دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دوم، شماره هشتم، زمستان ۱۳۹۵
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۹۶

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

# مساله بهترین نقاط تقریب در فضاهای هادامارد با استفاده از مفهوم مرکز مجانبی نسبی

**موسی گابله** *

گروه ریاضی، دانشگاه آیت‌ا...العظمی بروجردی، بروجرد، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۰۵/۲۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۵/۱۱/۱۸

## چکیده

در این مقاله مساله وجود بهترین نقاط تقریب برای رده‌ای از غیر خودنگاشت‌ها که در شرایط غیرانبساطی خاصی صدق می‌کنند مورد مطالعه قرار می‌گیرد. بر این اساس یک نتیجه اصلی مربوط به مرجع [۱] که بیان‌گر وجود بهترین نقطه تقریب برای غیر خود نگاشت‌های غیرانبساطی در فضاهای باناخ به‌طور یکنواخت محدب می‌باشد، بهبود و توسیع داده خواهد شد. همچنین مفهوم جدیدی تحت عنوان مرکز مجانبی نسبی برای یک زوج غیرتهی از مجموعه‌های بسته، کراندار و محدب در فضاهای متریک هادامار معرفی شده و به‌عنوان یک نتیجه از بحث اصلی خواهیم دید که مرکز مجانبی هر دنباله در یک زیرمجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از یک فضای هادامارد دقیقاً شامل یک نقطه می‌باشد. در ضمن با استفاده از ویژگی‌های هندسی مناسب موجود بر فضاهای هادامارد، نتایج وجودی دیگری در باب بهترین نقاط تقریب برای نگاشت‌های غیرانبساطی تعمیم یافته حاصل خواهد شد. در نهایت تلاش می‌شود که با ارائه چند مثال کاربردی به تبیین نتایج بدست آمده، بپردازیم.

**واژه‌های کلیدی:** بهترین نقاط تقریب؛ مرکز مجانبی نسبی؛ فضای متریک هادامارد؛ غیر خودنگاشت غیر انبساطی.

*. Email: gab.moo@gmail.com

## ۱- مقدمه

اصل انقباض باناخ بیان می‌کند که هر خودنگاشت انقباضی تعریف شده بر یک فضای متریک کامل دارای دقیقاً یک نقطه ثابت می‌باشد. به‌علاوه هر دنباله تکراری که نقطه آغازینش هر عنصر فضا باشد به این نقطه ثابت همگرا خواهد بود.

تعمیم‌های جالبی از اصل انقباض باناخ موجود می‌باشد که اکثر آنها با در نظر گرفتن کلاس‌های مختلفی از خودنگاشت‌های انقباظی، دارای شرط اساسی پیوستگی می‌باشند. اکنون به‌طور طبیعی این سوال مطرح می‌شود که اگر با یک غیر خودنگاشت مواجه شویم، مسئله وجودی نقطه ثابت چگونه خواهد بود. این مطلب اولین بار توسط کای‌فن در سال ۱۹۶۹ به‌صورت زیر مورد بررسی واقع گردید.

قضیه ۱. ([۲]) فرض کنید $A$ یک زیرمجموعه ناتهی، فشرده و محدب از فضای برداری نرم‌دار $X$ و $T: A \to X$ یک غیر خودنگاشت پیوسته باشد. در این صورت بردار $x^* \in A$ موجود است به‌طوری‌که:

$$\|x^* - Tx^*\| = dist(\{Tx^*\}, A).$$

حال فرض کنید $A, B$ زیرمجموعه‌هایی ناتهی از فضای متریک $(X, d)$ و $T: A \to B$ یک غیر خودنگاشت باشد. آنچه که مسلم است، معادله نقطه ثابت $Tx = x$ در این حالت لزوماً دارای جواب نمی‌باشد مگر اینکه $A \cap B$ ناتهی باشد. لذا چنانچه $A \cap B = \emptyset$، مسئله نقطه ثابت به مسئله وجودی بهترین نقاط تقریب تعمیم می‌یابد. در واقع نقطه $p \in A$ را یک بهترین نقطه تقریب برای غیرخودنگاشت $T$ می‌گویند هرگاه

$$d(p, Tp) = dist(A, B).$$

اولین بار در سال ۲۰۰۵ وجود بهترین نقاط تقریب برای رده‌ای از غیر خودنگاشت‌ها تحت عنوان نگاشت‌های دوری نسبتاً غیرانبساطی با استفاده از مفهوم هندسی ساختار نرمال مجاوری که روی یک زوج ناتهی و محدب در یک فضای باناخ تعریف می‌شود، بررسی گردید([۳]). این بحث وجودی بعدتر برای رده‌های دیگری از غیر خودنگاشت‌ها مانند انقباض‌های پروکسیمال ([۴])، غیرانبساطی تعمیم‌یافته پروکسیمال ([۵]) و انقباض‌های پروکسیمال چند مقداری ([۱۰]) در فضاهای متریک و باناخ و با استفاده از برخی خواص هندسی در فضاهای مدنظر مورد مطالعه قرار گرفت.

در این مقاله با معرفی کلاس دیگری از غیر خودنگاشت‌ها تحت عنوان نگاشت‌های غیرانبساطی از نوع سوزوکی-برآیند، مسئله وجودی و همگرایی بهترین نقاط تقریب را در فضاهای متریک تحت یکسری شرایط کافی مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ضمن یک خاصیت هندسی به نام مرکز مجانبی نسبی که روی یک زوج ناتهی از زیر مجموعه‌های بسته، کراندار و محدب از یک فضای هادامارد تعریف می‌شود، معرفی خواهد شد که در بررسی وجود بهترین نقاط تقریب برای غیر خودنگاشت‌های غیرانبساطی از نوع سوزوکی مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

## ۲- پیش‌نیازها

در این بخش برخی مفاهیم اساسی و خواص مهم مربوط به فضاهای متریک ژئودزیک را یادآوری می‌نماییم که در ادامه این مقاله مورد استفاده واقع خواهد شد.

همانطور که می‌دانیم فضاهای هیلبرت با توجه به خواص هندسی مناسب که ناشی از نرم القا شده از ضرب داخلی موجود روی آن می‌باشد، دارای کاربردهای فراوانی در شاخه‌های مختلف ریاضی به‌ویژه در آنالیز تابعی می‌باشد (به عنوان مثال به منابع [۸ ، ۷ ، ۶] مراجعه نمایید). از آنجا که فضاهای هیلبرت رده محدودی از فضاهای باناخ را شامل می‌شوند، اخیراً ریاضی‌دانان با الهام گرفتن از خواص هندسی موجود بر فضاهای هیلبرت توانستند فضاهای باناخ متنوع (که لزوماً ضرب داخلی هم نمی‌باشند) با خواص هندسی مطلوبی را به منظور توسیع و بهبود بخشی نتایج پیشین، معرفی نمایند. بر این اساس می‌توان به دو دسته مهم از فضاهای باناخ که در سال ۱۹۳۶ توسط کلارکسون به صورت زیر معرفی شد، اشاره نمود.

