. بنابر لم ۴،۳، $\bigcap_{i=1}^{n}P_i=(\circ)$ و بنابر لم ۶،۳ هر P_i یک ایده‌آل ماکسیمال است. پس بنابر قضیه باقیمانده‌ی چینی ([11] گزاره ۱ .11) $R\cong R/P_1\times\cdots\times R/P_n$ که در آن برای هر $i\in[n]$، R/P_i یک میدان است.

(ب)$\Leftarrow$(الف) چون $R=F_1\times\cdots\times F_n$. پس هر ایده‌آل غیربدیهی از R دارای پوچساز غیرصفر است. حال حکم از گزاره ۳،۳، نتیجه می‌شود.

گزاره ۸،۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی غیرکاهشی وP تنها ایده‌آلN- اول ماکسیمال (۰) باشد. در اینصورت گزاره‌های زیر معادلند:

الف) $\overline{\Omega}_{\mathrm{R}}^{*}$ همبند است.

ب) (R,P) یک حلقه SRIP است و $P^2=(\circ)$.

برهان. (الف)$\Leftarrow$(ب) ثابت می‌شود R دارای ایده‌آل غیربدیهی غیر از P نیست. فرض کنید I یک ایده‌آل غیربدیهی متمایز از P در R باشد. چون $\overline{\Omega}_{\mathrm{R}}^{*}$ همبند است پس رأسی مانند J متمایز از P موجود است که با P مجاور است. از سوی دیگر بنابر تذکر ۳،۲ $\mathrm{Ann}_R(J)\neq(\circ)$و در نتیجه $J\subseteq \mathrm{zd}(R)=P$. از اینرو $\mathrm{Ann}_R(P)\subseteq \mathrm{Ann}_R(J)$، که یک تناقض است. بنابر این P تنها ایده‌آل غیربدیهی R است. چون R غیرکاهشی است پس عنصر غیرصفر x از R موجود است بطوریکه $x^2=\circ$، در نتیجه (x) یک ایده‌آل غیربدیهی R است. پس $P=(x)$ و $P^2=(\circ)$.

(ب)$\Leftarrow$(الف) بوضوح P تنها ایده‌آل غیربدیهی R است و در نتیجه حکم برقرار است.

تذکر ۹،۳. فرض کنید I و J دو ایده‌آل غیربدیهی با پوچسازهای غیرصفر از حلقه R باشند. اگر $\mathrm{Ann}_R(I+J)=(\circ)$ آنگاه دو رأسI و J در $\overline{\Omega}_{\mathrm{R}}^{*}$ مجاورند.

لم ۱۰،۳. فرض کنید $R=R_1\times R_2\times\cdots\times R_n$ که در آن $n\geq ۲$، و به ازای هر i از $[n]$، (R_i,M_i) حلقه‌ی شبه موضعی بوده و هر ایده‌آل غیربدیهی R_i دارای پوچساز غیرصفر است. در اینصورت $\overline{\Omega}_{\mathrm{R}}^{*}$ دارای رأس منفرد نیست.

برهان. فرض کنید $I=I_1\times I_2\times\cdots\times I_n$ یک ایده‌آل غیربدیهی از R باشد. دو حالت زیر در نظر گرفته می‌شود.

حالت اول: فرض کنید $I\subseteq \mathrm{J}(R)$.

چون $\mathrm{J}(R)=M_1\times M_2\times\cdots\times M_n$، پس برای هر i از

$[n]$، $I_i \subseteq M_i$. چون I ایده‌آل غیرصفر است، لذا به ازای $i_\circ$ای از $[n]$، $I_{i_\circ} \neq (\circ)$. از این رو $\mathrm{Ann}_{R_{i_\circ}}(I_{i_\circ})$ یک ایده‌آل غیربدیهی از $R_{i_\circ}$است. اگر ازای هرj از $[n]-\{i_\circ\}$، $I_j=(\circ)$آنگاه با فرض $J=(\circ)\times\cdots\times(\circ)\times R_j\times(\circ)\times\cdots\times(\circ)$ به وضوح دیده می‌شود که $\mathrm{Ann}_R(I)\not\subset \mathrm{Ann}_R(J)$ و $\mathrm{Ann}_R(J)\not\subset \mathrm{Ann}_R(I)$. بنابراین I و J در $\overline{\Omega}_R^*$ مجاورند. حال فرض کنید به ازای t ای از $[n]-\{i_\circ\}$، $I_t\neq(\circ)$ قرار دهید $J=(\circ)\times\cdots\times(\circ)\times R_{i_\circ}\times(\circ)\times\cdots\times(\circ)$. به آسانی دیده می‌شود که $\mathrm{Ann}_R(J)\not\subset \mathrm{Ann}_R(I)$ و $\mathrm{Ann}_R(I)\not\subset \mathrm{Ann}_R(J)$. در نتیجه I و J در $\overline{\Omega}_R^*$ مجاورند. پس I یک رأس منفرد نیست.

