

تعیین بازده به مقیاس‌های چپ و راست و امتداد پایداری بازده به مقیاس با استفاده از مدل‌های برنامه‌ریزی خطی براساس تغییرات هم‌زمان شعاعی ورودی‌ها و خروجی‌ها

مصطفی امید^۱، محسن رستمی مالخلیفه^{۱*}، علی پایان^۲، فرهاد حسین زاده لطفی^۱

^(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

^(۲) گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد زاهدان، زاهدان، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۱۰/۰۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۲/۱۸

چکیده

تعیین نوع بازده به مقیاس (RTS) و شناسایی ناحیه‌ای که در آن نوع بازده به مقیاس یک واحد تصمیم‌گیرنده (DMU) پایدار باقی بماند؛ به مدیران کمک می‌کند که پیش‌بینی‌های دقیق‌تری در رابطه با تغییراتی که بر سر راه تغییر سایز یک DMU قرار می‌گیرد، داشته باشند. این مقاله تلاش می‌کند که به معرفی و تعیین امتداد پایداری RTS واحدهای تصمیم‌گیرنده تحت تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، بپردازد. با توجه به اهمیت RTS در رابطه با تصمیم‌گیری‌های مدیریتی، روش‌های مختلف و متنوعی از سوی محققین DEA جهت معرفی و تعیین نوع آن ارائه شده است. پژوهش‌ها در ارزیابی RTS، منجر به دسته بندی کلی‌تر و عمومی‌تری از انواع RTS، با عناوین «RTS چپ (L-RTS)» و «RTS راست (R-RTS)» شده است. وجه مشترک بسیاری از روش‌های ارزیابی L-RTS و R-RTS این است که مدل‌های بکار رفته در این روش‌ها پارامتریک هستند و لذا آنها را بایستی جزء روش‌های غیرخطی دسته‌بندی کرد. به منظور مقابله با این ضعف، مقاله پیشرو به ارائه روشی برای ارزیابی L-RTS و R-RTS می‌پردازد که مدل‌های این روش پیشنهادی خطی بوده و در مورد آنها مشکل پارامتری بودن، وجود ندارد. علاوه بر این مدل‌های روش پیشنهادی از این مزیت برخوردارند که با انجام تغییرات جزئی روی آنها و با تقسیم بندی مرز مجموعه امکان تولید، توانسته‌ایم در این مقاله از آنها بعنوان ابزاری برای ارزیابی امتداد پایداری RTS واحدهای تصمیم‌گیرنده استفاده کنیم.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، بازده به مقیاس چپ (L-RTS)، بازده به مقیاس راست (R-RTS)، بازده به مقیاس کلی (O-RTS)، پایداری.

۱. مقدمه

اولین بار چارنز و همکاران (۱۹۷۸) برای ارزیابی عملکرد مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMUS)، از یک روش غیرپارامتری به نام تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) استفاده کردند. مدل پیشنهاد شده توسط آنها به مدل CCR معروف شد. بنکر و همکاران (۱۹۸۴) با ارائه یک ساختار اصل موضوعی، نشان دادند که مدل CCR ارائه شده توسط چارنز و همکاران (۱۹۷۸)، به ارزیابی عملکرد DMUها در یک مجموعه‌ی امکان تولید (PPS) می‌پردازد که در آن پیش فرض «بازده به مقیاس (RTS ثابت)» پذیرفته شده است. بنکر و همکاران (۱۹۸۴) پیش فرض «RTS ثابت» را از PPS ای که مدل CCR ارزیابی عملکردش را در آن انجام می‌داد، کنار گذاشتند. آنها PPS حاصل را PPS ای با «RTS متغیر» نامیدند و مدل دیگری تحت عنوان مدل BCC را برای ارزیابی عملکرد DMUها در این PPS جدید ارائه کردند. این موضوع که تعیین نوع RTS هر DMU یکی از مباحث مهم در تحلیل کارایی است؛ و نیز اهمیت مفهوم RTS در اقتصاد و مدیریت، بنکر (۱۹۸۴) را بر آن داشت که برای اولین بار به تحلیل تئوریک RTS تحت DEA بپردازد. او با ارائه یک ساختار تئوریک و با استفاده از مدل پوششی CCR روشی را برای معرفی و شناسایی RTS مطرح کرد. تحقیقات او خیلی زود مورد توجه محققین DEA و پژوهشگران علم اقتصاد و مدیریت قرار گرفت. بعد از آن، روش‌های بسیاری برای شناسایی RTS از سوی کاوشگران ارائه شد که از آن جمله می‌توان به روش‌های بنکر و ترال (۱۹۹۲)، فار و گرسکوف (۱۹۹۴)، بنکر و همکاران (۱۹۹۶)، تن (۲۰۰۴)، ژو و شن (۱۹۹۵)، سیفورد و ژو (۱۹۹۹) و خدابخشی و همکاران (۲۰۱۰) اشاره کرد. به موازات و در تکمیل این پژوهش‌ها، مفاهیم دیگری به نام RTS چپ (L-RTS) و RTS راست (R-RTS) (اولین بار توسط گلانی و یو (۱۹۹۷) مطرح شدند. آنها طبقه بندی «ثابت، افزایشی و کاهشی» را برای L-RTS (و به همین ترتیب برای R-RTS) بیان کردند. از آنجائیکه مطالعه L-RTS و R-RTS حاوی اطلاعات دقیق‌تر و کامل‌تری نسبت به مطالعه O-RTS است؛ هدجی کاستاس و سوتریو (۲۰۰۶) مبانی تئوریکی را برای

معرفی و شناسایی L-RTS و R-RTS پایه‌ریزی کرده‌اند. در ادامه و به دنبال این تحقیقات، اسلامی و خوئینی (۱۸)، الهیار و رستمی (۲)، و امیدی و همکاران (۲۰۱۷) بترتیب با کمک گرفتن از دسته‌های خاصی از مدل‌های مضربی و پوششی DEA، به ارزیابی L-RTS و R-RTS پرداختند. روش گلانی و یو (۱۹۹۷) سعی کرده است به کمک مدل‌های خاصی از فرم‌های پوششی DEA، نوع L-RTS و R-RTS واحدها را تعیین کند اما این مدل‌ها در مواردی با مشکل نشدنی بودن روبرو هستند. این در حالی است که مدل‌های ارائه شده در روش‌های اسلامی و خوئینی (۲۰۱۳)، الهیار و رستمی (۲۰۱۴) و امیدی و همکاران (۲۰۱۷) همواره شدنی هستند و ضعف نشدنی بودن مدل‌های روش گلانی و یو را ندارند. با وجود این در تمامی این روش‌های ارزیابی L-RTS و R-RTS یک ضعف مشترک وجود دارد و آن پارامتریک بودن مدل‌های بکار رفته در این روش‌هاست. مشخص نبودن محدوده پارامتر بکار رفته در مدل‌های این روش‌ها، کاربران را در استفاده از آنها دچار مشکلات جدی می‌کند. از اینرو برطرف کردن این مشکل یکی از دغدغه‌های اصلی نویسندگان این مقاله است. بدین منظور در این متن، ما روشی را برای شناسایی L-RTS و R-RTS پیشنهاد می‌کنیم که مدل‌های این روش غیر پارامتریک هستند. علاوه بر این در این مقاله سعی شده است که با ایجاد تغییراتی در مدل‌های آمده در این روش و با کلاس‌بندی مرز مجموعه امکان تولید، تمهیداتی فراهم شود که با استفاده از آن بتوان به معرفی و تعیین امتداد پایداری انواع O-RTS واحدهای کارایی قوی پرداخته شود؛ که این موضوع اخیر، در گستره‌ی تحقیقات قبلی مغفول مانده است.

مابقی ساختار این متن به شرح زیر است: در بخش دوم بطور مختصر، برخی از مدل‌های مقدماتی تحلیل پوششی داده‌ها و یکی از روش‌های ارزیابی L-RTS، R-RTS و O-RTS به همراه مفاهیم مرتبط تشریح شده‌اند و به مشکل اصلی مدل‌های این روش و دیگر روش‌های آمده در تاریخچه موضوع، اشاره شده است. برای برطرف کردن آن مشکل، در بخش سوم روش جایگزینی با الهام از برخی از روش‌های قبلی، در قالبی تئوریک پیشنهاد

برای ارزیابی عملکرد واحدها ارائه شده است.

مدل (۱)

$$\begin{aligned} & \max 1.s^- + 1.s^+ \\ & s.t. \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + s^- = x_k \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j - s^+ = y_k \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & (\lambda, s^-, s^+) \geq 0 \end{aligned}$$

با اینکه مدل (۱) قادر به محاسبه کارایی واحدها نیست؛ اما به راحتی می‌توان با استفاده از تعریف (۱) زیر، این مدل را برای تفکیک واحدهای کارا و ناکارا از یکدیگر بکار گرفت.

تعریف ۱. فرض کنید $DMU_k \in T_v$ در اینصورت:

۱- DMU_k در T_v کارای قوی است اگر مقدار بهین مدل (۱) برابر با صفر باشد.

۲- DMU_k در T_v ناکارا است اگر مقدار بهین مدل (۱) بزرگتر از صفر باشد.

در DEA از مدل‌های گوناگونی برای تصویر کردن یک نقطه بر مرز کارای قوی مجموعه امکان تولید می‌توان استفاده کرد. ما در بخش (۴) مقاله پیش‌رو، از مدل زیر برای تصویر کردن یک نقطه بر مرز کارای قوی استفاده می‌کنیم.

مدل (۲)

$$\begin{aligned} & \min \theta - \varepsilon(1.s^- + 1.s^+) \\ & s.t. \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + s^- = \theta x_k \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j - s^+ = y_k \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & (\lambda, s^-, s^+) \geq 0 \end{aligned}$$

شده است. سپس با انجام تغییراتی در مدل‌های پیشنهادی، در بخش چهارم امتداد پایداری O-RTS را معرفی کرده و روشی برای شناسایی و تعیین آن ارائه شده است. همچنین در بخش چهارم، روش‌های پیشنهادشدهی این بخش، روی دو مثال عددی اجرا شده‌اند. در بخش پنجم به جمع‌بندی نتایج و پیشنهاد زمینه‌های ممکن برای توسعه‌ی این تحقیق پرداخته شده است.

۲. مفاهیم اولیه

این بخش به فراهم آوردن مقدمات لازم برای بخش‌های بعدی می‌پردازد. مفاهیم بازده به مقیاس چپ (L-RTS)، بازده به مقیاس راست (R-RTS) و بازده به مقیاس کلی (O-RTS)، در این بخش تشریح می‌شوند و ضمن ارائه یکی از روش‌های ارزیابی آنها، به وجود یک ضعف اصلی در این روش و روش‌های دیگر اشاره می‌شود و چاره اندیشی در مورد این مشکل به بخش بعدی واگذار می‌گردد.