**تعریف ۱.** ([۹]) فضای باناخ $X$ را:

(آ) به طور یکنواخت محدب می‌گویند هرگاه تابع اکیداً صعودی $\delta: (0,2] \to [0,1]$ موجود باشد چنان که برای هر $x, y, p \in X$ و $R > 0$ و $r \in [0, 2R]$ داشته باشیم

$$\begin{cases}\|x-p\|\le R,\\ \|y-p\|\le R,\\ \|x-y\|\ge r\end{cases}\Longrightarrow \left\|\frac{x+y}{2}-p\right\| \le \left(1-\delta\left(\frac{r}{R}\right)\right)R;$$

(ب) اکیداً محدب گویند هرگاه برای هر $x,y,p\in X$ و $R>0$،

$$\begin{cases}\|x-p\|\le R,\\ \|y-p\|\le R,\\ x\neq y\end{cases}\Longrightarrow \left\|\frac{x+y}{2}-p\right\| < R.$$

فضاهای هیلبرت و $l_p$ها به ازای $1<p<\infty$ نمونه‌ای از فضاهای به‌طور یکنواخت محدب می‌باشند. در ضمن همان‌طور که مشهود است، هر فضای به‌طور یکنواخت محدب، اکیداً محدب می‌باشد حال آنکه عکس این مطلب لزوماً برقرا نیست ([۹]).

توسیع‌های خواص هندسی فضاهای هیلبرت به فضاهای باناخ محدود نمی‌شود. همان‌طور که در ادامه ملاحظه خواهدشد، تعمیم‌های جالبی از برخی خواص هندسی فضاهای هیلبرت به فضاهای متریک نیز مورد توجه بسیاری از پژوهشگران واقع شده است.

فضای متریک $(X,d)$ را یک فضای ژئودزیک می‌گویند هرگاه هر دو نقطه متمایز را بتوان به‌وسیله یک مسیر (راه) به یکدیگر متصل نمود. به بیان ریاضی، برای هر دو نقطه متمایز $x,y$ در $X$ نگاشت $c:[0,l]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow X$ موجود باشد که $c(0)=x, c(l)=y$ و $d\big(c(t),c(t')\big)=|t-t'|$، برای هر $t,t'\in[0,1]$.

فضای متریک $(\mathrm{X},d)$ را فضای به‌طور یکتا ژئودزیک می‌گویند هرگاه هر دو نقطه متمایز آن را بتوان به وسیله یک مسیر یکتا به‌هم متصل نمود. اگر $(X,d)$ یک فضای به‌طور یکتا ژئودزیک باشد، در این صورت مسیر متصل کننده هر دو نقطه مانند $x\,,y$ را با $[x\,,y]$ نمایش می‌دهند. در ضمن برای هر $x,y\ \in X$ و $t\in[0\,,1]$ قرار می‌دهیم:

$$]x,y[\coloneqq[x,y]-\{x,y\},$$
$$c(t0+(1-t)l)\coloneqq tx\oplus(1-t)y.$$

زیرمجموعه $A$ از فضای به‌طور یکتا ژئودزیک $X$ محدب نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x,y\in A$ داشته باشیم $[x,y]\subset A$. برای اطلاعات بیشتر در مورد فضاهای ژئودزیک می‌توان به منابع [۱۳، ۱۲، ۱۱] مراجعه نمود.

مفهوم اکیداً محدب بودن فضاهای ژئودزیک در [۱۴] به‌صورت زیر معرفی گردید.

**تعریف ۲.** فضای ژئودزیک $(X,d)$ را اکیداً محدب می‌گویند هرگاه برای هر $r>0$ و هر $a,x,y\in X$ با شرط $x\neq y,\ d(x,a)\le r,\ d(y,a)\le r,$ داشته باشیم $d(a,p)<r$ که در آن $p\in]x,y[$.

متذکر می‌شویم که هر فضای ژئودزیک اکیداً محدب یک فضای به‌طور یکتا ژئودزیک می‌باشد. در ضمن هر فضای باناخ اکیداً محدب را می‌توان به‌عنوان یک فضای ژئودزیک اکیداً محدب در نظر گرفت.

منظور از مثلث ژئودزیک $\Delta(x_1,x_2,x_3)$ در فضای ژئودزیک $(X,d)$ عبارت است از سه عنصر $x_1,x_2,x_3\in X$ به‌عنوان رئوس مثلث و سه پاره‌خط ژئودزیک بین نقاط $x_i\,,x_j$ برای $i,j\in\{1,2,3\}$ به عنوان اضلاع مثلث. همچنین مثلث $\bar{\Delta}(x_1,x_2,x_3)\coloneqq\Delta(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ یک مثلث همسنج برای مثلث ژئودزیک $\Delta$ نامیده می‌شود هرگاه برای $i,j\ \in\{1,2,3\}$ داشته باشیم:

$$d_{\mathbb{R}^2}(\bar{x_i},\bar{x_j})=d(x_i,x_j).$$

فضای ژئودزیک $(X,d)$ را یک فضای $\mathrm{CAT}(0)$ می‌گویند هرگاه برای مثلث ژئودزیک $\Delta(x_1,x_2,x_3)$ با مثلث هم‌سنج $\bar{\Delta}$ نابرابری زیر برقرار باشد:

$$d(x,y)\le d_{\mathbb{R}^2}(\bar{x},\bar{y}),\ \forall x,y\in\Delta,\ \forall\bar{x},\bar{y}\in\bar{\Delta}.$$

**تعریف۳.** فضای ژئودزیک $(X,d)$ را یک فضای هادامارد می‌گویند هرگاه $X$ یک فضای کامل و $\mathrm{CAT}(0)$ باشد.

در ادامه به بیان دو لم مهم که در نتایج اصلی این مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت، می‌پردازیم.

لم ۱. ([۱۲]) فرض کنید $(X,d)$ یک فضای $\mathrm{CAT}(0)$ باشد. دراین‌صورت

$$d(tx\oplus(1-t)y,tu\oplus(1-t)v)\le td(x,u)+(1-t)d(y,v),$$

برای هر $x,y,u,v\in X$ و $t\in[0,1]$.