حالت دوم: $I\not\subset J(R)$. در اینصورت ایده‌آل ماکسیمالی مانند M در R وجود دارد بطوریکه $I\not\subset M$. لذا $I+M=R$ و این ایجاب می‌کند که $\mathrm{Ann}_R(I+M)=(\circ)$. چون هر دو ایده‌آل I و M از R دارای پوچساز غیرصفر هستند، بنابر تذکر ۳،۹ دو ایده‌آل I و M در $\overline{\Omega}_R^*$ مجاورند.

قضیه ۱۱،۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی غیر کاهشی و $P_n,\ldots,P_2,P_1$ همه ایده‌آلهای N- اول ماکسیمال $(\circ)$ باشند که در آن $n\geq ۲$. فرض کنید $\bigcap_{i=1}^n P_i$ پوچتوان است. در اینصورت گزاره‌های زیر معادلند:

الف) $\overline{\Omega}_R^*$ فاقد رأس منفرد است.

ب) هر ایده‌آل غیربدیهی R دارای پوچساز غیرصفر است و $\mathrm{Max}(R)=\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}$.

برهان. (الف)$\Rightarrow$(ب): بنابر تذکر ۳،۲ هر ایده‌آل غیربدیهی R دارای پوچساز غیرصفر است وبنابر لم ۶،۳، $\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}\subseteq \mathrm{Max}(R)$. حال فرض کنید M یک ایده‌آل ماکسیمال دلخواه R باشد. چون $\mathrm{Ann}_R(M)\neq(\circ)$. لذا $M\subseteq \mathrm{zd}(R)=\bigcup_{i=1}^n P_i$. در نتیجه بنابر قضیه اجتناب از ایده‌آلهای اول ([11] گزاره ۱۱. ۱) به ازای i ای از $[n]$، $M\subseteq P_i$. بنابراین $M=P_i$.پس $\mathrm{Max}(R)\subseteq\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}$ و این برهان را تمام می‌کند.

(ب)$\Rightarrow$(الف): فرض کنید به ازای هر $a_i\in \mathrm{Ann}_R(P_i)-\{\circ\}, i\in[n]$، در این صورت $a_iP_i=(\circ)$ و لذا $\mathrm{Ann}_R(a_i)\neq(\circ)$. چون $P_i\subseteq \mathrm{Ann}_R(a_i)$ نتیجه می‌شود که $\mathrm{Ann}_R(a_i)=P_i$. چون $\mathrm{J}(R)=\bigcap_{i=1}^n P_i$ و R کاهشی نیست بنابر این به ازای kای از $\mathbb{N}$، $\mathrm{J}(R)^k=(\circ)$. همچنین به آسانی معلوم می‌شود که به ازای هر دو عضو متمایز i و j از $[n]$، $P_i^k+P_j^k=R$. از اینرو $\bigcap_{i=1}^n P_i^k=\Pi_{i=1}^n P_i^k=(\circ)$. پس بنابر قضیه باقیمانده چینی $R\cong R/P_1^k\times\cdots\times R/P_n^k$ که در آن برای هر $R/P_i^k, i\in[n]$ یک حلقه‌ی موضعی با ایده‌آل ماکسیمال P_i/P_i^k است. حال حکم از لم ۱۰،۳. حاصل می‌شود.

نتیجه ۱۲،۳. فرض کنید R یک حلقه غیرکاهشی آرتینی غیرموضعی باشد. در اینصورت $\overline{\Omega}_R^*$ دارای رأس منفرد نیست.