مجموعه‌ی n واحد تصمیم‌گیرنده‌ی $\{DMU_j | j=1, \dots, n\}$ را در نظر بگیرید، بطوریکه برای واحد j ام $(j=1, \dots, n)$ ، بردار m مولفه‌ای $x_j > 0$ که $x_j \neq 0$ ، بردار s مولفه‌ای $y_j > 0$ که $y_j \neq 0$ را تولید می‌کند. مجموعه امکان تولید تحت بازده به مقیاس متغیر با استفاده از این n واحد تصمیم‌گیرنده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_v = \left\{ (x, y) \mid \begin{aligned} & x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, \\ & y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{aligned} \right.$$

۲-۱. نکاتی در مورد دو مدل پایه‌ای DEA

با فرض بازده به مقیاس متغیر، مدل (۱) زیر که به مدل جمعی معروف است توسط چارنز و همکاران (۱۹۸۵)

افزایش متغیرهای مستقل بر متغیرهای وابسته را ارزیابی بازده به مقیاس راست (R-RTS) و بررسی تاثیر کاهش متغیرهای مستقل بر متغیرهای وابسته را ارزیابی بازده به مقیاس چپ (L-RTS) می‌گویند. بر اساس مفاهیم اقتصادی ممکن است یکی از سه حالت زیر در هریک از ارزیابی‌های L-RTS و R-RTS اتفاق بیفتد:

۱- افزایش (کاهش) متغیرهای مستقل سودمند باشد که در این حالت گفته می‌شود R-RTS (L-RTS) افزایشی است.

۲- افزایش (کاهش) متغیرهای مستقل مضر باشد که در این حالت گفته می‌شود R-RTS (L-RTS) کاهشی است.

۳- افزایش (کاهش) متغیرهای مستقل تاثیری بر خروجی نداشته باشد که در این حالت گفته می‌شود R-RTS (L-RTS) ثابت است.

از آنجائیکه ارزیابی L-RTS و R-RTS در برگزیده اطلاعات ارزیابی O-RTS بوده و کامل‌تر از آن است، بخصوص در مورد واحدهایی که نوع O-RTS آنها ثابت است؛ بنابراین یکی از ضرورت‌های مورد تاکید این متن مبنا قرار دادن مطالعه نوع L-RTS و R-RTS به جای مطالعه نوع O-RTS است. به همین منظور پیشنهاد می‌شود که در اولویت اول، به شناسایی نوع L-RTS و R-RTS پرداخته شود و سپس به کمک آنها نوع O-RTS را نیز مشخص کرد.

در متون DEA یکی از تعاریف L-RTS و R-RTS، تعریفی است که توسط هدجی کاستاس و سوتریو (۲۰۰۶) ارائه شده است. مطالبی که در ادامه ارائه می‌شود برای تهیه مقدمات لازم، جهت بیان این تعریف می‌باشد. فرض کنید $DMU_k \in \partial T_v$ و ξ یک اسکالر باشد که در شرط $\xi \geq 0$ صدق می‌کند و قرار دهید:

$$\alpha(\xi) = \max \{ \alpha | (\xi x_k, \alpha y_k) \in T_v \},$$

$$\gamma^- = \lim_{\xi \rightarrow 1^-} \frac{\alpha(\xi) - 1}{\xi - 1},$$

$$\gamma^+ = \lim_{\xi \rightarrow 1^+} \frac{\alpha(\xi) - 1}{\xi - 1}$$

تعریف زیر از بازده به مقیاس چپ و راست، همان قسمت‌های (a) و (b) تعریف (۲-۶) آمده در هدجی

این مدل همان مدل BCC در ماهیت ورودی است. رجوع کنید به صفحه ۱۰۵ کتاب جهانشاهلو و همکاران (۱۳۸۷).

قضیه ۱. اگر $(\lambda^*, \theta^*, s^{*-}, s^{*+})$ جواب بهینه مدل (۲) باشد، آنگاه $(\theta^* x_k - s^{*-}, y_k + s^{*+})$ نقطه‌ای روی مرز کارایی قوی T_v است.

اثبات: رجوع کنید به صفحه ۱۰۸ کتاب جهانشاهلو و همکاران (۱۳۸۷).

توجه کنید که نقطه $(\theta^* x_k - s^{*-}, y_k + s^{*+})$ را یک نقطه تصویر برای DMU_k بر مرز کارایی قوی T_v می‌گویند.

۲-۲. بازده به مقیاس چپ و راست

فعالیت‌های علمی زیادی برای ارزیابی بازده به مقیاس واحدها (O-RTS)، از جمله واحدهای صنعتی و تولیدی صورت گرفته است. تحلیل پوششی داده‌ها به عنوان یکی از شناخته شده‌ترین و کاربردی‌ترین روش‌ها در بین روش‌های ارزیابی بازده به مقیاس در دنیای واقعی، همواره مورد توجه مدیران بوده است. بازده به مقیاس در اصل یک مفهوم اقتصادی است که بررسی کننده تاثیر تغییر متغیرهای مستقل اقتصادی بر متغیرهای وابسته آن است. جامعه‌ای را در نظر بگیرید که در آن رشد اقتصادی حاکم باشد یعنی درآمدزایی وجود داشته باشد؛ و فرض کنید در بررسی یک مساله اقتصادی در چنین جامعه‌ای، می‌خواهیم بدانیم که، تاثیر افزایش سرمایه‌گذاری بر سود حاصل چیست؟ واضح است که اگر این سرمایه‌گذاری منجر به افزایش سود بیشتر شود، ریسک این سرمایه‌گذاری را می‌پذیریم و در غیر اینصورت انجام این سرمایه‌گذاری را منطقی نمی‌دانیم. حالا اینبار حالتی برعکس حالت بالا را در نظر بگیرید؛ مثلاً فرض کنید که با یک کارخانه در حال ورشکستگی روبرو هستیم و می‌خواهیم بدانیم تاثیر برکنار کردن عده‌ای از پرسنل و خط‌های تولید این کارخانه بر کم کردن ضررهای کارخانه چیست؟ در واقع در هر دو مساله بالا می‌خواهیم تاثیر تغییر متغیرهای مستقل را بر متغیرهای وابسته بررسی کنیم. و اگر این تغییر صرفه اقتصادی داشته باشد؛ ریسک این تغییر منطقی است و آن را می‌پذیریم. بررسی تاثیر

بر پایه تعریف (۳)، مدل‌ها و قضیه‌های زیر برای شناسایی واحدهای مرزی و تعیین L-RTS و R-RTS آنها بکار گرفته شده‌اند.

مدل (۳)

$$\begin{aligned} \theta^* &= \min \theta \\ \text{s.t.} \\ \sum_{j=1}^n \mu_j x_j &\leq \theta x_k \\ \sum_{j=1}^n \mu_j y_j &\geq y_k \\ \sum_{j=1}^n \mu_j &\geq 1 + \varepsilon \\ \mu &\geq 0 \end{aligned}$$

مدل (۴)

$$\begin{aligned} \varphi^* &= \max \varphi \\ \text{s.t.} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j &\leq x_k \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j &\geq \varphi y_k \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &\leq 1 - \varepsilon \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

قضیه ۲. اگر $DMU_k \in T_v$ و $(\varphi^*, \xi^*, \lambda^*)$ و

$(\theta^*, \eta^*, \mu^*)$ بترتیب جواب‌های بهینه‌ی مدل‌های (۳) و (۴) باشند، آنگاه $DMU_k \in IntT_v$ اگر و تنها اگر $\theta^* < 1$ و $\varphi^* > 1$.

قضیه ۳. اگر $DMU_k \in \partial T_v$ و $(\theta^*, \eta^*, \mu^*)$ و

$(\varphi^*, \xi^*, \lambda^*)$ بترتیب جواب‌های بهینه‌ی مدل‌های (۳) و (۴) باشند، آنگاه:

- ۱- اگر $\theta^* > 1$ آنگاه L-RTS افزایشی است.
- ۲- اگر $\theta^* < 1$ آنگاه L-RTS کاهش‌ی است.
- ۳- اگر $\theta^* = 1$ آنگاه L-RTS ثابت است.
- ۴- اگر $\varphi^* > 1$ آنگاه R-RTS افزایشی است.

کاستاس و سوتریو (۲۰۰۶) است.

تعریف ۲. اگر $DMU_k \in \partial T_v$ آنگاه در مورد L-RTS و R-RTS مربوط به DMU_k داریم:

- ۱- اگر $\gamma^+ > 1$ آنگاه R-RTS افزایشی است.
 - ۲- اگر $\gamma^+ < 1$ آنگاه R-RTS کاهش‌ی است.
 - ۳- اگر $\gamma^+ = 1$ آنگاه R-RTS ثابت است.
 - ۴- اگر $\gamma^- > 1$ یا " γ^- موجود نباشد" آنگاه L-RTS افزایشی است.
 - ۵- اگر $\gamma^- < 1$ آنگاه L-RTS کاهش‌ی است.
 - ۶- اگر $\gamma^- = 1$ آنگاه L-RTS ثابت است.
- به منظور عملیاتی کردن تعریف (۲)، امیدی و همکاران (۲۰۱۷) تعریف (۳) زیر را برای RTS چپ و راست ارائه کردند و نشان دادند که این تعریف با تعریف (۲) معادل است.

تعریف ۳. اگر $DMU_k \in \partial T_v$ آنگاه:

- ۱- R-RTS افزایشی است اگر اسکالر $\Delta > 1$ موجود باشد که
- $$\forall \beta (\beta \in (1, \Delta] \Rightarrow (\beta x_k, \beta y_k) \in IntT_v)$$
- ۲- R-RTS کاهش‌ی است اگر اسکالر $\Delta > 1$ موجود باشد که
- $$\forall \beta (\beta \in (1, \Delta] \Rightarrow (\beta x_k, \beta y_k) \notin T_v)$$
- ۳- R-RTS ثابت است اگر اسکالر $\Delta > 1$ موجود باشد که

- ۴- L-RTS افزایشی است اگر اسکالر $0 < \Delta < 1$ موجود باشد که

- ۵- L-RTS کاهش‌ی است اگر اسکالر $0 < \Delta < 1$ موجود باشد که

- ۶- L-RTS ثابت است اگر اسکالر $0 < \Delta < 1$ موجود باشد که

$$\forall \beta (\beta \in [\Delta, 1) \Rightarrow (\beta x_k, \beta y_k) \in \partial T_v)$$

همچنین، امیدی و همکاران (۲۰۱۷) نشان دادند که همبستگی تئوریک بین (L&R)-RTS و O-RTS، این امکان را فراهم می‌آورد که بتوان به کمک تعیین L-RTS و R-RTS به طبقه‌بندی O-RTS واحدهای مرزی پرداخت. آنها نتایج حاصل از ارتباط بین (L&R)-RTS با O-RTS را در جدول زیر بصورت خلاصه بیان کردند.