لم۲. ([۱۲]) فضای ژئودزیک $(X,d)$ یک فضای $\mathrm{CAT}(0)$ است اگر و تنها اگر رابطه زیر موسوم به نامساوی CN برقرار باشد:
برای هر $p,q,r \in X$ و هر $m \in X$ با

$$d(q,m) = d(r,m) = \frac{1}{2}d(q,r)$$

داشته باشیم

$$d(p,q)^2 + d(p,r)^2 \geq 2d(m,p)^2 + \frac{1}{2}d(q,r)^2$$

**تعریف ۴.** ([۱۲]) فضای ژئودزیک $(X,d)$ انعکاسی نامیده می‌شود هرگاه هر زنجیر نزولی از زیر مجموعه‌های ناتهی، بسته، کراندار و محدب در $X$ دارای اشتراک غیرتهی باشد.

هر فضای باناخ انعکاسی را می‌توان به‌عنوان یک فضای ژئودزیک انعکاسی در نظر گرفت. همچنین شایان ذکر است که هر فضای هادامارد نیز یک فضای انعکاسی می‌باشد ([۱۲]).

این بخش را با چند نمادگذاری متداول به پایان می‌بریم. فرض کنید $(A,B)$ یک زوج ناتهی از زیر مجموعه‌های فضای متریک $(X,d)$ باشد. قرار می‌دهیم:

$$d^*(x,y) := d(x,y) - dist(A,B), \forall (x,y) \in A \times B,$$
$$A_0 := \{x \in A : d(x,y') = dist(A,B)\ ;\ y' \in B\}.$$
$$B_0 := \{y \in B : d(x',y) = dist(A,B)\ ;\ x' \in A\}.$$

لازم به ذکر است که $(A_0,B_0)$ لزوماً ناتهی نمی‌باشد، اما در حالت خاص اگر $(A,B)$ یک زوج ناتهی، بسته و محدب در فضای هادامارد $X$ باشد، آنگاه $(A_0,B_0)$ نیز ناتهی، بسته و محدب خواهد بود ([۱۶]).

همچنین یادآوری می‌کنیم که زوج ناتهی $(A,B)$ در فضای متریک $(X,d)$ را شارپ پروکسیمال می‌گویند ([۱۷]) هرگاه برای هر $x \in A$ عنصر یکتای $y \in B$ موجود باشد چنانچه $d(x,y) = dist(A,B)$. در این صورت عنصر $x \in A$ را نقطه پروکسیمال $y \in B$ و به همین ترتیب $y \in B$ را نقطه پروکسیمال $x \in A$ گویند. به طور مثال اگر $(A,B)$ یک زوج محدب و فشرده در فضای ژئودزیک اکیداً محدب $X$ باشد، آنگاه $(A,B)$ یک زوج شارپ پروکسیمال خواهد بود.

در این مقاله عملگر تصویر متریک روی زیرمجموعه ناتهی $C$ از فضای متریک $(X,d)$ با $\mathrm{P_C}: X \to 2^C$ نشان داده می‌شود که

$$P_C(x) := \{y \in C :\ d(x,y) = dist(\{x\},C)\},$$

و $2^C$ معرف خانواده تمام زیرمجموعه‌های $C$ می‌باشد. لازم به ذکر است که اگر $C$ یک زیرمجموعه ناتهی، بسته و محدب ازفضای هادامارد $X$ باشد، آنگاه عملگر تصویر $P$ تک‌مقداری خواهد بود ([۱۱]).

## ۳- بهترین نقاط تقریب برای نگاشت‌های غیرانبساطی از نوع سوزوکی و برآیند

پیش از پرداختن به بحث اصلی این مقاله یادآوری می‌کنیم که نگاشت $T: A \to B$ غیرانبساطی نامیده می‌شود هرگاه

$$d(Tx,Ty) \leq d(x,y), \qquad \forall x,y \in A,$$

که در آن $A$ و $B$ زیرمجموعه‌هایی ناتهی از فضای متریک $(X,d)$ می‌باشند.

**تعریف ۵.** فرض کنید $(A,B)$ یک زوج ناتهی از زیرمجموعه‌های فضای متریک $(X,d)$ باشد. غیر خودنگاشت $T: A \to B$ را غیرانبساطی از نوع سوزوکی و برآیند می‌گویند هرگاه $\beta \in [0,\infty)$ موجود باشد چنان‌که

$$\frac{1}{2+\beta}d^*(x,Tx) \leq d(x,y) \Longrightarrow\ d(Tx,Ty) \leq d(x,y) + \beta d^*(Tx,y),$$

برای هر $x,y \in A$.

اگر در تعریف فوق $\beta = 0$ در نظر گرفته شود، آنگاه غیر خودنگاشت $T$ غیرانبساطی تعمیم یافته به مفهوم سوزوکی خواهد بود که در [۱۸] معرفی شده است. خاطرنشان می‌شود که چنان‌چه $A = B$ در نظر گرفته شود، مدل تعمیم‌یافته‌ی نوعی از خودنگاشت‌های انقباضی که توسط برآیند در سال ۲۰۰۴ در منبع [۱۹] معرفی گردید، حاصل می‌شود.

لم۳. فرض کنید $(A,B)$ یک زوج ناتهی و شارپ پروکسیمال در فضای متریک $(X,d)$ و $T: A \to B$ یک نگاشت غیرانبساطی از نوع سوزوکی و برآیند باشد به‌طوری‌که $T(A_0) \subset B_0$. در این صورت برای هر $x,y \in A_0$ اگر $u \in A_0$ نقطه پروکسیمال $Tx$ باشد،

آنگاه یا

$$\frac{1}{2+\beta} d^*(x, Tx) \leq d(x, y),$$

و یا

$$\frac{1}{2+\beta} d^*(u, Tu) \leq d(u, y),$$

که دراین‌صورت یا

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) + \beta d^*(Tx, y),$$

و یا

$$d(Tu, Ty) \leq d(u, y) + \beta d^*(Tu, y),$$

اثبات. فرض کنید $x, y \in A_0$ عناصر دلخواهی باشند. چون $(A, B)$ یک زوج شارپ پروکسیمال بوده و $T(A_0) \subset B_0$ پس عضو یکتای $u \in A_0$ موجود است که $d(u, Tx) = dist(A, B)$. اگر $u = x$ باشد، آنگاه $d(x, Tx) = dist(A, B)$ و نتیجه حاصل می‌شود. پس فرض کنید $x \neq u$ اگر

$$\frac{1}{2+\beta} d^*(x, Tx) > d(x, y)$$

و $\frac{1}{2+\beta} d^*(u, Tu) > d(u, y)$، آنگاه

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq d(x, u) + d(u, Tx) \\ &= d(x, u) + dist\,(A, B), \end{aligned}$$

پس

$$\frac{1}{2+\beta} d^*(x, Tx) < d^*(x, Tx), \leq d(x, u).$$

از آنجا که $T$ غیرانبساطی به مفهوم سوزوکی و برآیند می‌باشد،

$$\begin{aligned} &d(Tx, Tu) \leq d(x, u) + \beta d^*(Tx, u) \\ &= d(x, u). \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} &d(x, u) \leq d(x, y) + d(y, u) \\ &< \frac{1}{2+\beta} [d^*(x, Tx) + d^*(u, Tu)] \\ &\leq \frac{1}{2+\beta} [d(x, u) + d^*(u, Tx) \\ &\qquad + d(Tx, Tu)] \\ &\leq \frac{1}{2+\beta} [d(x, u) + d(x, u) \\ &= \frac{2}{2+\beta} d(x, u) \leq d(x, u)\,. \end{aligned}$$

که یک تناقض می‌باشد و این اثبات را کامل می‌کند.