برهان. بنابر گزاره ۳. ۸ از [11]، R دارای تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال مانند $M_n,\ldots,M_2,M_1$ است که در آن $n\geq ۲$. چون R آرتینی است پس $\mathrm{Max}(R)=\mathrm{Ass}(R)$. در نتیجه برای هر $i\in[n]$, عضو x_iای در R موجود است بطوریکه $M_i=\mathrm{Ann}_R(x_i)$.

بنابراین $M_n,\ldots,M_2,M_1$ همه‌ی ایده‌آلهای N- اول ماکسیمال $(\circ)$ هستند. از سوی دیگر، چون $\mathrm{J}(R)=\bigcap_{i=1}^n M_i=\mathrm{nil}(R)$ پس kای در $\mathbb{N}$ موجود است بطوریکه $k\geq ۲$ و $\mathrm{J}(R)^k=(\circ)$. در نتیجه بنابر قضیه ۳،۱۱ (ب$\Leftarrow$الف) حکم برقرار است.

تذکر ۱۳،۳. اگر R یک حلقه‌ی غیرکاهشی آرتینی موضعی با ایده‌آل ماکسیمال M باشد، آنگاه $\overline{\Omega}_R^*$ همبند است اگر و فقط اگر R یک حلقه SPIR بوده و $M^2=(\circ)$.

برهان: حکم بسادگی از گزاره ۳،۸ نتیجه می‌شود.

۴- مسطح بودن $\bar{\Omega}_R^*$

در این بخش با توجه به خواص حلقه‌ی R، شرایط لازم و کافی برای مسطح بودن $\bar{\Omega}_R^*$ بررسی می‌گردد. ابتدا لم زیر برای حلقه‌های تجزیه پذیر به حداقل چهار حلقه، بیان می‌شود.

لم ۴،۱. فرض کنید $R=R_1\times R_2\times\cdots\times R_n$، ۴ $\geq n$ و برای هرi از $[n]$، R_i حلقه‌ی جابجایی و یکدار است. در این صورت $\bar{\Omega}_R^*$ مسطح نیست.

برهان. اگر $n\geq ۵$،آنگاه زیرگراف القایی توسط مجموعه رئوس

$$\{R_1\times(0)\times R_3\times R_4\times R_5, R_1\times(0)\times R_3\times(0)\times R_5, R_1\times(0)\times R_3\times R_4\times R_5, (0)\times R_2\times(0)\times(0)\times(0), R_1\times R_2\times(0)\times R_4\times R_5, (0)\times R_2\times R_3\times R_4\times R_5\}$$

شامل $K_{3,3}$ با بخش‌های

$$\{R_1\times(0)\times R_3\times R_4\times R_5, R_1\times(0)\times R_3\times(0)\times R_5, R_1\times(0)\times R_3\times R_4\times R_5\}$$

و

$$\{(0)\times R_2\times(0)\times(0)\times(0), R_1\times R_2\times(0)\times R_4\times R_5, (0)\times R_2\times R_3\times R_4\times R_5\}$$

است. لذا بنابر گزاره ۱. ۲ .۶ ([29] صفحه ۲۴۶)، $\bar{\Omega}_R^*$ مسطح نیست.

حال فرض کنید n=۴. در این صورت زیر گراف القایی توسط مجموعه رئوس

$$\{R_1\times R_2\times(0)\times(0), R_1\times(0)\times R_3\times(0), (0)\times R_2\times R_3\times(0), (0)\times R_2\times(0)\times R_4, (0)\times(0)\times R_3\times R_4\}$$

K_5است. در نتیجه بنابرگزاره ۱. ۲. ۶ ([29] صفحه ۲۴۶) $\bar{\Omega}_R^*$ مسطح نیست.

لم ۲،۴. فرض کنید $R=F_1\times F_2\times\cdots\times F_n$، $n\geq ۲$ و برای هر $F_i, i\in[n]$ میدان است. در این صورت $\bar{\Omega}_R^*$ مسطح است اگر و فقط اگر $m=۲$ یا $m=۳$.

برهان. اگر$m=۲$ یا $m=۳$،آنگاه $\bar{\Omega}_R^*\approx K_2$ یا $\bar{\Omega}_R^*\cong\bar{C}_6$ که هر دو گراف مسطح هستند.
بعکس اگر $\bar{\Omega}_R^*$ مسطح باشد، آنگاه بنابر لم ۱،۴. $۲\leq m\leq ۳$ و حکم برقرار است.