۵- اگر $\varphi^* < 1$ آنگاه R-RTS کاهش می‌یابد.

۶- اگر $\varphi^* = 1$ آنگاه R-RTS ثابت است.

۷- هیچ یک از حالت‌های $(\varphi^* > 1, \theta^* < 1)$ ، $(\varphi^* > 1, \theta^* = 1)$ و $(\varphi^* = 1, \theta^* < 1)$ اتفاق نمی‌افتد. برای اثبات قضیه‌های (۲) و (۳) رجوع کنید به امیدی و همکاران (۲۰۱۷).

جدول ۱- همه حالت‌های ممکن برای تعیین O-RTS به کمک L-RTS و R-RTS

case	L-RTS	R-RTS	\Rightarrow	O-RTS
1	IRTS	IRTS		IRTS
2	IRTS	DRTS		CRTS
3	IRTS	CRTS		CRTS
4	DRTS	IRTS		-
5	DRTS	DRTS		DRTS
6	DTRS	CRTS		-
7	CRTS	IRTS		-
8	CRTS	DRTS		CRTS
9	CRTS	CRTS		CRTS

خوئینی (۲۰۱۳) و الهیار و رستمی (۲۰۱۴) از جمله دیگر روش‌های ارزیابی L-RTS و R-RTS هستند که مدل‌های مورد استفاده آنها پارامتری می‌باشند. به منظور برطرف کردن این ضعف همه‌گیر، در بخش بعدی به ارائه روشی برای ارزیابی L-RTS و R-RTS می‌پردازیم که مدل‌های این روش خطی بوده و مشکل پارامتری بودن دیگر روش‌ها را ندارند.

۳. تعیین L-RTS و R-RTS به کمک مدل‌های

غیر پارامتریک

در این بخش ابتدا روش خدابخشی و همکاران (۲۰۱۰)، برای تعیین نوع O-RTS ارائه می‌شود. سپس با الهام از این روش و به کمک تعریف (۳)، یک روش جایگزین برای تعیین نوع L-RTS، R-RTS و O-RTS واحدهای کارای قوی T_v ارائه می‌شود که مدل‌های این روش پیشنهادی برخلاف روش‌های پارامتریک گلانی و یو (۱۹۹۷)، اسلامی و خوئینی (۲۰۱۳)، الهیار و رستمی (۲۰۱۴) و امیدی و همکاران (۲۰۱۷)، غیر پارامتریک

در جدول (۱) تمامی حالت‌های ممکن برای L-RTS و R-RTS آمده‌است. بنابراین از جدول (۱) نتایج زیر بوضوح حاصل می‌شوند:

نتیجه ۱. اگر برای $DMU_k \in \partial T_v$ نوع L-RTS و R-RTS مشخص باشد آنگاه می‌توان نوع O-RTS آنرا مشخص کرد.

نتیجه ۲. اگر برای $DMU_k \in \partial T_v$ نوع R-RTS افزایشی باشد آنگاه نوع L-RTS نیز افزایشی بوده و لذا نوع O-RTS افزایشی است.

نتیجه ۳. اگر برای $DMU_k \in \partial T_v$ نوع L-RTS کاهش‌ی باشد آنگاه نوع R-RTS نیز کاهش‌ی بوده و لذا نوع O-RTS کاهش‌ی است.

همانطور که می‌بینید؛ مدل‌های (۳) و (۴) آمده در بالا وابسته به پارامتر ε هستند. بنابراین روش امیدی و همکاران (۲۰۱۷) از مشکل پارامتری بودن مدل‌هایش در رنج است. البته این ضعف پارامتری بودن مدل‌ها، وجه مشترک بسیاری از روش‌های ارزیابی L-RTS و R-RTS می‌باشد. روش‌های گلانی و یو (۱۹۹۷)، اسلامی و

هستند.

مدل (۶)

$$\max 1.s^- + 1.s^+ + \varepsilon \xi$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + s^- = \xi x_k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j - s^+ = \xi y_k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$(\lambda, s^-, s^+) \geq 0$$

مدل (۷)

$$\max 1.s^- + 1.s^+ - \varepsilon \xi$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + s^- = \xi x_k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j - s^+ = \xi y_k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$(\lambda, s^-, s^+) \geq 0$$

که در آنها ε یک عدد غیر ارشمیدسی است. از قضیه‌های (۵) و (۶) آمده در زیر برای شناسایی نوع R-RTS و L-RTS واحدهای کارای قوی T_v استفاده می‌کنیم.

قضیه ۵. فرض کنید $DMU_k \in \partial T_v$ و $(\lambda^*, s^{*-}, s^{*+}, \xi^*)$ جواب بهینه‌ی برای مدل (۶) باشد، در اینصورت:

۱- اگر $1.s^{*-} + 1.s^{*+} \neq 0$ آنگاه:

۱-۱ R-RTS افزایشی است اگر و تنها اگر $\xi^* > 1$

۱-۲ L-RTS کاهششی است اگر و تنها اگر $\xi^* < 1$

۲- اگر $1.s^{*-} + 1.s^{*+} = 0$ آنگاه:

۱-۲ R-RTS ثابت است اگر و تنها اگر $\xi^* > 1$

۲-۲ R-RTS کاهششی است اگر و تنها اگر $\xi^* = 1$

۳-۱. روش خدابخشی و همکاران برای تعیین

نوع O-RTS

خدابخشی و همکاران (۲۰۱۰) با استفاده از مجموع اسلک‌ها به برآورد O-RTS واحدهای کارای قوی T_v پرداخته‌اند. قضیه زیر بیانگر این روش است.

قضیه ۴. فرض کنید DMU_k در T_v کارای قوی باشد و $(\lambda^*, s^{*-}, s^{*+}, \xi^*)$ جواب بهینه مدل (۵) زیر باشد:

مدل (۵)

$$\max 1.s^- + 1.s^+$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + s^- = \xi x_k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j - s^+ = \xi y_k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$(\lambda, s^-, s^+) \geq 0$$

در اینصورت برای تعیین نوع بازده به مقیاس کلی DMU_k داریم:

۱- O-RTS افزایشی است اگر و تنها اگر $1.s^{*-} + 1.s^{*+} \neq 0$ و $\xi^* > 1$.

۲- O-RTS کاهششی است اگر و تنها اگر $1.s^{*-} + 1.s^{*+} \neq 0$ و $\xi^* < 1$.

۳- O-RTS ثابت است اگر و تنها اگر $1.s^{*-} + 1.s^{*+} = 0$.

اثبات: مراجعه کنید به خدابخشی و همکاران (۲۰۱۰).

۳-۲. روش پیشنهادی برای تعیین L-RTS

R-RTS

حالا فرض کنید DMU_k در T_v کارای قوی باشد و مدل‌های دو فازی پیشنهادی (۶) و (۷) زیر را در نظر بگیرید:

است و چون $(x_k, y_k) \in \partial T_v$ و ∂T_v مقعر است پس فرض $\xi^* > 1$ به همراه قیود مدل (۶) ایجاب می‌کند که:

$$\forall \xi \left(\xi \in (1, \xi^*] \Rightarrow (\xi x_k, \xi y_k) \in \partial T_v \right).$$

بنابراین طبق بند (۳) تعریف (۳) نتیجه می‌گیریم که R-RTS ثابت است و این اثبات قسمت (۱-۲) را کامل می‌کند.

اثبات (۲-۲): فرض کنید $1.s^{-*} + 1.s^{+*} = 0$ و قرار دهید $\xi = 1, \bar{\xi} = \lambda^*, \bar{s}^- = s^{-*}, \bar{s}^+ = s^{+*}, \bar{\xi} = 1$ چون $(\bar{\lambda}, \bar{s}^-, \bar{s}^+, \bar{\xi})$ در قیود مدل (۶) صدق می‌کند پس یک جواب شدنی مدل (۶) است. و چون تابع هدف مدل (۶) از نوع ماکزیم‌سازی است پس یکی از دو حالت $\xi^* = 1$ یا $\xi^* > 1$ رخ می‌دهد. حالا فرض کنید R-RTS کاهش می‌باشد. اگر $\xi^* > 1$ آنگاه طبق بند (۱-۲) همین قضیه، نوع R-RTS ثابت است که این یک تناقض است. پس فرض خلف باطل است لذا داریم: $\xi^* = 1$. برعکس، فرض کنید $\xi^* = 1$ پس اگر $(\bar{\lambda}, \bar{s}^-, \bar{s}^+, \bar{\xi})$ یک جواب شدنی مدل (۶) باشد در این صورت داریم: $\bar{\xi} \neq 1$. بنابراین اگر $\bar{\xi} > 1$ عددی دلخواه و نزدیک به عدد یک باشد که $(\bar{\xi} x_k, \bar{\xi} y_k) \notin T_v$ و لذا با توجه به بند (۲) تعریف (۳) نتیجه می‌شود که R-RTS کاهش می‌کند و این اثبات قسمت (۲-۲) را کامل می‌کند.

بعد از حل مدل (۶)، اگر شرط $1.s^{-*} + 1.s^{+*} \neq 0$ برقرار باشد آنگاه ضرورتاً نامساوی $\xi^* \neq 1$ برقرار است زیرا در غیر این صورت داریم $(x_k, y_k) = (\xi^* x_k, \xi^* y_k)$. و این به همراه نامساوی $1.s^{-*} + 1.s^{+*} \neq 0$ نتیجه می‌دهد که: $\langle (x_k, y_k), \text{ناکارا است} \rangle$ و این با فرض $\langle (x_k, y_k), \text{کارای قوی است} \rangle$ در تناقض است.