لم۴. فرض کنید $(A, B)$ یک زوج ناتهی و شارپ پروکسیمال در فضای متریک $(X, d)$ و $T: A \to B$ یک نگاشت غیرانبساطی از نوع سوزوکی و برآیند باشد به طوری که $T(A_0) \subset B_0$. در این صورت برای هر $x, y \in A_0$ خواهیم داشت

$$d^*(x, Ty) \leq (3 + 2\beta) d(x, u) + (1 + \beta) d(x, y),$$

که در آن $u \in \mathrm{A}_0$ نقطه پروکسیمال $Tx$ می‌باشد.

اثبات. بنا به لم ۳ یا

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) + \beta d^*(Tx, y)$$

و یا

$$d(Tu, Ty) \leq d(u, y) + \beta d^*(Tu, y).$$

فرض کنید

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) + \beta d^*(Tx, y).$$

آنگاه

$$\begin{aligned} &d(x, Ty) \leq d(x, Tx) + d(Tx, Ty) \\ &\leq d(x, Tx) + d(x, y) + \beta d^*(Tx, y) \\ &\leq d(x, u) + d(u, Tx) + d(x, u) + d(u, y) \\ &\qquad + \beta d^*(Tx, u) + \beta d(u, y) \\ &\leq 2d(x, u) + dist(A, B) \\ &\qquad + (1 + \beta) d(u, y) \\ &\leq 2d(x, u) + dist(A, B) \\ &\qquad + (1 + \beta)[d(u, x) \\ &\qquad + d(x, y)] \\ &= (3 + \beta) d(x, u) + (1 + \beta) d(x, y) \\ &\qquad + dist(A, B). \end{aligned}$$

بنابراین

$$d^*(x, Ty) \leq (3 + 2\beta) d(x, u) + (1 + \beta) d(x, y).$$

حال فرض کنید

$$d(Tu, Ty) \leq d(u, y) + \beta d^*(Tu, y).$$

توجه کنید که چون

$$(2 + \beta) d^*(x, Tx) \leq (2 + \beta)[d(x, u) + d^*(u, Tx)] < d(x, u),$$

پس

$$\begin{aligned} &d(Tx, Tu) \leq d(x, u) + \beta d^*(Tx, u) \\ &= d(x, u). \end{aligned}$$

لذا

$$d(x, Ty) \leq d(x, Tx) + d(Tx, Tu) + d(Tu, Ty) \leq d(x, u) + d(u, Tx) + d(x, u) + d(u, y) + \beta d^*(Tu, y) \leq d(x, u) + d(u, Tx) + d(x, u) + d(x, u) + d(x, y) + \beta d(Tu, Tx) + \beta d^*(Tx, u) +$$

$\beta d(u,y) \leq (3+2\beta)d(x,u) +$
$(1+\beta)d(x,y) + dist(A,B),$

که این نشان می‌دهد

$d^*(x,Ty) \leq (3+2\beta)d(x,u) +$
$(1+\beta)d(x,y),$

و حکم کامل است.

در ادامه یک خاصیت هندسی روی یک زوج ناتهی از زیرمجموعه‌های یک فضای متریک را بیان می‌نماییم.

**تعریف۶.** ([۲۰]) می‌گوییم که زوج ناتهی $(A,B)$ در فضای متریک $(X,d)$ دارای خاصیت UC می‌باشد هرگاه $\{x_n\},\{z_n\}$ دنباله‌هایی در $A$ و $\{y_n\}$ دنباله‌ای در $B$ باشد به طوری که

$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} d(z_n,y_n)$
$= dist(A,B),$

آنگاه $d(x_n,z_n) \to 0$.

به عنوان مثال اگر $(A,B)$ یک زوج ناتهی و بسته از فضای باناخ به طور یکنواخت محدب $X$ باشد چنان‌که $A$ محدب باشد، آنگاه $(A,B)$ دارای خاصیت UC خواهد بود (لم ۸. ۳ از [۲۱]).

**تعریف ۷.** فرض کنید $(A,B)$ یک زوج ناتهی از زیرمجموعه‌های فضای متریک $(X,d)$ و $T:A\to B$ یک غیر خودنگاشت باشد. دنباله $\{x_n\}$ در$A_0$ را یک دنباله تقریبی نگاشت $T$ می‌گوییم هرگاه

(آ) $d(x_{n+1},Tx_n) = dist(A,B)$ برای هر $n$.

(ب) $lim_{n\to\infty} d(x_n,Tx_n) = dist(A,B)$

اکنون آماده هستیم تا اولین نتیجه وجودی این بخش را بیان نماییم.

قضیه ۲. فرض کنید $(A,B)$ یک زوج ناتهی و شارپ پروکسیمال در فضای متریک $(X,d)$ باشد چنان‌که $(B,A)$ دارای خاصیت UC است. فرض کنید $T:A\to B$ یک نگاشت غیرانبساطی از نوع سوزوکی و برآیند باشد به‌طوری که $T(A_0)\subset B_0$ و اینکه $T$ دارای یک دنباله تقریبی در $A_0$ باشد. اگر $A_0$ فشرده باشد، آنگاه $T$ دارای یک بهترین نقطه تقریب خواهد بود.

اثبات. دنباله $\{x_n\}$ در $A_0$ را به عنوان یک دنباله تقریبی برای $T$ در نظر بگیرید. پس

$d(x_{n+1},Tx_n) = dist(A,B),$
$d(x_n,Tx_n) \to dist(A,B).$

از آنجا که $(B,A)$ دارای خاصیت UC می‌باشد نتیجه می‌شود که $d(x_n,x_{n+1}) \to 0$.