تبصره ۳،۴. فرض کنید R یک حلقه و H زیرگراف القایی از $\bar{\Omega}_R^*$ توسط مجموعه رئوس $A^*(R)$ باشد. چون رأس‌هایی که پوچساز آنها صفر است رئوس منفرد هستند، پس $\bar{\Omega}_R^*$ از اتحاد زیرگراف H و رأس‌های منفرد تشکیل شده است. لذا $\bar{\Omega}_R^*$ مسطح است اگر و فقط اگر H مسطح باشد. در نتیجه بدون اینکه خللی به کلیت مسئله وارد شود، برای یافتن شرطهای لازم و کافی برای مسطح بودن $\bar{\Omega}_R^*$، فرض کنید هر ایده‌آل غیربدیهی R دارای پوچساز غیرصفر است.

قضیه ۴،۴. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهشی با حداقل دو ایده‌آل N- اول ماکسیمال (0) باشد. اگر R دارای تعداد متناهی ایده‌آل N- اول ماکسیمال (0) باشد. آنگاه $\bar{\Omega}_R^*$ مسطح است اگر و فقط اگر $R=F_1\times F_2$ یا $R=F_1\times F_2\times F_3$ که در آن F_iها میدان هستند.

برهان. فرض کنید $\bar{\Omega}_R^*$ مسطح باشد. بنابر تبصره ۴،۳ بدون اینکه خللی به کلیت مسئله وارد شود فرض می‌شود که پوچساز هر ایده‌آل غیربدیهی R، غیرصفر است. فرض کنید $\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}$ مجموعه همه ایده‌آل‌های N- اول ماکسیمال (0) باشد. چون R کاهشی است پس بنابر گزاره ۳،۳، $\bar{\Omega}_R^*$ فاقد رأس منفرد است و بنابر لم ۶،۳ هر ایده‌آل N- اول ماکسیمال (0) یک ایده‌آل ماکسیمال R می باشد. لذا به ازای هر i و j که $1\leq i,j\leq n$و $i\neq j$ داریم: $P_i+P_j=R$ و $\bigcap_{i=1}^n P_i=(0)$. بنابر قضیه باقیمانده چینی، $R\cong R/P_1\times\cdots\times R/P_n$ که در آن برای هر i از

$[n]$، R/P_i یک میدان است. چون $\bar{\Omega}_R^*$ مسطح است از لم ۴،۲. نتیجه می‌شود که $۲ \le n \le ۳$ و برهان تمام است.

برعکس: بنابرلم ۲،۴. حکم برقرار است.

قضیه ۵،۴. فرض کنید Rیک حلقه‌ی منظم ون‌– نئومن باشد. در اینصورت $\bar{\Omega}_R^*$ مسطح است اگر و فقط اگر $\bar{\Omega}_R^* = K_2 \cup \bar{C}_6$.

برهان. فرض کنید $\bar{\Omega}_R^*$ یک گراف مسطح باشد. با توجه به تبصره۴،۳ بدون اینکه خللی به کلیت مسئله وارد شود، فرض کنید $\bar{\Omega}_R^*$ فاقد رأس منفرد باشد. بنابر تذکر ۳،۲، هر ایده‌آل غیربدیهی R دارای پوچساز غیرصفر است. فرض کنید P یک ایده‌آل اول R باشد. در اینصورت $\mathrm{Ann}_R(P) \neq (\circ)$ و لذا عضوی چون $x \in R-\{\circ\}$ موجود است بطوریکه $P \subseteq \mathrm{Ann}_R(x)$. از طرف دیگر بنابر ملاحظه صفحه ۵ [21] داریم $\dim(R) = \circ$. پس P یک ایده‌آل ماکسیمال R است. در نتیجه $P = \mathrm{Ann}_R(x)$. همچنین از اینکه R حلقه منظم ون– نئومن است می‌توان نوشت x=u.e که در آن u یکال و e عضو خود توان R است. بسادگی دیده می‌شود که $P = <1-e>$. در نتیجه P یک ایده‌آل متناهی مولد از R است. پس بنابر قضیه کوهن ([27] قضیه ۱۲. ۸)، R نوتری است. از اینرو $\mathrm{Ass}(R) = \mathrm{Max}(R)$ و $|\mathrm{Max}(R)| < \infty$. بنابر تمرین ۲۲ صفحه ۱۱۲ [۱۸]، $R = F_1 \times \cdots \times F_n$ که در آن $n = |\mathrm{Max}(R)|$, و بنابرلم ۲،۴. خواهیم داشت $۲ \le n \le ۳$. در نتیجه $\bar{\Omega}_R^* = K_2 \cup \bar{C}_6$.