بعد از حل مدل (۶)، طبق بند (۱-۱) قضیه (۵) دیدیم که اگر شرایط $1.s^{-*} + 1.s^{+*} \neq 0$ و $\xi^* > 1$ برقرار باشد آنگاه R-RTS افزایشی است. در چنین حالتی نتیجه (۲) آمده در زیر بخش (۲-۲) این مقاله، ایجاب می‌کند که L-RTS نیز افزایشی باشد. بطور مشابه طبق بند (۲-۱) قضیه (۵) دیدیم که اگر شرایط $1.s^{-*} + 1.s^{+*} \neq 0$ و $\xi^* < 1$ برقرار باشد آنگاه L-RTS کاهش می‌کند و در چنین حالتی نتیجه (۳) آمده در زیر بخش (۲-۲) این

اثبات (۱-۱): اگر R-RTS افزایشی باشد آنگاه طبق بند (۱) تعریف (۳)، عددی مانند $\Delta > 1$ وجود دارد بطوریکه:

$$\forall \xi \left(\xi \in (1, \Delta] \Rightarrow (\xi x_k, \xi y_k) \in \text{Int } T_v \right).$$

فرض کنید $\bar{\xi}$ عددی دلخواه و نزدیک به عدد یک باشد که $\bar{\xi} > 1$ پس $\bar{\xi} \in (1, \Delta]$ لذا $(\bar{\xi} x_k, \bar{\xi} y_k) \in \text{Int } T_v$ یعنی $(\bar{\xi} x_k, \bar{\xi} y_k) \in \text{Int } T_v$ ناکارا است. این ناکارایی ایجاب می‌کند که مقدار بهینه تابع هدف مدل (۱) متناظر با $(\bar{\xi} x_k, \bar{\xi} y_k)$ مخالف صفر باشد پس برای فاز اول مدل (۶) داریم: $1.s^{-*} + 1.s^{+*} \neq 0$. چون مدل (۶) از نوع ماکزیم‌سازی است و $\bar{\xi} > 1$ پس برای فاز دوم مدل (۶) داریم: $\xi^* > 1$. برعکس، فرض کنید $1.s^{-*} + 1.s^{+*} \neq 0$ و $\xi^* > 1$. چون $1.s^{-*} + 1.s^{+*} \neq 0$ پس $(\xi^* x_k, \xi^* y_k) \in \partial T_v$ و $(x_k, y_k) \in \partial T_v$ مقعر است پس فرض $\xi^* > 1$ به همراه قیود مدل (۶) ایجاب می‌کند که:

$$\forall \xi \left(\xi \in (1, \xi^*] \Rightarrow (\xi x_k, \xi y_k) \in \text{Int } T_v \right).$$

بنابراین طبق بند (۱) تعریف (۳) نتیجه می‌گیریم که R-RTS افزایشی است و این اثبات قسمت (۱-۱) را کامل می‌کند.

اثبات (۲-۱): مشابه اثبات قسمت (۱-۱) است.

اثبات (۱-۲): اگر R-RTS ثابت باشد آنگاه طبق بند (۳) تعریف (۳)، عددی مانند $\Delta > 1$ وجود دارد بطوریکه:

$$\forall \xi \left(\xi \in (1, \Delta] \Rightarrow (\xi x_k, \xi y_k) \in \partial T_v \right).$$

فرض کنید $\bar{\xi}$ عددی دلخواه و نزدیک به عدد یک باشد که $\bar{\xi} > 1$ پس $\bar{\xi} \in (1, \Delta]$ لذا $(\bar{\xi} x_k, \bar{\xi} y_k) \in \partial T_v$. متناظر با $(\bar{\xi} x_k, \bar{\xi} y_k)$ برابر صفر است زیرا در غیر این صورت طبق بند (۱-۱) همین قضیه R-RTS افزایشی است که این یک تناقض است. پس فرض خلف باطل است یعنی برای فاز اول مدل (۶) داریم $\xi^* > 1$. برعکس، فرض کنید $1.s^{-*} + 1.s^{+*} = 0$ و $\xi^* > 1$. چون $1.s^{-*} + 1.s^{+*} = 0$ پس $(\xi^* x_k, \xi^* y_k) \in \partial T_v$ کارا

است پس فرض $\xi^* < 1$ به همراه قیود مدل (۷) ایجاب می‌کند که

$$\forall \xi \left(\xi \in [\xi^*, 1] \Rightarrow (\xi x_k, \xi y_k) \in \partial T_v \right).$$

بنابراین طبق بند (۶) تعریف (۳) نتیجه می‌گیریم که L-RTS ثابت است و این اثبات قسمت (۱) را کامل می‌کند. برای اثبات قسمت (۲)، فرض کنید L-RTS افزایشی باشد. اگر $\xi^* < 1$ آنگاه طبق قسمت (۱) همین قضیه، L-RTS ثابت است که این یک تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است و لذا $\xi^* = 1$. برعکس فرض کنید $\xi^* = 1$ ، پس اگر $(\tilde{\lambda}, \tilde{s}^-, \tilde{s}^+, \tilde{\xi})$ یک جواب شدنی مدل (۷) باشد در اینصورت داریم $\tilde{\xi} \neq 1$. بنابراین اگر ξ عددی دلخواه و نزدیک به عدد یک باشد که $\xi < 1$ آنگاه لذا $(\xi x_k, \xi y_k) \notin T_v$. لذا با توجه به بند (۴) تعریف (۳) نتیجه می‌گیریم که L-RTS افزایشی است و این اثبات قسمت (۲) را کامل می‌کند.

۳-۳. الگوریتم روش پیشنهادی برای شناسایی نوع L-RTS، R-RTS و O-RTS

فرض کنید DMU_k در T_v کارای قوی باشد برای شناسایی نوع L-RTS، R-RTS و O-RTS مراحل زیر را انجام دهید:

- ۱- مدل (۶) را حل کنید.
- ۲- اگر در مدل (۶) داشته باشیم $1.s^{-*} + 1.s^{+*} \neq 0$ آنگاه به کمک بند (۱) قضیه (۵) نوع L-RTS و R-RTS را مشخص کنید و به مرحله (۶) این الگوریتم بروید.
- ۳- اگر در مدل (۶) داشته باشیم $1.s^{-*} + 1.s^{+*} = 0$ آنگاه به کمک بند (۲) قضیه (۵) نوع R-RTS را مشخص کنید.
- ۴- مدل (۷) را حل کنید.
- ۵- به کمک بندهای (۱) و (۲) قضیه (۶) نوع L-RTS را مشخص کنید.
- ۶- به کمک نوع L-RTS و R-RTS، و با استفاده از جدول (۱)، در مورد نوع O-RTS قضاوت کنید. در بخش بعدی به کمک چهار مدل خطی پیشنهادی DEA، امتداد پایداری O-RTS بررسی شده و روشی

مقاله، ایجاب می‌کند که R-RTS نیز کاهشی باشد. بعد از حل مدل (۶)، با توجه به احکام آمده در قضیه (۵) دیده می‌شود که اگر شرط $1.s^{-*} + 1.s^{+*} \neq 0$ برقرار باشد آنگاه هم نوع L-RTS و هم نوع R-RTS مشخص می‌شود. اما اگر شرط $1.s^{-*} + 1.s^{+*} = 0$ برقرار باشد آنگاه فقط نوع R-RTS مشخص می‌شود و برای تعیین نوع L-RTS بایستی مدل (۷) را حل کنیم و به کمک احکام آمده در قضیه (۶) زیر در مورد نوع L-RTS قضاوت کنیم.

قضیه ۶ فرض کنید $DMU_k \in \partial T_v$ و $(\lambda^*, s^{+*}, s^{-*}, \xi^*)$ جواب بهینه‌ای برای مدل (۷) باشد که در مورد آن داشته باشیم $1.s^{-*} + 1.s^{+*} = 0$ اینصورت:

- ۱- L-RTS ثابت است اگر و تنها اگر $\xi^* < 1$
 - ۲- L-RTS افزایشی است اگر و تنها اگر $\xi^* = 1$
- اثبات:** با توجه به اینکه $1.s^{-*} + 1.s^{+*} = 0$ ، قرار دهید $\tilde{\lambda} = \lambda^*$ ، $\tilde{s}^- = s^{-*}$ ، $\tilde{s}^+ = s^{+*}$ ، $\tilde{\xi} = \xi^*$ چون $(\tilde{\lambda}, \tilde{s}^-, \tilde{s}^+, \tilde{\xi})$ در قیود مدل (۷) صدق می‌کند پس یک جواب شدنی مدل (۷) است. و چون تابع هدف مدل (۷) از نوع مینیمم‌سازی است پس یکی از دو حالت $\xi^* = 1$ یا $\xi^* < 1$ رخ می‌دهد.
- برای اثبات قسمت (۱)، فرض کنید L-RTS ثابت است. پس طبق بند (۶) تعریف (۳)، عددی مانند $0 < \Delta < 1$ وجود دارد بطوریکه

$$\forall \xi \left(\xi \in [\Delta, 1] \Rightarrow (\xi x_k, \xi y_k) \in \partial T_v \right).$$

فرض کنید $\bar{\xi}$ عددی دلخواه و نزدیک به عدد یک باشد که $\bar{\xi} < 1$ پس $\bar{\xi} \in [\Delta, 1]$ لذا $(\bar{\xi} x_k, \bar{\xi} y_k) \in \partial T_v$. ادعا می‌کنیم که مقدار بهینه تابع هدف مدل (۱) متناظر با $(\bar{\xi} x_k, \bar{\xi} y_k)$ برابر صفر است زیرا در غیر اینصورت با فرض $1.s^{-*} + 1.s^{+*} = 0$ در تناقض است. پس برای فاز اول مدل (۷) داریم: $1.s^{-*} + 1.s^{+*} = 0$. از اینکه $\bar{\xi} < 1$ و چون تابع هدف مدل (۷) از نوع مینیمم‌سازی است پس $\bar{\xi} < 1$. برعکس، فرض کنید $\bar{\xi} < 1$. چون $1.s^{-*} + 1.s^{+*} = 0$ پس $(\bar{\xi} x_k, \bar{\xi} y_k) \in \partial T_v$ کارای قوی است. و از اینکه $(x_k, y_k) \in \partial T_v$ و چون ∂T_v مقعر

برای تعیین آن پیشنهاد شده است. توجه کنید که مدل‌های (۶) و (۷) الهام بخش ارائه مدل‌های بخش بعدی برای جستجوی مسیر پایداری O-RTS شده‌اند. در انتهای بخش آتی روش‌های پیشنهادی این مقاله روی دو مثال عددی بکارگرفته شده‌اند.

۴. امتداد پایداری O-RTS

در این بخش متناظر با هر واحد کارای قوی T_v ، امتداد پایداری O-RTS را تعریف کرده و روشی برای تعیین آن پیشنهاد می‌کنیم. در واقع سوالی که در این بخش می‌خواهیم به آن پاسخ دهیم این است که: «تا چه حد می‌توان واحد تحت ارزیابی را در امتداد خودش بصورت شعاعی در درون T_v منبسط یا منقبض کرد بطوریکه وضعیت بازده به مقیاس «تصویر کارای آن نقطه تغییر سایز یافته» تغییر نکند؟». البته پیش‌فرض ما این است که واحد تغییر سایز یافته، توانایی این را دارد که خود را به روی مرز کارایی قوی T_v برساند. بدین منظور ما در سرتاسر این بخش فرض کرده‌ایم که واحد تغییر سایز یافته، خود را از طریق مدل (۲) به روی مرز کارایی قوی T_v می‌رساند.