چون $A_0$ فشرده است، زیردنباله $\{x_{n_k}\}$ موجود است که به عنصری مانند $p\in A_0$ همگرا باشد. اکنون بنا بر لم ۴ خواهیم داشت

$d^*(x_{n_k},Tp) \leq (3+2\beta)d(x_{n_k},x_{n_k+1}) +$
$(1+\beta)d(x_{n_k},p).$

اگر در رابطه اخیر $k\to\infty$ نتیجه می‌شود که $d(p,Tp) = dist(A,B)$ به این معنا که $p$ یک بهترین نقطه تقریب $T$ خواهد بود.

نتایج وجودی زیر مستقیماً از قضیه ۲ بدست می‌آیند.

نتیجه۱. فرض کنید $(A,B)$ یک زوج ناتهی، بسته، کراندار و محدب در فضای باناخ به‌طور یکنواخت محدب $X$ و $T:A\to B$ یک نگاشت غیرانبساطی از نوع سوزوکی باشد به‌طوری که $T(A_0)\subset B_0$ و اینکه $T$ دارای یک دنباله تقریبی در $A_0$ باشد. اگر $A_0$ فشرده باشد، آنگاه $T$ دارای یک بهترین نقطه تقریب خواهد بود.

نتیجه ۲. فرض کنید $(A,B)$ یک زوج ناتهی، بسته، کراندار و محدب در فضای باناخ به‌طور یکنواخت محدب $X$ و $T:A\to B$ یک نگاشت غیرانبساطی باشد به‌طوری‌که $T(A_0)\subset B_0$. اگر $A_0$ فشرده باشد، آنگاه $T$ دارای یک بهترین نقطه تقریب خواهد بود.

اثبات. کافیست توجه کنیم که با توجه به قضیه ۳. ۲ از مقاله [۱] نگاشت غیرانبساطی $T$ دارای یک دنباله تقریبی می‌باشد.

همان‌طور که ملاحظه گردید فشرده بودن $A_0$ در قضیه ۲ نقش مهمی در اثبات آن ایفا می‌کند. در ادامه می‌خواهیم با در نظر گرفتن شرایط کافی دیگری به بررسی وجود بهترین نقاط تقریب برای غیر خودنگاشت‌های غیرانبساطی از نوع سوزوکی در فضاهای هادامارد بپردازیم. برای این منظور لم‌های مهم زیر را بیان می‌نماییم.

لم ۵. ([۲۲]) فرض کنید $A$ یک زیرمجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از فضای هادامارد $X$ باشد. دنباله‌های $\{z_n\},\{\omega_n\}$ در $X$ و $\lambda\in(0,1)$ را چنان در نظر

بگیرید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $z_{n+1} = \lambda\omega_n \oplus (1-\lambda)z_n$ و $d(\omega_{n+1}, \omega_n) \le d(z_{n+1}, z_n)$ . آنگاه

$$\limsup d(\omega_n, z_n) = 0.$$

لم ۶. ([۲۳]) فرض کنید $(A, B)$ یک زوج ناتهی، بسته و محدب از فضای هادامارد $X$ باشد چنانچه $B$ کراندار است. اگر $x_1, x_2 \in A$ و $y_1, y_2 \in B$ موجود باشند به طوری که

$$\mathrm{d}(x_i, y_i) = dist(A, B), \quad i \in \{1,2\}.$$

آنگاه

$$d(x_1, x_2) = d(y_1, y_2).$$

گزاره ۱. فرض کنید $(A, B)$ یک زوج ناتهی، بسته و محدب در فضای هادامارد $X$ باشد چنانچه $B$ کراندار و $T: A \to B$ یک نگاشت غیرانبساطی از نوع سوزوکی باشد به‌طوری‌که $T(A_0) \subset B_0$. در این صورت $T$ دارای یک دنباله تقریبی در $A_0$ خواهد بود.

اثبات. عنصر $x_0 \in A_0$ را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه $T(A_0) \subset B_0$، عضو $x_1 \in A_0$ را می‌توان چنان انتخاب نمود که $d(x_1, Tx_0) = dist(A, B)$. قرار دهید

$$x_2 := \frac{1}{2}x_0 \oplus \frac{1}{2}x_1.$$

از آنجا که $A_0$ محدب می‌باشد، $x_2 \in A_0$. مجدداً با توجه به اینکه $T(A_0) \subset B_0$ پس عنصر $x_3 \in A_0$ موجود است چنان که $d(x_3, Tx_2) = dist(A, B)$. تعریف کنید

$$x_4 := \frac{1}{2}x_2 \oplus \frac{1}{2}x_3 \in A_0.$$

با ادامه همین روند و با استقرار می‌توان دنباله $\{x_n\}$ در $A_0$ را چنان در نظر گرفت که

$$d(x_{2n+3}, Tx_{2n+2}) = dist(A, B) = d(x_{2n+1}, Tx_{2n}). \quad (۱)$$

$$x_{2n+2} = \tfrac{1}{2}x_{2n} \oplus \tfrac{1}{2}x_{2n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (۲)$$

اکنون بنابر لم ۶ خواهیم داشت

$$d(x_{2n+3}, x_{2n+1}) = d(Tx_{2n+2}, Tx_{2n}), \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (۳)$$

از رابطه (۲) نتیجه می‌شود که

$$d(x_{2n+2}, x_{2n}) = d(\tfrac{1}{2}x_{2n} \oplus \tfrac{1}{2}x_{2n+1}, x_{2n}) = \tfrac{1}{2}d(x_{2n+1}, x_{2n}). \quad (۴)$$

و لذا

$$\tfrac{1}{2}d(x_{2n}, Tx_{2n}) \le \tfrac{1}{2}[d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, Tx_{2n})] = d(x_{2n+2}, x_{2n}) + \tfrac{1}{2}dist(A, B).$$

پس

$$\frac{1}{2}d^*(x_{2n}, Tx_{2n}) \le d(x_{2n+2}, x_{2n}). \quad (۵)$$

از آنجا که $T$ یک نگاشت غیرانبساطی به مفهوم سوزوکی می‌باشد،

$$d(Tx_{2n+2}, Tx_{2n}) \le d(x_{2n+2}, x_{2n}) \quad (۶)$$

اکنون از رابطه (۳) خواهیم داشت

$$d(x_{2n+3}, x_{2n+1}) \le d(x_{2n+2}, x_{2n}).$$

در نتیجه

$$\begin{cases} x_{2n+2} = (1-\lambda)x_{2n} \oplus \lambda\, x_{2n+1} \\ d(x_{2n+3}, x_{2n+1}) \le d(x_{2n+2}, x_{2n}) \end{cases}$$

بنابراین با استفاده از لم ۶ ، $d(x_{2n+1}, x_{2n}) \to 0$. از روابط (۴) و (۵) بدست می‌آوریم:
$d^*(x_{2n,}Tx_{2n}) \to 0$ و یا به‌طور معادل
$d(x_{2n}, Tx_{2n}) \to dist(A, B)$.