بر عکس قضیه واضح است.

۵- عدد احاطه‌ای $\bar{\Omega}_R^*$

در این قسمت، ضمن بررسی عدد احاطه‌ای متمم گراف $\bar{\Omega}_R^*$، نشان داده می‌شود که در حلقه‌های نوتری کاهش یافته، این عدد حداکثر چهار و حداقل دو است.

لم ۵،۱. فرض کنید $R = R_1 \times R_2$ که در آن حداقل یکی از R_iها میدان نبوده و $\bar{\Omega}_R^*$ دارای رأس منفرد نیست. در اینصورت $\gamma(\bar{\Omega}_R^*) = ۲$.

برهان. ابتدا نشان داده می‌شود که $\{R_1 \times (\circ), (\circ) \times R_2\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $\bar{\Omega}_R^*$ است. فرض کنید $I \times J$ یک ایده‌آل غیربدیهی از R بوده و $I \times J \notin \{R_1 \times (\circ), (\circ) \times R_2\}$. این ایده‌آل می‌تواند به صورت یکی از حالت‌های زیر باشد:

حالت اول: I و J بترتیب ایده‌آل‌های غیربدیهی از R_1 و R_2 هستند.

چون $\bar{\Omega}_R^*$ فاقد رأس منفرد است پس $\mathrm{Ann}_R(I \times J) \neq (\circ)$. در نتیجه $\mathrm{Ann}_{R_1}(I) \neq (\circ)$ یا $\mathrm{Ann}_{R_2}(J) \neq (\circ)$. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید $\mathrm{Ann}_{R_1}(I) \neq (\circ)$. در اینصورت:

$\mathrm{Ann}_R(I \times J) \not\subset \mathrm{Ann}(R_1 \times (\circ)) = (\circ) \times R_2$ و

$\mathrm{Ann}_R(R_1 \times (\circ)) \not\subset \mathrm{Ann}_R(I \times J)$.

در نتیجه $I \times J$ با رأس $R_1 \times (\circ)$ مجاور است. حال اگر $\mathrm{Ann}_{R_2}(J) \neq (\circ)$، آنگاه به طریق مشابه ثابت می‌شود که $I \times J$ با رأس $(\circ) \times R_2$ مجاور است.

حالت دوم: $I = R_1$ و J یک ایده آل غیربدیهی از R_2 است. بسادگی ثابت می‌شود که $I \times J$ با رأس $(\circ) \times R_2$مجاور است. همچنین اگر $J = R_2$ و I یک ایده‌آل غیربدیهی R_1 باشد، آنگاه $I \times J$ با رأس $R_1 \times (\circ)$ مجاور است.

حالت سوم: $J = (\circ)$ و I یک ایده‌آل غیربدیهی R_1 است.

در اینصورت $I \times J$ با رأس $(\circ) \times R_2$ مجاور است و اگر $I = (\circ)$ و J ایده‌آل غیربدیهی R_2 باشد، آنگاه $I \times J$ با رأس $R_1 \times (\circ)$ مجاور است. در نتیجه $\{R_1 \times (\circ), (\circ) \times R_2\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $\bar{\Omega}_R^*$ است. پس $\gamma(\bar{\Omega}_R^*) \le ۲$. حال نشان داده می‌شود $\gamma(\bar{\Omega}_R^*) = ۲$. فرض کنید چنین نباشد، پس

$\gamma(\overline{\Omega}^*_R) =$ ۱. در اینصورت رأسی مانند $I\times J$ از $\overline{\Omega}^*_R$ موجود است که با هر رأس $\overline{\Omega}^*_R$ مجاور است. لذا $I\times J$ در Ω^*_R یک رأس منفرد است که در تناقض با قضیه ۴ از [۴] می‌باشد. بنابراین $\gamma(\overline{\Omega}^*_R) =$ ۲.