۴-۱. مقدمات پایداری O-RTS

فرض کنید نوع L-RTS و R-RTS همه واحدهای کارای قوی در T_v مشخص شده‌باشد و مجموعه‌های A_I ، A_C و A_D بیانگر آن دسته از واحدهای کارای قوی T_v باشند که، اعضای A_I دارای نوع L-RTS افزایشی، اعضای A_C دارای نوع O-RTS ثابت و اعضای A_D دارای نوع R-RTS کاهش‌ی باشند و قرار دهید:

$$A_I = \{(x_I^1, y_I^1), \dots, (x_I^t, y_I^t)\} \quad ,$$

$$A_C = \{(x_C^1, y_C^1), \dots, (x_C^p, y_C^p)\} \quad ,$$

$$A_D = \{(x_D^1, y_D^1), \dots, (x_D^q, y_D^q)\}$$

واضح است که مجموعه $A_I \cup A_C \cup A_D$ با مجموعه همه واحدهای کارای قوی T_v برابر است. فرض کنید T_v^I ، T_v^C و T_v^D بترتیب T_v ‌های ساخته شده با مشاهدات آمده در A_I ، A_C و A_D باشند. فرض کنید

مدل (۸)

$$\xi_I = \min \xi$$

s.t.

$$\sum_{j \in J_C} \lambda_j x_C^j \leq \xi x_k$$

$$\sum_{j \in J_C} \lambda_j y_C^j \geq \xi y_k$$

$$\sum_{j \in J_C} \lambda_j = 1$$

$$\lambda \geq 0$$

مدل (۹)

$$\xi_C^- = \max \xi$$

s.t.

$$\sum_{j \in J_I} \lambda_j x_I^j \leq \xi x_k$$

$$\sum_{j \in J_I} \lambda_j y_I^j \geq \xi y_k$$

$$\sum_{j \in J_I} \lambda_j = 1$$

$$\lambda \geq 0$$

مدل (۱۰)

$$\xi_C^+ = \min \xi$$

s.t.

$$\sum_{j \in J_D} \lambda_j x_D^j \leq \xi x_k$$

$$\sum_{j \in J_D} \lambda_j y_D^j \geq \xi y_k$$

$$\sum_{j \in J_D} \lambda_j = 1$$

$$\lambda \geq 0$$

مدل (۹)

$$\begin{aligned} \xi_D &= \max \xi \\ \text{s.t.} \\ \sum_{j \in J_C} \lambda_j x_C^j &\leq \xi x_k \\ \sum_{j \in J_C} \lambda_j y_C^j &\geq \xi y_k \\ \sum_{j \in J_C} \lambda_j &= 1 \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

که:

$$\begin{aligned} J_I &= \{j | (x_I^j, y_I^j) \in A_I\}, \\ J_C &= \{j | (x_C^j, y_C^j) \in A_C\}, \\ J_D &= \{j | (x_D^j, y_D^j) \in A_D\} \end{aligned}$$

از مدل‌های (۸)، (۹)، (۱۰) و (۱۱) واضح است که مجموعه‌های امکان تولیدی که این مدل‌ها روی آنها تعریف شده‌اند، بترتیب همان T_v^C ، T_v^D ، T_v^I و T_v^C هستند. در واقع این مدل‌ها از همان ساختار مدل‌های (۶) و (۷) برخوردارند. از این مدل‌ها برای منقبض یا منبسط کردن سایز DMU_k به منظور جستجوی یک مسیر برای پایداری O-RTS استفاده می‌شود. در ادامه متناظر با هر واحد کارای قوی T_v ، «امتداد پایداری O-RTS» تعریف شده است.

تعریف ۴. تعریف امتداد پایداری O-RTS

فرض کنید DMU_k یک واحد کارای قوی در T_v باشد که نوع O-RTS آن مشخص است در اینصورت:
حالت ۱- اگر O-RTS افزایشی باشد آنگاه پاره‌خط

$\{\xi | \xi(x_k, y_k) \in [1, \xi_I]\}$ را بعنوان امتداد پایداری O-RTS این واحد تعریف می‌کنیم. توجه کنید که اگر ξ یک اسکالر مشخص و ثابت از بازه $[1, \xi_I]$ باشد و تصویر (x_k^ξ, y_k^ξ) تحت مدل (۲) بر مرز کارای قوی T_v باشد آنگاه چون $(x_k^\xi, y_k^\xi) \in \partial I$ پس O-RTS نقطه (x_k^ξ, y_k^ξ) افزایشی است.

حالت ۲- اگر O-RTS ثابت باشد آنگاه پاره‌خط $\{\xi | \xi(x_k, y_k) \in [\xi_C^-, \xi_C^+]\}$ را بعنوان امتداد پایداری O-RTS این واحد تعریف می‌کنیم. توجه کنید که اگر ξ یک اسکالر مشخص و ثابت از بازه $[\xi_C^-, \xi_C^+]$ باشد و تصویر (x_k^ξ, y_k^ξ) و (x_k^ξ, y_k^ξ) تحت مدل (۲) بر مرز کارای قوی T_v باشد آنگاه چون $(x_k^\xi, y_k^\xi) \in \partial C$ پس O-RTS نقطه (x_k^ξ, y_k^ξ) ثابت است.

حالت ۳- اگر O-RTS کاهشی باشد آنگاه پاره‌خط $\{\xi | \xi(x_k, y_k) \in (\xi_D, 1]\}$ را بعنوان امتداد پایداری O-RTS این واحد تعریف می‌کنیم. توجه کنید که اگر ξ یک اسکالر مشخص و ثابت از بازه $(\xi_D, 1]$ باشد و تصویر (x_k^ξ, y_k^ξ) تحت مدل (۲) بر مرز کارای قوی T_v باشد آنگاه چون $(x_k^\xi, y_k^\xi) \in \partial D$ پس O-RTS نقطه (x_k^ξ, y_k^ξ) کاهشی است.

باتوجه به تعریف (۴) می‌توان همه حالت‌های ممکن برای تعیین امتداد پایداری بازده به مقیاس کلی واحدهای کارای قوی T_v را در جدول (۲) زیر خلاصه کرد:

جدول ۲- همه حالت‌های ممکن برای تعیین امتداد پایداری بازده به مقیاس کلی واحدهای کارای قوی T_v

نوع بازده به مقیاس کلی واحد تحت ارزیابی	امتداد پایداری
افزایشی	$\{\xi \xi(x_k, y_k) \in [1, \xi_I]\}$
ثابت	$\{\xi \xi(x_k, y_k) \in [\xi_C^-, \xi_C^+]\}$
کاهشی	$\{\xi \xi(x_k, y_k) \in (\xi_D, 1]\}$

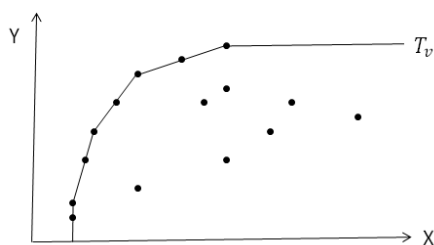
DMU، با یک ورودی و یک خروجی آمده‌است.

برای بررسی تعبیر شهودی مطالب بالا جدول (۳) آمده در زیر را در نظر بگیرید که در آن، اطلاعات مربوط به ۱۵ تا

جدول ۳- اطلاعات مربوط به ۱۵ تا DMU با یک ورودی و یک خروجی

DMU	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
x	۵۰۰	۱۵۰	۴۵۰	۴۰۰	۳۰۰	۳۰۰	۶۰۰	۱۵۰	۵۰۰	۶۵۰	۱۸۰	۵۰۰	۲۰۰	۸۰۰	۲۵۰
y	۵۵۰	۱۵۰	۵۰۰	۶۵۰	۶۰۰	۲۰۰	۴۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۵۰۰	۳۰۰	۷۰۰	۴۰۰	۴۵۰	۵۰۰

T_v متناظر با مشاهدات جدول (۳) در شکل زیر رسم شده است.



شکل ۱. T_v متناظر با داده‌های جدول (۳)

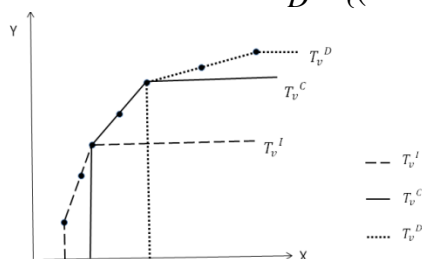
بنابراین متناظر با مشاهدات آمده در A_D و A_C ، A_I نمودار T_v^D و T_v^C ، T_v^I بصورت زیر است:

با توجه به شکل (۱) دیده می‌شود که:

$$A_I = \{(150, 150), (180, 300), (200, 400)\},$$

$$A_C = \{(200, 400), (250, 500), (300, 600)\},$$

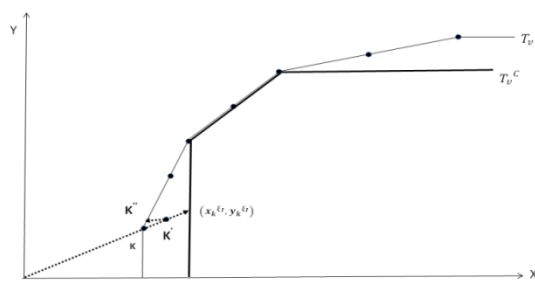
$$A_D = \{(300, 600), (400, 650), (500, 700)\}$$



شکل ۲. T_v^D و T_v^C ، T_v^I متناظر با داده‌های جدول (۳)

شکل زیر دیده می‌شود نقطه $K' = (\xi_k^x, \xi_k^y)$ یک نقطه از امتداد پایداری DMU_k است. از آنجائیکه تحت $K' = (\xi_k^x, \xi_k^y)$ تصویر $K'' = (x_k^{\xi}, y_k^{\xi})$ مدل (۲) بر مرز کارایی قوی T_v می‌باشد و چون K'' کارایی قوی است پس $(x_k^{\xi}, y_k^{\xi}) \in \partial I$ و لذا بازده به مقیاس (x_k^{ξ}, y_k^{ξ}) افزایشی است. بنابراین O-RTS هر نقطه از امتداد پایداری DMU_k افزایشی است.

واحد کارایی قوی $DMU_k = (150, 150)$ را در نظر بگیرید که با توجه به شکل (۲) دارای O-RTS افزایشی است. فرض کنید ξ_k مقدار بهینه مدل (۵) متناظر با DMU_k باشد. منظور از امتداد پایداری DMU_k (یا نقطه K) پاره خطی است که در شکل زیر از نقطه K شروع شده و انتهای آن نقطه (ξ_k^x, ξ_k^y) است. تاکید می‌کنیم که نقطه (ξ_k^x, ξ_k^y) جزء امتداد پایداری DMU_k نیست. فرض کنید ξ_k یک اسکالر مشخص و ثابت از به $[1, \xi_k]$ باشد. همانطور که در



شکل ۳. امتداد پایداری متناظر با $DMU_k = (150, 150)$

مثال ۱. داده‌های جدول (۳) را در نظر بگیرید. با استفاده از الگوریتم پیشنهاد شده در زیر بخش (۳-۳)، نوع L-RTS، R-RTS و O-RTS بصورت زیر تعیین می‌شود. سپس نتایج بدست آمده از این روش با روش آمیدی و همکاران (۲۰۱۷) مقایسه می‌شوند. در نهایت به کمک روش پیشنهاد شده در زیر بخش (۴-۲)، امتداد پایداری O-RTS متناظر با هریک از واحدهای کارای قوی T_v ، تعیین می‌گردد.