لذا دنباله $\{x_{2n}\}$ که به صورت فوق ساخته شد، یک دنباله تقریبی برای نگاشت $T$ خواهد بود.

گزاره ۲. فرض کنید $(A, B)$ یک زوج ناتهی، بسته و محدب در فضای هادامارد $X$ باشد چنانچه $B$ کراندار است. نگاشت $P: B_0 \to A_0$ را با ضابطه $Py := P_{A_0}(y)$ در نظر بگیرید.

در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

(آ) هر نقطه $B_0$ یک بهترین نقطه تقریب نگاشت $P$ می‌باشد.

(ب) $P$ یک ایزومتری است.

(ج) $P$ پوشاست.

(د) $P$ آفین می‌باشد.

اثبات. (آ) بنا بر گزاره ۱. ۳ از [۱۶] زوج $(A_0, B_0)$ ناتهی، بسته و محدب می‌باشد. فرض کنید $y \in B_0$ . آنگاه بنابر تعریف عملگر تصویر متریک، $d\left(y, P_{B_0}(y)\right) = dist(y, B_0)$. از طرفی عنصر یکتای $x \in A_0$ موجود است به طوری که

$$d(x, y) = dist\ (A, B).$$

پس

$$dist(A, B) \le d\left(x, P_{B_0}(y)\right) = dist\ (y, B_0) \le d(x, y) = dist\ (A, B),$$

و لذا $d(y, Py) = dist(A, B)$ برای هر $y \in B_0$ .

(ب) فرض کنید $y_1, y_2 \in B_0$ . بنابر قسمت (آ)

$$d(y_1, Py_1) = d(y_2, Py_2) = dist\ (A, B).$$

با استفاده از لم ۶، $d(Py_1, Py_2) = d(y_1, y_2)$.

(ج) فرض کنید $u \in A_0$. آنگاه $v \in B_0$ موجود است چنان‌که $d(u, v) = dist(A, B)$. مجدداً با استفاده از قسمت (آ) خواهیم داشت $d(v, Pv) = dist(A, B)$ ولذا $u = Pv$. در نتیجه $P(B_0) = A_0$.

(د) عناصر $y_1, y_2 \in B_0$ را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه $X$ یک فضای $\mathrm{CAT}(0)$ می‌باشد و با استفاده از لم۱،

$$dist(A, B) \le d(\lambda v_1 \oplus (1-\lambda) v_2, \lambda P v_1 \oplus (1-\lambda) P v_2) \le \lambda d(v_1, Pv_1) + (1-\lambda) d(v_2, Pv_2) = dist(A, B).$$

در نتیجه

$$P(\lambda v_1 \oplus (1-\lambda) v_2) = \lambda P v_1 \oplus (1-\lambda) P v_2$$

به این معنا که p آفین می‌باشد.

در ادامه مفهوم مرکز مجانبی نسبی را در فضاهای هادامارد معرفی کرده و با استفاده از آن نتیجه‌ای مشابه قضیه ۲ برای نگاشت‌های غیرانبساطی به مفهوم سوزوکی تحت شرایط کافی دیگری بیان می‌نماییم.

**تعریف ۸.** فرض کنید $(A, B)$ یک زوج ناتهی، بسته، کراندار و محدب در فضای هادامارد $X$ باشد. برای هر دنباله $\{x_n\}$ در $A_0$ قرار می‌دهیم:

$$\delta_y(\{x_n\}) = \lim_{n\to\infty} \sup d(x_n, Py), \forall\, y \in B_0,$$
$$\delta_{B_0}(\{x_n\}) = \inf\{\delta_y(\{x_n\}) : y \in B_0\},$$
$$\mathrm{C}_{B_0}(\{x_n\}) = \{y \in B_0 :\ \delta_y(\{x_n\}) = \delta_{B_0}(\{x_n\})\}.$$

در این‌صورت $\mathrm{C}_{B_0}(\{x_n\})$ را مرکز مجانبی نسبی دنباله $\{x_n\}$ در $A_0$ نسبت به $B_0$ می‌نامند.

اگر در حالت خاص $A = B$ باشد، آنگاه $P$ نگاشت همانی بر $A$ بوده و $\mathrm{C_A}(\{x_n\})$ را مرکز مجانی دنباله $\{x_n\}$ در $A$ می‌نامند.

گزاره۳. فرض کنید $(A, B)$ یک زوج ناتهی، بسته، کراندار و محدب در فضای هادامارد $X$ باشد. دراین‌صورت مرکز مجانبی نسبی هر دنباله در $A_0$ نسبت به $B_0$ دقیقاً شامل یک عضو خواهد بود.

اثبات. قرار دهید $r := \delta_{B_0}(\{x_n\})$ فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. در این صورت $y_0 \in B_0$ موجود است که

$$\lim_{n\to\infty} \sup d(x_n, Py_0) < r + \varepsilon,$$

و لذا $N \epsilon \mathbb{N}$ موجود است به قسمی که $d(x_n, Py_0) < r + \epsilon$ برای هر $n \ge N$. قرار دهید

$$C_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=j}^{\infty} B(x_n; r+\varepsilon) \cap A_0).$$

به وضوح $Py_0 \epsilon C_\varepsilon \neq \emptyset$. همچنین $C_\varepsilon$ محدب بوده و بنابر گزاره ۴. ۱ از منبع [۱۲]، $\overline{C_\varepsilon}$ نیز محدب می‌باشد. از آنجا که $X$ انعکاسی می‌باشد،

$$C := \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{C_\varepsilon} \neq \emptyset.$$

حال اگر $u \in C$، آنگاه $v \in B_0$ و عدد طبیعی $k$ موجوداند چنان که $u = Pv$ و $Pv \in B(x_n; r+\varepsilon)$ برای هر $n \ge k$. پس

$$\lim_{n\to\infty} \sup d(x_n, Pv) < r + \varepsilon,$$

برای هر $\varepsilon > 0$ و لذا

$$Pv \in C_{B_0}(\{x_n\}) \neq \emptyset.$$

در ادامه نشان می‌دهیم که $C_{B_0}(\{x_n\})$ تک عضوی می‌باشد. فرض کنید $\upsilon_1, \upsilon_2 \in C_{B_0}(\{x_n\})$ قرار دهید.

$$m := \frac{1}{2}P\upsilon_1 \oplus \frac{1}{2}P\upsilon_2 = P(\frac{1}{2}\upsilon_1 \oplus \frac{1}{2}\upsilon_2)$$

در این صورت $m \in A_0$ و اینکه

$$r \leq \lim_{n\to\infty} \sup d(x_n, m),$$
$$\lim_{n\to\infty} \sup d(x_n, P\upsilon_1) = r = \lim_{n\to\infty} \sup d(x_n, P\upsilon_2).$$

با توجه به نابرابری CN در فضاهای CAT(0) خواهیم داشت

$$r^2 \leq \lim_{n\to\infty} \sup d(x_n, m)^2 \leq \frac{\lim_{n\to\infty} \sup d(x_n, P\upsilon_1)^2 + \lim_{n\to\infty} \sup d(x_n, P\upsilon_2)^2}{2} - \frac{1}{4}d(P\upsilon_1, P\upsilon_2)^2 = r^2 - \frac{1}{4}d(P\upsilon_1, P\upsilon_2)^2.$$

پس $P\upsilon_1 = P\upsilon_2$ که چون P یک ایزومتری است (گزاره ۲) پس می‌بایست $\upsilon_1 = \upsilon_2$ و لذا $C_{B_0}(\{x_n\})$ تک مقداری خواهد بود.