نتیجه ۲،۵. اگر R یک حلقه آرتینی غیرموضعی باشد. آنگاه $\gamma(\overline{\Omega}^*_R) =$ ۲.

نتیجه ۳،۵. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهشی بوده و دارای تعداد متناهی ایده‌آل N- اول ماکسیمال (۰) است. اگر $\overline{\Omega}^*_R$ دارای رأس منفرد نباشد. آنگاه $\gamma(\overline{\Omega}^*_R) \le$ ۲.

برهان. بنابر قضیه ۳،۷ (الف ⇐ ب) $R = F_1\times\cdots\times F_n$ که در آن $n \ge$ ۲ و برای هر i از $[n]$، F_i یک میدان است در نتیجه بنابرلم ۱،۵. $\gamma(\overline{\Omega}^*_R) \le$ ۲.

نتیجه ۴،۵. فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهشی و نوتری بوده و $\overline{\Omega}^*_R$ دارای رأس منفرد نباشد. در اینصورت $\gamma(\overline{\Omega}^*_R) \le$ ۲.

برهان. چون R نوتری است پس R دارای تعداد متناهی ایده‌آل اول وابسته $P_1, P_2, \ldots, P_n$ است. لذا $\mathrm{zd}(R) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$. حال فرض کنید P یک ایده‌آل N- اول ماکسیمال (۰) باشد. چون $P \subseteq \mathrm{zd}(R)$، از قضیه اجتناب از ایده‌آل‌های اول نتیجه می‌شود که به ازای $i\in[n]$، $P \subseteq P_i$. از اینرو $P = P_i$. بنابراین هر ایده‌آل N- اول ماکسیمال (۰) یک ایده‌آل اول وابسته‌ی R است پس R دارای تعداد متناهی ایده‌آل N- اول ماکسیمال (۰) است. لذا بنابر نتیجه ۳،۵، $\gamma(\overline{\Omega}_R) \le$ ۲.

تذکر ۵،۵. فرض کنید I یک ایده‌آل متناهی مولد و S یک زیر مجموعه بسته ضربی از حلقه R باشد بطوریکه $S\cap \mathrm{zd}(R) = \varphi$.

در اینصورت $\mathrm{Ann}_R(I) \neq (0)$ اگر و فقط اگر $\mathrm{Ann}_{S^{-1}R}(S^{-1}I) \neq (0)$.

برهان. چون I یک ایده‌آل متناهی مولد از R است پس $\mathrm{Ann}_{S^{-1}R}(S^{-1}I) \cong S^{-1}(\mathrm{Ann}_R(I))$. از طرف دیگر چون $S\cap \mathrm{zd}(R) = \varphi$ لذا $J = (0)$ اگر و فقط اگر $S^{-1}J = (0)$ و این هم حکم را نتیجه می‌دهد.

قضیه ۶،۵. فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری و S یک زیرمجموعه بسته ضربی از آن باشد بطوریکه $S\cap \mathrm{zd}(R) = \varphi$. اگر $\overline{\Omega}^*_R$ دارای رأس منفرد نباشد آنگاه

$\gamma(\overline{\Omega^*_{S^{-1}R}}) \le \gamma(\overline{\Omega}^*_R) \le 2\gamma(\overline{\Omega^*_{S^{-1}R}})$.

برهان. فرض کنید E یک $\gamma(\overline{\Omega}^*_R)$- مجموعه، $D = \{\, S^{-1}I \mid I\in E \,\}$ و J یک رأس دلخواه از $V(\overline{\Omega^*_{S^{-1}R}}) - D$ باشد. در این صورت ایده‌آلی مانند I از R موجود است بطوریکه $J = S^{-1}I$، $I\notin E$ و $\mathrm{Ann}_R(I) \neq (0)$. درنتیجه بنابر تذکر۵،۵ داریم: $\mathrm{Ann}_{S^{-1}R}(S^{-1}I) \neq (0)$. از طرف دیگر چون E یک مجموعه احاطه‌گر برای $\overline{\Omega}^*_R$ است پس I با رأسی از E مانند J مجاور است. در نتیجه

$\mathrm{Ann}_R(J) \not\subset \mathrm{Ann}_R(I)$ و

$\mathrm{Ann}_R(I) \not\subset \mathrm{Ann}_R(J)$.