نتایج حل مدل‌های (۱)، (۶) و (۷) در جدول (۴) آمده‌اند. با توجه به تعریف (۱)، از ستون دوم جدول (۴) دیده می‌شود که واحدهای ۲، ۴، ۵، ۱۱، ۱۲، ۱۳ و ۱۵ کارای قوی هستند. بعد از حل مدل (۶)، از ستون سوم جدول (۴) دیده می‌شود که مقدار $1.s^{+*} + 1.s^{-*}$ متناظر با هر یک از واحدهای کارای قوی ۲، ۴، ۱۱ و ۱۲ ناصفر است. بنابراین با توجه به مقادیر ξ_k^* آمده در ستون چهارم جدول متناظر با این واحدها نتیجه می‌گیریم که:

- نوع R-RTS واحدهای ۲ و ۱۱ افزایشی و لذا نوع L-RTS و به تبع آن نوع O-RTS آنها نیز افزایشی است.

- نوع L-RTS واحدهای ۴ و ۱۲ کاهششی و لذا نوع R-RTS و به تبع آن نوع O-RTS آنها نیز کاهششی است.

همچنین از ستون سوم جدول (۴) دیده می‌شود که مقدار $1.s^{+*} + 1.s^{-*}$ متناظر با هر یک از واحدهای کارای قوی ۵، ۱۳ و ۱۵ صفر است بنابراین با توجه به مقادیر ξ_k^* آمده در ستون چهارم و نیز با توجه به مقادیر ξ_k^* آمده در ستون ششم جدول (۴) متناظر با این واحدها نتیجه می‌گیریم که:

۲-۴. مراحل روش پیشنهادی برای تعیین امتداد پایداری O-RTS

در این قسمت بکمک مدل‌های (۱)، (۶)، (۷)، (۸)، (۹)، (۱۰) و (۱۱) و در قالب یک فرآیند چهار مرحله‌ای، روش پیشنهاد شده این مقاله برای تعیین امتداد پایداری O-RTS متناظر با هریک از واحدهای کارای قوی T_v ، ارائه شده‌است.

مراحل روش پیشنهادی

۱- به کمک الگوریتم (۳-۳) نوع R-RTS، L-RTS و O-RTS هر یک از واحدهای کارای قوی T_v را مشخص کنید.

۲- با استفاده از مرحله قبلی اعضای مجموعه‌های A_I ، A_D و A_C را شناسایی کنید.

۳- برای هر واحد کارای قوی T_v ، اگر نوع O-RTS آن ثابت است مدل‌های (۹) و (۱۰)، و اگر نوع O-RTS آن افزایشی یا کاهششی است بترتیب مدل‌های (۸) و (۱۱) را حل کنید.

۴- به کمک مقادیر ξ_I^- ، ξ_C^- ، ξ_C^+ و ξ_D^- بدست آمده از مرحله قبل و با استفاده از جدول (۲)، برای هر یک از واحدهای کارای قوی T_v امتداد پایداری O-RTS را بدست آورید.

۳-۴. مثال عددی برای تعیین L-RTS، R-RTS، O-RTS و امتداد پایداری O-RTS

در این قسمت، روش‌های پیشنهاد شده‌ی این مقاله برای تعیین L-RTS، R-RTS، O-RTS و امتداد پایداری O-RTS روی دو مثال عددی بکار گرفته شده‌اند.

- نوع R-RTS و L-RTS واحد ۵ بترتیب کاهشی و ثابت است و لذا نوع O-RTS آن نیز ثابت است.
 - نوع R-RTS و L-RTS واحد ۱۳ بترتیب ثابت و افزایشی است و لذا نوع O-RTS آن نیز ثابت است.
 - نوع R-RTS و L-RTS واحد ۱۵ بترتیب ثابت و ثابت است و لذا نوع O-RTS آن نیز ثابت است.
- نتایج نهایی الگوریتم پیشنهادی زیر بخش (۳-۳)، برای تعیین نوع L-RTS، R-RTS و O-RTS را می‌توانید در ستون‌های هفتم، هشتم و نهم جدول (۴) ببینید.

جدول ۴- تعیین نوع L-RTS، R-RTS، O-RTS با اجرای الگوریتم (۳-۳) به کمک حل مدل‌های (۱)، (۶) و (۷) برای داده‌های جدول (۳)

DMU	نتایج مدل (۱)		نتایج مدل (۶)	نتایج مدل (۷)		نتایج روش پیشنهادی		
	$1.s^{-*} + 1.s^{+*}$	$1.s^{-*} + 1.s^{+*}$	ξ^*	$1.s^{-*} + 1.s^{+*}$	ξ^*	L-RTS	R-RTS	O-RTS
1	250	270	0/6	270	0/6	-	-	-
2	0	300	4	300	2	افزایشی	افزایشی	افزایشی
3	250	266/6	0/66	266/6	0/6	-	-	-
4	0	112/5	0/75	112/5	0/75	کاهشی	کاهشی	کاهشی
5	0	0	1	0	0/6	ثابت	کاهشی	ثابت
6	400	600	3	600	3	-	-	-
7	500	600	1/5	600	1/5	-	-	-
8	50	600	6	600	6	-	-	-
9	500	700	2	700	2	-	-	-
10	450	480	1/2	480	1/2	-	-	-
11	0	100	1/66	100	1/6	افزایشی	افزایشی	افزایشی
12	0	180	0/6	180	0/6	کاهشی	کاهشی	کاهشی
13	0	0	1/5	0	1	افزایشی	ثابت	ثابت
14	650	766/6	1/33	766/6	1/33	-	-	-
15	0	0	1/2	0	0/8	ثابت	ثابت	ثابت

که واحدهای مرزی ۲، ۸ و ۱۱ دارای R-RTS افزایشی، واحدهای مرزی ۱۵ و ۱۳ دارای R-RTS ثابت و واحدهای مرزی ۴، ۵ و ۱۲ دارای R-RTS کاهشی هستند. بنابراین با مشخص شدن نوع L-RTS و R-RTS واحدهای مرزی T_v ، و با توجه به جدول (۱) می‌توان نوع O-RTS واحدهای مرزی T_v را معین کرد. در ستون ششم جدول (۵) نوع O-RTS واحدهای مرزی T_v را ملاحظه کنید.

از مقایسه ستون هفتم جدول (۴) با ستون چهارم جدول (۵) دیده می‌شود که نتایج روش پیشنهادی این مقاله در تشخیص نوع L-RTS، برای هر یک از واحدهای کارای قوی T_v ، بر نتایج روش امیدوی و همکاران (۲۰۱۷)

نتایج حل مدل‌های (۳) و (۴) با در نظر گرفتن $\varepsilon = 0/001$ بترتیب در ستون‌های دوم و سوم جدول (۵) آمده‌اند. با توجه به مقادیر θ^* و φ^* آمده در ستون‌های دوم و سوم جدول (۵) و با بکارگیری قضیه (۲) نتیجه می‌شود که واحدهای ۲، ۴، ۵، ۸، ۱۱، ۱۲، ۱۳ و ۱۵ واحدهای مرزی T_v هستند. با توجه به مقادیر θ^* آمده در ستون دوم جدول (۵)، و با بکارگیری سه بند اول قضیه (۳) نتیجه می‌شود که واحدهای مرزی ۲، ۸، ۱۱ و ۱۳ دارای L-RTS افزایشی، واحدهای مرزی ۵ و ۱۵ دارای L-RTS ثابت، و واحدهای مرزی ۴ و ۱۲ دارای L-RTS کاهشی هستند. از مقادیر φ^* آمده در ستون سوم جدول (۵)، به همراه بندهای چهارم تا ششم قضیه (۳) نتیجه می‌شود

قوی T_v ، تشخیص روش پیشنهادی و روش آمیدی و همکاران (۲۰۱۷) در تعیین نوع R-RTS و O-RTS یکسان است.

منطبق است. همچنین از مقایسه ستون‌های هشتم و نهم جدول (۴) بترتیب با ستون‌های پنجم و ششم جدول (۵) دیده می‌شود که، متناظر با هر یک از واحدهای کارای

جدول ۵- تعیین نوع O-RTS, R-RTS, L-RTS با اجرای روش آمیدی و همکاران (۲۰۱۷)

DMU	نتایج مدل (۳)		نتایج روش آمیدی و همکاران (۲۰۱۷)		
	θ^*	φ^*	L-RTS	R-RTS	O-RTS
1	0/55	1/27	-	-	-
2	1/001	1/004	افزایشی	افزایشی	افزایشی
3	0/555	1/34	-	-	-
4	0/997	0/999	کاهشی	کاهشی	کاهشی
5	1	0/999	ثابت	کاهشی	ثابت
6	0/533	2/997	-	-	-
7	0/333	1/748	-	-	-
8	1/001	1/5	افزایشی	افزایشی	افزایشی
9	0/36	2/331	-	-	-
10	0/384	1/398	-	-	-
11	1/0006	1/002	افزایشی	افزایشی	افزایشی
12	0/998	0/999	کاهشی	کاهشی	کاهشی
13	1/0006	1	افزایشی	ثابت	ثابت
14	0/281	1/55	-	-	-
15	1	1	ثابت	ثابت	ثابت

بنابراین این شیوه پیشنهادی، روش دیگری را برای طبقه بندی O-RTS, R-RTS, L-RTS واحدهای کارای قوی T_v در دسترس قرار می‌دهد. مزیت روش پیشنهادی این مقاله بر روش آمیدی و همکاران (۲۰۱۷)، غیر پارامتریک بودن آن است. بعبارت دیگر نقطه قوت روش پیشنهادی، خطی بودن مدل‌های آن است و اهمیت این موضوع وقتی بیشتر می‌شود که دیگر روش‌های طبقه بندی R-RTS, L-RTS نظیر روش‌های گلانی و یو (۱۹۹۷)، اسلامی و خوئینی (۲۰۱۳)، الهیار و رستمی (۲۰۱۴) و آمیدی و همکاران (۲۰۱۷) را می‌توان به دلیل پارامتریک بودن مدل‌هایشان جزء روش‌های غیر خطی دسته بندی کرد.