نتیجه ۳. اگر $A$ یک زیرمجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب در فضای هادامارد $X$ باشد، آنگاه مرکز مجانبی هر دنباله در $A$ دقیقاً شامل یک نقطه خواهد بود.

**تعریف ۹.** ([۲۴]) زوج ناتهی $(A, B)$ در فضای متریک $(X, d)$ را فشرده تقریبی می‌گویند هرگاه برای هر دنباله $(\{x_n\}, \{y_n\})$ در $A \times B$ چنان‌چه $d(x_n, y_n) \to dist(A, B)$، آنگاه دنباله مذکور دارای یک زیردنباله همگرا در $A \times B$ باشد.

به‌وضوح یک زوج فشرده تقریبی لزوماً فشرده نمی‌باشد.

اکنون به بیان قضیه وجودی زیر برای غیر خودنگاشت‌های غیرانبساطی با استفاده از مفهوم مرکز مجانبی نسبی برای دنباله‌های تقریبی خواهیم پرداخت.

قضیه۳. فرض کنید $(A, B)$ یک زوج ناتهی، بسته، کراندار و محدب در فضای هادامارد $X$ و $T: A \to B$ یک نگاشت غیرانبساطی باشد به‌طوری که $T(A_0) \subset B_0$. آنگاه مرکز جانبی نسبی هر دنباله تقریبی در $A_0$ نسبت به $B_0$ یک بهترین نقطه تقریب برای نگاشت $T$ خواهد بود. در ضمن اگر زوج $(A, B)$ فشرده تقریبی باشد آنگاه هر دنباله تقریبی دارای یک زیردنباله همگرا به بهترین نقطه تقریب نگاشت $T$ خواهد بود.

اثبات. فرض کنید $\{z_n\}$ یک دنباله تقریبی برای نگاشت $T$ باشد. توجه داریم که بنا بر گزاره ۱ این دنباله موجود بوده و

$$d(z_n, Tz_n) \to dist(A, B),$$
$$d(z_n, z_{n+1}) \to 0.$$

با استفاده از گزاره۳، $C_{B_0}(\{z_n\})$ تک عضوی می‌باشد. فرض کنید $C_{B_0}(\{z_n\}) = \{\upsilon\}$. آنگاه $d^*(\upsilon, P\upsilon) = 0 \leq d(z_n, P\upsilon)$. باتوجه به اینکه $d(z_{n+1}, Tz_n) = dist\,(A, B)$، نقطه $z_{n+1}$ یک نقطه پروکسیمال $Tz_n$ خواهد بود. اکنون با توجه به ایزومتری بودن $P$ و غیرانبساطی بودن نگاشت $T$ خواهیم داشت

$$d(z_{n+1}, PTP\upsilon) = d(PTz_n, PTP\upsilon) = d(Tz_n, TP\upsilon) \leq d(z_n, P\upsilon).$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} \sup d(z_n, PTP\upsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \sup[d(z_n, z_{n+1}) + d(z_{n+1}, PTP\upsilon)] \leq \lim_{n\to\infty} \sup d(z_n, P\upsilon).$$

پس می‌بایست $TP\,\upsilon = \upsilon$. اکنون داریم

$$d(TP\upsilon, P\upsilon) = d(\upsilon, P\upsilon) = dist(A, B),$$

و لذا $P\upsilon$ بهترین نقطه تقریب نگاشت $T$ خواهد بود.

نتیجه۴. فرض کنید $A$ یک زیرمجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب در فضای هادامارد $X$ باشد. اگر $T: A \to A$ یک خود نگاشت غیرانبساطی باشد، آنگاه مرکز مجانبی هر دنباله تقریبی (نقطه ثابت)، یک نقطه ثابت نگاشت $T$ خواهد بود.

مسئله ۱. متذکر می‌شویم که در قضیه ۳ به‌منظور تعیین بهترین نقاط تقریب در مراکز مجانبی نسبی، نگاشت مورد بحث غیرانبساطی در نظر گرفته شد. حال این سوال مطرح می‌شود که اگر نگاشت $T$ در قضیه ۳ غیرانبساطی به مفهوم سوزوکی باشد، آیا نتیجه مشابه حاصل می‌شود؟

تذکر۱. شایان ذکر است که بحث وجودی بهترین نقاط تقریب برای غیر خودنگاشت‌های غیرانبساطی به مفهوم

سوزوکی را می‌توان از قضیه نقطه ثابت متناظر به نحوی که اشاره خواهد شد نتیجه گرفت. آنچه که در قضیه ۳ حائز اهمیت می‌باشد این است که با شناسایی دنباله‌های تقریبی برای غیر خودنگاشت غیرانبساطی $T$ می‌توان بهترین نقاط تقریب را معین نمود.

قضیه ۴. فرض کنید $(A,B)$ یک زوج ناتهی، بسته، کراندار و محدب در فضای هادامارد $X$ و $T: A \to B$ یک نگاشت غیرانبساطی به مفهوم سوزوکی باشد به طوری که $T(A_0) \subset B_0$. در این صورت $T$ دارای حداقل یک بهترین نقطه تقریب خواهد بود.