از این رو $\mathrm{Ann}_{S^{-1}R}(S^{-1}I) \not\subset \mathrm{Ann}_{S^{-1}R}(S^{-1}J)$ و $\mathrm{Ann}_{S^{-1}R}(S^{-1}J) \not\subset \mathrm{Ann}_{S^{-1}R}(S^{-1}I)$.

چون $J\in E$ پس $S^{-1}J \in D$. بنابراین D یک مجموعه احاطه‌گر برای $\overline{\Omega^*_{S^{-1}R}}$ است. در نتیجه $\gamma(\overline{\Omega^*_{S^{-1}R}}) \le \gamma(\overline{\Omega^*_R})$.

حال فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر برای $\overline{\Omega^*_{S^{-1}R}}$ باشد. فرض کنید E مجموعه ایده‌آل هایی چون I از R باشد که $S^{-1}I\in D$ و همچنین شامل فقط یکی از همسایگی‌های رأس I از $\overline{\Omega^*_R}$ بوده و $|E|$ کمترین مقدار ممکن باشد (توجه شود که هرگاه $S^{-1}I = S^{-1}J$، آنگاه I و J دارای همسایگی‌های یکسان در $\overline{\Omega^*_R}$ هستند). به وضوح E یک مجموعه

احاطه‌گر برای $\overline{\Omega_{\mathrm{R}}^{*}}$ است و $|E| \leq ۲|D|$. بنابراین $\gamma(\overline{\Omega_R^*}) \leq 2\gamma(\overline{\Omega_{s^{-1}R}^*})$ و این برهان را کامل می‌کند.

نتیجه ۷،۵. فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری با حداقل دو ایده‌آل اول مینیمال بوده و $\overline{\Omega_R^*}$ فاقد رأس منفرد باشد. در اینصورت $\gamma(\overline{\Omega_R^*}) \leq ۴$.

برهان. چون R نوتری است پس دارای تعداد متناهی ایده‌آل اول مینیمال است. فرض کنید $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ مجموعه همه‌ی ایده‌آل های اول مینیمالR باشد. در اینصورت بنابرگزاره ۱. ۱[24] $\mathrm{zd}(R) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$. فرض کنید $S = R - \mathrm{zd}(R)$. از گزاره ۱. ۵ [24] نتیجه می‌شود $S^{-1}R \cong R_{P_1} \times R_{P_2} \times .... \times R_{P_n}$. که در آن $۲ \leq n$ و برای هر $1 \leq i \leq n$، R_{P_i} یک میدان است. حال بنابر لم ۱،۵. و قضیه ۵،۶، $\gamma(\overline{\Omega_R^*}) \leq ۴$.

۶- نتیجه گیری و ارائه پیشنهادات

در این مقاله متمم گراف Ω_R^* مورد مطالعه قرار گرفته و در حلقه های جابجایی، شرایط لازم و کافی برای عدم وجود رأس منفرد با استفاده از ایده‌آل‌های N- اول ماکسیمال (٥) بیان و همچنین مسطح بودن و عدد احاطه‌ای گراف $\overline{\Omega_R^*}$ بررسی شده است. بنابراین با توجه به مطالب ارائه شده ایده‌آلهای N-اول ماکسیمال (٥) می‌توانند نقش اساسی در بررسی خواص اینگونه گراف‌ها و پارامترهای وابسته به آنها داشته باشند. در انتها پیشنهادات زیر را میتوان مطرح کرد.

۱- بررسی پارامترهای دیگر گراف‌ها از قبیل عدد استقلال و عدد احاطه‌ای تام.

۲- یافتن حلقه‌هایی مانند R، که به ازای آنها $\mathrm{genus}(\overline{\Omega_R^*})$ و $\mathrm{crosscap}(\overline{\Omega_R^*})$ متناهی بوده وتعیین کران‌های قابل حصول برای آنها.

فهرست منابع

[1] M. Afkhami and, K. Khashyarmanesh, Some results on the annihilator graph of a commutative ring, Czechoslovak Mat. J. **67** (2017), 151-169.

[2] M. Afkhami, N. Hoseini and K. Khashyarmanesh, The annihilator ideal graph of a commutative ring, Note Math. **36** (2017),1-10.