بنابراین این شیوه پیشنهادی، روش دیگری را برای طبقه بندی O-RTS, R-RTS, L-RTS واحدهای کارای قوی T_v در دسترس قرار می‌دهد. مزیت روش پیشنهادی این مقاله بر روش آمیدی و همکاران (۲۰۱۷)، غیر پارامتریک بودن آن است. بعبارت دیگر نقطه قوت روش پیشنهادی، خطی بودن مدل‌های آن است و اهمیت این موضوع وقتی بیشتر می‌شود که دیگر روش‌های طبقه بندی R-RTS, L-RTS نظیر روش‌های گلانی و یو (۱۹۹۷)، اسلامی و خوئینی (۲۰۱۳)، الهیار و رستمی (۲۰۱۴) و آمیدی و همکاران (۲۰۱۷) را می‌توان به دلیل پارامتریک بودن مدل‌هایشان جزء روش‌های غیر خطی دسته بندی کرد.

در ادامه با اجرای مراحل فرآیند ارائه شده در زیر بخش (۲-۴)، امتداد پایداری O-RTS متناظر با هر یک از واحدهای کارای قوی T_v تعیین می‌گردد.

اجرای مراحل ۳ و ۴.

• چون نوع O-RTS واحدهای ۲ و ۱۱ افزایشی است؛ به کمک مدل (۸) متناظر با هر یک از این واحدها، مقدار I_C^+ و به تبع آن امتداد پایداری O-RTS را بدست آورده‌ایم. نتایج اینکار را در جدول (۶) ببینید.

• چون نوع O-RTS واحدهای ۵، ۱۳ و ۱۵ ثابت است؛ به کمک مدل‌های (۹) و (۱۰) متناظر با هر یک از این واحدها، مقادیر I_C^- و I_C^+ و به تبع آن امتداد

بنابراین این شیوه پیشنهادی، روش دیگری را برای طبقه بندی O-RTS, R-RTS, L-RTS واحدهای کارای قوی T_v در دسترس قرار می‌دهد. مزیت روش پیشنهادی این مقاله بر روش آمیدی و همکاران (۲۰۱۷)، غیر پارامتریک بودن آن است. بعبارت دیگر نقطه قوت روش پیشنهادی، خطی بودن مدل‌های آن است و اهمیت این موضوع وقتی بیشتر می‌شود که دیگر روش‌های طبقه بندی R-RTS, L-RTS نظیر روش‌های گلانی و یو (۱۹۹۷)، اسلامی و خوئینی (۲۰۱۳)، الهیار و رستمی (۲۰۱۴) و آمیدی و همکاران (۲۰۱۷) را می‌توان به دلیل پارامتریک بودن مدل‌هایشان جزء روش‌های غیر خطی دسته بندی کرد.

در ادامه با اجرای مراحل فرآیند ارائه شده در زیر بخش (۲-۴)، امتداد پایداری O-RTS متناظر با هر یک از واحدهای کارای قوی T_v تعیین می‌گردد.

اجرای مرحله ۱. بعداز اینکه الگوریتم پیشنهادی زیر بخش (۳-۳) را روی داده‌های جدول (۳) اجرا کردیم، نوع

پایداری O-RTS را بدست آورده‌ایم. نتایج اینکار را در جدول (۷) ببینید. • چون نوع O-RTS واحدهای ۴ و ۱۲ کاهش است؛ آورده‌ایم. نتایج اینکار را در جدول (۶) ببینید.

جدول ۶- تعیین امتداد پایداری واحدهای کارای قوی جدول (۴) که O-RTS آنها افزایشی است

DMU	نتایج مدل (۸) ξ_I	امتداد پایداری O-RTS
DMU ₂ = (150,150)	1/33	$\{\xi(x_2, y_2) \xi \in [1, 1/33]\}$
DMU ₁₁ = (180,300)	1/11	$\{\xi(x_{11}, y_{11}) \xi \in [1, 1/11]\}$

جدول ۷- تعیین امتداد پایداری واحدهای کارای قوی جدول (۴) که O-RTS آنها ثابت است

DMU	نتایج مدل (۹) ξ_C^-	نتایج مدل (۱۰) ξ_C^+	امتداد پایداری O-RTS
DMU ₅ = (300,600)	0/667	1	$\{\xi(x_5, y_5) \xi \in [0/667, 1]\}$
DMU ₁₃ = (200,400)	1	1/25	$\{\xi(x_{13}, y_{13}) \xi \in [1, 1/25]\}$
DMU ₁₅ = (250,500)	0/8	1/2	$\{\xi(x_{15}, y_{15}) \xi \in [0/8, 1/2]\}$

جدول ۸- تعیین امتداد پایداری واحدهای کارای قوی جدول (۴) که O-RTS آنها کاهش است

DMU	نتایج مدل (۱۱) ξ_D	امتداد پایداری O-RTS
DMU ₄ = (400,650)	0/923	$\{\xi(x_4, y_4) \xi \in (0/923, 1]\}$
DMU ₁₂ = (500,700)	0/857	$\{\xi(x_{12}, y_{12}) \xi \in (0/857, 1]\}$

این مساله، سه شاخص «مقدار سرمایه اولیه»، «هزینه‌های کارکنان» و «هزینه‌های دانش فنی» شاخص‌های ورودی، و دو شاخص «درآمد خالص» و «صرفه جویی در اقتصاد» شاخص‌های خروجی این DMUها هستند. شاخص‌های ورودی با x_1 ، x_2 و x_3 و شاخص‌های خروجی با y_1 و y_2 نمایش داده شده‌اند.

مثال ۲. جدول (۹) داده‌های آماری مربوط به ۱۳ موسسه توسعه فناوری ایران در سال ۲۰۱۳ را نشان می‌دهد. این داده‌های آماری بیانگر سنجش پنج شاخص برای هر یک از این موسسه‌ها هستند. هدف ارزیابی R-، L-، RTS، O-RTS و امتداد پایداری O-RTS متناظر با واحدهای کارای قوی این موسسه‌هاست. این ۱۳ موسسه، بعنوان ۱۳ DMU تا در نظر گرفته شده‌اند. با توجه به ویژگیهای شاخص‌های آماری مورد مطالعه در

جدول ۹- اطلاعات مربوط به ۱۳ موسسه توسعه فناوری ایران با سه شاخص ورودی و دو شاخص خروجی

DMU	مقدار سرمایه اولیه		هزینه‌های کارکنان	هزینه‌های دانش فنی	درآمد خالص	صرفه جویی در اقتصاد
	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
۱	۲۰۹۹۰۵	۳۴۴۱	۲۱۹۶۲	۱۴۵۲۵۲	۲۷/۴	
۲	۲۷۵۶۸	۱۷۳۸	۳۷۲	۸۶۸۹۹	۲۰/۳	
۳	۷۷۴۴۱	۴۷۶۳	۱۲۳۷۸	۳۰۵۲۲۶	۳۱/۳	
۴	۱۳۱۴۸۷	۵۸۶۵	۲۹۷۵۶	۴۷۱۳۷۲	۲۶/۴	
۵	۲۳۶۰۶	۳۷۳۵	۷۳۷۱	۹۸۵۷۸۰	۳۴/۹۹	
۶	۵۷۶۳۳۰	۵۴۳۸	۲۳۶۷	۶۷۰۴۳۱	۲۳/۴	
۷	۶۱۲۳۳۷۵	۲۳۶۵۳	۲۶۷۳۱	۲۴۷۳۳۵۷	۳۲/۷	
۸	۳۲۶۷۷۵	۱۲۳۵۴	۸۹۷۶	۴۵۸۴۰۰	۲۶/۵	
۹	۲۹۰۸۷۶	۳۹۸	۳۷۶۶	۷۸۹۴۳	۲۱/۳	
۱۰	۲۰۱۴۳۵	۴۵۶۷	۴۳۸۷	۶۷۴۵۵	۳۰/۲	
۱۱	۵۴۶۹۰	۴۵۷۰	۶۷۹۴	۸۷۳۸۷	۲۷/۶	
۱۲	۴۶۸۰۹	۳۶۵۵	۷۶۸۸	۹۶۷۰۸	۲۸/۲	
۱۳	۸۱۵۴۶۷۸	۵۶۷۲۳	۸۵۶۰۹	۳۴۵۰۸۷۱	۳۶/۷	

۵- با توجه به ستون‌های هفتم و هشتم جدول (۱۰) داریم:

$$A_I = \{2, 5, 6, 9\}, \quad A_C = \{2, 5, 6, 9\}, \\ A_D = \{2, 5, 6, 7, 9, 10, 13\}$$

۶- چون واحدی با O-RTS افزایشی وجود ندارد پس نیازی به حل مدل (۸) نیست.

۷- چون نوع O-RTS واحدهای ۲، ۵، ۶ و ۹ ثابت است؛ به کمک مدل‌های (۹) و (۱۰) متناظر با هر یک از این واحدها، مقادیر ξ_C^- و ξ_C^+ و به تبع آن امتداد پایداری O-RTS را بدست آورده‌ایم. نتایج اینکار را در جدول (۱۱) ببینید.

۸- چون نوع O-RTS واحدهای ۷، ۱۰ و ۹ کاهش‌ی است؛ به کمک مدل (۱۱) متناظر با هر یک از این واحدها، مقدار ξ_D^+ و به تبع آن امتداد پایداری O-RTS را بدست آورده‌ایم. نتایج اینکار را در جدول (۱۲) ببینید.

در ادامه مشابه آنچه در توضیحات مثال (۱) گفته شد، دو روش پیشنهاد شده در زیر بخش‌های (۳-۳) و (۳-۴)، روی داده‌های جدول (۹) اجرا می‌شوند. بدین منظور مراحل زیر انجام می‌شود:

۱- مجموعه T_v بعنوان مجموعه‌ی امکان تولید این مشاهدات در نظر گرفته شده‌است.

۲- متناظر با هریک از DMUها و به منظور شناسایی واحدهای کارایی قوی T_v ، مدل (۱) حل شده و مقادیر بهینه این مدل در ستون دوم جدول (۱۰) آمده است. با توجه به این ستون و با توجه به تعریف (۱) واحدهای ۲، ۵، ۶، ۷، ۹، ۱۰ و ۱۳ واحدهای کارایی قوی T_v هستند.

۳- متناظر با هریک از واحدها، مدل‌های دو فاز (۶) و (۷) حل شده‌اند و نتایج حاصل از آنها در ستون‌های سوم تا ششم جدول (۱۰) آمده‌اند.

۴- نوع O-RTS، R-RTS، L-RTS و متناظر با هریک از واحدهای کارایی قوی T_v را می‌توانید در ستون‌های هفتم، هشتم و نهم جدول (۱۰) ببینید.

جدول ۱۰- تعیین نوع O-RTS، R-RTS، L-RTS با اجرای الگوریتم (۳-۳) به کمک حل مدل‌های (۱)، (۶) و (۷) برای داده‌های جدول (۹)

DMU	نتایج مدل (۱)		نتایج مدل (۶)		نتایج مدل (۷)		نتایج روش پیشنهادی			
	$1.s^{-*} + 1.s^{+*}$	$1.s^{-*} + 1.s^{+*}$	ξ^*	$1.s^{-*} + 1.s^{+*}$	ξ^*	$1.s^{-*} + 1.s^{+*}$	ξ^*	L-RTS	R-RTS	O-RTS
۱	۳۹۸۳۰۰	۱۰۶۶۰۷۰	۱/۲۸	۱۰۶۶۰۷۰	۱/۲۸	۱۰۶۶۰۷۰	۱/۲۸	-	-	-
۲	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱	افزایشی	کاهشی	ثابت
۳	۷۴۰۴۲۸	۷۸۵۸۹۸	۰/۷۸	۷۸۵۸۹۸	۰/۷۸	۷۸۵۸۹۸	۰/۷۸	-	-	-
۴	۶۴۶۸۱۳	۷۵۷۳۲۲	۰/۶۴	۷۵۷۳۲۲	۰/۶۴	۷۵۷۳۲۲	۰/۶۴	-	-	-
۵	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱	افزایشی	کاهشی	ثابت
۶	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱	افزایشی	کاهشی	ثابت
۷	۰	۲۴۲۵۹۲۰	۰/۴۰	۲۴۲۵۹۲۰	۰/۴۰	۲۴۲۵۹۲۰	۰/۴۰	کاهشی	کاهشی	کاهشی
۸	۸۴۰۷۸۲	۸۶۰۵۰۸	۰/۸۲	۸۶۰۵۰۸	۰/۸۲	۸۶۰۵۰۸	۰/۸۲	-	-	-
۹	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱	افزایشی	کاهشی	ثابت
۱۰	۰	۶۶۳۵۷۰	۰/۹۳	۶۶۳۵۷۰	۰/۹۳	۶۶۳۵۷۰	۰/۹۳	کاهشی	کاهشی	کاهشی
۱۱	۸۵۶۰۵۲	۹۲۷۹۲۸	۱/۰۸	۹۲۷۹۲۸	۱/۰۸	۹۲۷۹۲۸	۱/۰۸	-	-	-
۱۲	۸۵۴۵۳۷	۹۱۱۶۷۴	۱/۰۲	۹۱۱۶۷۴	۱/۰۲	۹۱۱۶۷۴	۱/۰۲	-	-	-
۱۳	۰	۲۳۳۵۴۴۶	۰/۲۸	۲۳۳۵۴۴۶	۰/۲۸	۲۳۳۵۴۴۶	۰/۲۸	کاهشی	کاهشی	کاهشی

جدول ۱۱- تعیین امتداد پایداری واحدهای کارای قوی جدول (۹) که O-RTS آنها ثابت است

DMU	نتایج مدل (۹)		نتایج مدل (۱۰)		O-RTS امتداد پایداری
	ξ_C^-	ξ_C^+	ξ_C^-	ξ_C^+	
DMU ₂	1	1	1	1	$\{(x_2, y_2)\}$
DMU ₅	1	1	1	1	$\{(x_5, y_5)\}$
DMU ₆	1	1	1	1	$\{(x_6, y_6)\}$
DMU ₉	1	1	1	1	$\{(x_9, y_9)\}$

امتداد پایداری هر یک از این واحدها فقط یک نقطه است.

با توجه به جدول (۱۱) دیده می‌شود که برای هر یک از واحدهای ۲، ۵، ۶ و ۹ داریم: $\xi_C^+ = \xi_C^- = 1$ بنابراین

جدول ۱۲- تعیین امتداد پایداری واحدهای کارای قوی جدول (۹) که O-RTS آنها کاهشی است

DMU	نتایج مدل (۱۱)		O-RTS امتداد پایداری
	ξ_D	ξ_D	
DMU ₇	0/0679	$\{\xi(x_7, y_7) \xi \in (0/0679, 1]\}$	
DMU ₁₀	0/3358	$\{\xi(x_{10}, y_{10}) \xi \in (0/3358, 1]\}$	
DMU ₁₃	0/0208	$\{\xi(x_{13}, y_{13}) \xi \in (0/0208, 1]\}$	

هستند و به راحتی توسط کدهای موجود در DEA مورد استفاده قرار می‌گیرند. در تمامی روش‌های پیشنهادی این مقاله، ارزیابی‌ها به کمک مقادیر بهینه تابع هدف مدل‌های پیشنهادی صورت گرفته‌اند و چون این مقادیر بهینه منحصر بفرد هستند پس این ارزیابی‌ها، دچار چندگانگی در قضاوت نمی‌شوند.

بعنوان یک موضوع تحقیقاتی در آینده، شاید بتوان با مبنا قراردادن رویکرد این مقاله، و با بکارگیری مدل‌های جمعی، روشی برای تحلیل پایداری مولفه‌ای انواع RTS ارائه کرد. برای توسعه‌ی نگرش این مقاله، توصیه می‌شود که روش تعیین پایداری O-RTS ارائه شده در این پژوهش، برای ارزیابی دیگر داده‌ها نظیر داده‌های بازه‌ای، منفی و فازی بکار گرفته شوند.

بمنظور تحلیل پایداری O-RTS یکی از واحدهای کارای قوی T_v ، مثلاً DMU_{10} ، امتداد پایداری متناظر با این DMU یعنی $\{ \xi | \epsilon (0/3358, 1) \}$ را ξ در نظر می‌گیریم. فرض کنید $\tilde{\xi}$ یک مقدار دلخوا از بازه $[0/3358, 1]$ باشد. مثلاً فرض کنید $\tilde{\xi} = 0/64$ در اینصورت چون DMU_{10} دارای O-RTS کاهشی - است پس طبق ادعای آمده در حالت (۳) از تعریف (۴)، بایستی تصویر $(\tilde{\xi}x_{10}, \tilde{\xi}y_{10})$ تحت مدل (۲) یعنی $(x_{10}^{\tilde{\xi}}, y_{10}^{\tilde{\xi}})$ ، نیز نقطه‌ای با O-RTS کاهشی باشد. برای بررسی این مطلب ابتدا مدل (۲) متناظر با $(\tilde{\xi}x_{10}, \tilde{\xi}y_{10})$ را حل می‌کنیم و داریم:

$$(x_{10}^{\tilde{\xi}}, y_{10}^{\tilde{\xi}}) = (67658/5, 1533/976, 888/7609, 85687/7, 20/45226)$$

سپس برای ارزیابی O-RTS نقطه $(x_{10}^{\tilde{\xi}}, y_{10}^{\tilde{\xi}})$ مدل (۵) متناظر با $(x_{10}^{\tilde{\xi}}, y_{10}^{\tilde{\xi}})$ را حل می‌کنیم و داریم: $1.s^{+*} + 1.s^{-*} = 0/0639$ و $\xi^* = 0/98$. بنابراین طبق بند (۲) قضیه (۴)، نقطه‌ی $(x_{10}^{\tilde{\xi}}, y_{10}^{\tilde{\xi}})$ نیز نقطه‌ای با O-RTS کاهشی است و این صحت ادعای آمده در حالت (۳) از تعریف (۴) را برای $\tilde{\xi} = 0/64$ نشان می‌دهد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا یک روش برای تعیین L-RTS و R-RTS پیشنهاد شده که مدل‌های آن برخلاف مدل‌های آمده در تاریخچه موضوع، غیر پارامتریک هستند. سپس با تقسیم بندی مرز مجموعه امکان تولید T_v ، شرایطی فراهم آمده که در آن بتوان به تعریف امتداد پایداری انواع O-RTS واحدهای کارای قوی T_v پرداخت. در ادامه با ایجاد تغییراتی در مدل‌های روش پیشنهادی، روشی برای تعیین امتداد پایداری انواع O-RTS در دسترس قرار گرفته‌است. روش‌های پیشنهاد شده‌ی این متن روی دو مثال عددی اجرا و تحلیل شده‌اند. مدل‌های روش‌های پیشنهادی این نوشته همگی مدل‌های برنامه‌ریزی خطی

فهرست منابع

- [8] Charnes, W.W. Cooper, B. Golany, L. Seiford, J. Stutz, Foundations of data envelopment analysis for pareto-koopmans efficient empirical production functions, *J. Econom.* 30 (1985) 91-107.
- [9] Eslami, R., Khoveyni, M., 2013. Right and Left returns to scales in data analysis, Determining type and measuring value, *Computers & Industrial Engineering*, 15, 500-501.
- [10] Fare, R., Grosskopf, S., Lovell, CAK., 1994. *Production Frontiers*. Cambridge University Press.
- Golany, B., Yu, G., 1997. Estimating Returns to Scale in DEA, *European Journal of Operational Research*, 103, 28-37.
- [11] Hadjicostas, P., Soteriou, A. C. 2006. One-sided elasticities and technical efficiency in multi-output production: a theoretical framework, *European Journal of Operational Research*, 168 (2), 425-449.
- [12] Khodabakhshi, M., Gholami, Y., Kheirollahi, H., 2010. An additive model approach for estimating returns to scale in imprecise data envelopment analysis, *Applied Mathematical Modelling*, 34, 1247-1257.
- [13] Omid, M., Rostamy-Malkhalifeh, M., Payan, A., Hosseinzadeh Lotfi, F., 2017.
- [14] Estimation of Overall Returns to Scale (RTS) of a Frontier Unit Using the Left and Right RTS, *Computational Economics*, <https://doi.org/10.1007/s10614-017-9756-7>.
- [۱] جهانشاهلو، غلامرضا؛ حسین‌زاده لطفی، فرهاد؛ نیکومرام، هاشم؛ ۱۳۸۷. "تحلیل پوششی داده‌ها و کاربردهای آن". تهران: انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم تحقیقات.
- [2] Allahyar, M., Rostamy-Malkhalifeh, M., 2014. An improved approach for estimating returns to scale in DEA, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2, 37(4), 1185-1194.
- [3] Banker, R. D., 1984. Estimating most productive scale size using data envelopment analysis, *European Journal of Operational Research*, 17 35-44.
- [4] Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W.W., 1984. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis, *Management Science* 30, 1078-1092.
- [5] Banker, R. D., Thrall, R. M., 1992. Estimation of Returns to Scale Using Data Envelopment Analysis, *European Journal of Operational Research*, 62, 74-84.
- [6] Banker, R. D., Chang, H., Cooper, W. W., 1996. Equivalence and implementation of alternative methods for determining returns to scale in data envelopment analysis, *European Journal of Operational Research*, 89, 473-81.
- [7] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., 1978. Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research*, 2, 429-444.

[15] Seiford, L.M., Zhu, J., 1999. An investigation of returns to scale in data envelopment analysis, Omega.

[16] Tone, K., Sahoo, B.K., 2004. Degree of scale economies and congestion: A unified DEA approach, European Journal of Operational Research, 158, 755-772.

[17] Zhu, Joe., Shen. Shen, Z., 1995. A Discussion of Testing DMUs' Returns to Scale, European Journal of Operational Research, 81, 590-596.