[3] S. Akbari, A. Alilou, J. Amjadi and S.M. Sheikholeslami, The co-annihilating ideal graphs of commutative rings, Canad. Math. Bull. **60** (2017), 3-11.

[4] A. Alilou, J. Amjadi and S.M. Sheikholeslami, A new graph associated to a commutative ring, Discrete Math. Algorithm. Appl. **8** (2016), (13 pages).

[5] A. Alilou and J. Amjadi, The sum-annihilating essential ideal graph of a commutative ring, Commun. Comb. Optim. **1** (2016), 117-135.

[6] D. D. Anderson, and M. Naseer, Beck's coloring of a commutative ring, J. Algebra **159** (1993), 500-514.

[7] D.F. Anderson and A. Badawi, The zero-divisor graph of a commutative semigroup: A survey, Groups, Modules, and Model Theory-surveys and Developments (2017), 23-99.

[8] D.F. Anderson and P. S. Livingston, The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring, J. Algebra **217** (1999), 434-447.

[9] H.Ansari-Toroghy, F. Farshadifar and F. Mahboobi-Abkenar, On the ideal-based zero-divisor graph, IEJA (to appear).

[10] H.Ansari-Toroghy, F. Farshadifar and F. Mahboobi-Abkenar, The small intersection graph relative to multiplication modules, Journal of Algebra and Related Topics **4** (2016), 21-32.

[11] M. F. Atiyah, I.G. Macdonald, Introduction to Commutative Algebra, Addison-wesley publishing company (1969).

[12] A. Badawi, Recent results on the annihilator graph of a commutative ring: A survey, Nearrings, Nearfields and Related Topics, Publisher: World Scientific (2016).

[13] I. Beck, Coloring of a commutative ring, J. Algebra **116** (1988), 208-226.

[14] M. Behboodi and Z. Rakeei, The Annihilating-ideal graph of commutative ring I, J. Algebra Appl. **10** (2011), 727-739.

[15] M. Behboodi and Z. Rakeei, The Annihilating-ideal graph of commutative ring II, J. Algebra Appl. **10** (2011), 741-753.

[16] S. Ebrahimi Atani, S. Dolati Pish Hesari and M. Khoramdel, A graph associated to proper non-small ideals of a commutative ring, Comment. Math. Univ. Carolin **58** (2017), 1-12.

[17] Z. Ebrahimi Sarvandi and S. Ebrahimi Atani, The total graph of acommutative smiring with respect to proper ideals, J. Algebra and relative topics **3** (2015), 27-41.

[18] R.Gilmer, Multiplicative Ideal

Theory, Marcel-Dekker, New York, (1972).

[19] T.W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P.J. Slater, Fundamentals of Domination in Graphs, Marcel Dekker, Inc, New York (1998).

[20] W. Heinzer and J. Ohm, On the Noetherian-like rings of E. G. Evans, Proc. Amer. Math. Soc. **34** (1972), 73-74.

[21] J.A. Huckaba, Commutative rings with zero divisors, Marcel Dekker, Inc, New York (1988).

[22] I. Kaplansky, Commutative rings, The University of Chicago Press, Chicago (1974).

[23] K. Kuratowski, Sur le Problèm des courbes gauches en topologie, Fund. Mat. **15** (1930), 271-283.

[24] E. Matlis, The minimal prime spectrum of reduced ring, Illions J. Math. **27** (1983), 353-391.

[25] R. Nikandish, M. J. Nikmehr and M. Bakhtyari, Coloring of the annihilator graph of a commutative ring, J. Algebra Appl. **15** (206), (13 pages).

[26] R. Nikandish, M. J. Nikmehr and M. Bakhtyari, Some fiuther results on the annihilator ideal graph of a commutative ring, U.P.B.Sci. Bull., Series A **79** (2017), 99-108.

[27] R.Y. Sharp, Steps in Commutative Algebra (second edition), London Mathematics Society Students Texts, 51 Cambridge University Press, Cambridge, (1990).

[28] S. Visweswaran and Hiren D. Patel, A graph associated with the set of all nonzero annihilating ideals of a commutative ring, Discrete Math. Algorithm. Appl. **6** (2014) [22 pages].

[29] D.B. West, Introduction to Graph Theory (second edition), Prentice Hall, USA