اثبات. همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد $(A_0, B_0)$ ناتهی، بسته، کراندار و محدب می‌باشد. حال نگاشت $PT: A_0 \to A_0$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $x, y \in A_0$ چنان‌که

$$\frac{1}{2} d(x, PTx) \leq d(x,y).$$

بنابر گزاره ۲ قسمت (آ) داریم

$$d(x,Tx) \leq d(x,PTx) + d(PTx,Tx) = d(x,PTx) + dist(A,B).$$

و لذا

$$\frac{1}{2} d^*(x,Tx) \leq d(x,PTx) \leq d(x,y).$$

از آنجا که $T$ غیرانبساطی به مفهوم سوزوکی بوده و $P$ یک ایزومتری می‌باشد،

$$d(PTx, PTy) = d(Tx, Ty) \leq d(x,y).$$

در نتیجه خودنگاشت $PT: A_0 \to A_0$ بر زیرمجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب $A_0$ از فضای هادامارد $X$ غیرانبساطی به مفهوم سوزوکی خواهد بود. اکنون با استفاده از قضیه ۱. ۴ از مرجع [۲۵] نگاشت $PT$ دارای یک نقطه ثابت مانند $x^* \in A_0$ خواهد بود و لذا

$$d(x^*, Tx^*) = d(PTx^*, Tx^*) = dist\,(A,B),$$

به این معنی که $x^*$ یک بهترین نقطه تقریب برای نگاشت $T$ می‌باشد.

## ۴- مثال‌های کاربردی

در بخش پایانی از این مقاله به ارائه چند مثال به منظور بررسی نتایج حاصله می‌پردازیم.

در ابتدا مثالی برای تبیین قضیه ۲ ارائه می‌شود.

مثال۱. $X = \mathbb{R}^2$ را با متر معمولی در نظر بگیرید و فرض کنید

$$A = \left\{(x,0)\ :\ 0 \leq x \leq \frac{1}{100}\right\} \cup \{(1,2)\}$$
$$B = \left\{(x,1)\ :\ 0 \leq x \leq \frac{1}{100}\right\} \cup \{(1,1)\}$$

به وضوح $dist(A,B) = 1$ و اینکه $(A,B)$ یک زوج فشرده و شارپ پروکسیمال بوده که دارای خاصیت UC می‌باشد. حال نگاشت $T: A \to B$ را با ضابطه

$$T\boldsymbol{x} = \begin{cases} (1,1) & ;\ \boldsymbol{x} = (0,0) \\ \left(\frac{1}{100}, 1\right) & ;\ \boldsymbol{x} \neq (0,0) \end{cases}$$

در نظر بگرید. نشان می‌دهیم که $T$ یک نگاشت غیرانبساطی از نوع سوزوکی و برآیند با $\beta = 2$ می‌باشد. برای این منظور حالات زیرا را در نظر می‌گیریم:

حالت اول. اگر $\boldsymbol{x} = (0,0)$ آنگاه چنان‌چه $\boldsymbol{y} = (y,0)$ به ازای $0 \leq y \leq \frac{1}{100}$ خواهیم داشت

$$\frac{1}{2+\beta} d^*(\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} - 1\right) > \frac{1}{100} \geq y = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

و به انتفای مقدم نتیجه برقرار خواهد بود. اگر $\boldsymbol{y} = (1,2)$ آنگاه

$$d(T\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{y}) = \frac{99}{100} \leq \sqrt{5} = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

و لذا در این حالت مطلوب حاصل می‌شود.

حالت دوم. اگر $\boldsymbol{x} = (x,0)$ با $0 < x \leq \frac{1}{100}$ در نظر گرفته شود. آنگاه به‌وضوح $T$ غیرانبساطی بوده و در این حالت هم نتیجه بدست می‌آید. از طرفی دنباله $\{\boldsymbol{x}_n\}$ که با $\boldsymbol{x}_0 = (0,0),\ \boldsymbol{x}_1 = (1,2),$

$$\boldsymbol{x}_n = \left(\frac{1}{100}, 0\right), \forall n \geq 2,$$

تعریف می‌شود یک دنباله تقریبی برای نگاشت $T$ می‌باشد. بنابراین تمام شرایط مذکور در قضیه ۲ برقرار بوده و لذا $T$

دارای یک بهترین نقطه تقریب خواهد بود که این نقطه $\boldsymbol{x}^* = (\frac{1}{100}, 0)$ می‌باشد.

همان‌طور که در مثال بعد خواهیم دید نمی‌توان از شرط شارپ پروکسیمال بودن زوج $(A, B)$ در قضیه ۲ صرف نظر کرد.

مثال۲. فضای $l_\infty$ را با نرم سوپریموم و پایه استاندارد $\{e_n\}$ در نظر گرفته و قرار دهید

$$A = \{3e_3, 5e_5\}, B = \{2e_3, 4e_3, 4e_5, 6e_5\}.$$

به وضوح $\mathrm{dist}\,(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = 1$ و $A_0 = A, B_0 = B$ . در ضمن $(A, B)$ دارای خاصیت UC نیز می‌باشد. غیر خودنگاشت $T: A \to B$ را با ضابطه

$$T(3e_3) = 4e_5\,, \quad T(5e_5) = 4e_3,$$

تعریف می‌کنیم. اکنون به ازای $\boldsymbol{x} = 3e_3$ و $\boldsymbol{y} = 5e_5$ داریم

$$\|T\boldsymbol{x} - T\boldsymbol{y}\| = \|4e_5 - 4e_3\| \\ = 4 \le 5 = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|,$$

به این معنی که $T$ غیرانبساطی می‌باشد. از طرفی

$$\|\boldsymbol{x} - T\boldsymbol{x}\| = 4, \ \|\boldsymbol{y} - T\boldsymbol{y}\| = 5$$

فلذا $T$ فاقد بهترین نقطه تقریب خواهد بود. توجه شود که در این مثال زوج $(A, B)$ شارپ پروکسیمال نمی‌باشد.

در مثال بعد خواهیم دید که وجود دنباله تقریبی برای نگاشت‌های غیرانبساطی در فضاهای متریکی که هادامارد نمی‌باشد، لزوماً برقرار نیست.

مثال۳. فرض کنید $X = c_0$ فضای متشکل از دنباله‌های حقیقی همگرا به صفر باشد که با نرم سوپریموم در نظر گرفته می‌شود. ابتدا نشان می‌دهیم که این فضا علی‌رغم کامل بودن $\mathrm{CAT}(0)$ نمی‌باشد. برای این منظور ثابت می‌کنیم که $X$ در نامساوی CN که در لم ۲ اشاره شد، صدق نمی‌کند. فرض کنید

$$q = e_1, m = 0\ , r = -e_1\ , p = e_3.$$

آنگاه

$$d(q, m) = d(r, m) = \frac{1}{2}\, d(q, r),$$

حال آنکه

$$d(p, q)^2 + d(p, r)^2 = 2 < 4 \\ = 2d(m, p)^2 + \frac{1}{2} d(q, r)^2.$$

زوج بسته، کراندار و محدب $(A, B)$ در $c_0$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$A = \left\{\boldsymbol{x} \in c_0\ : \|\boldsymbol{x}\| \le \frac{1}{2}\right\}, \\ B = \{\boldsymbol{x} \in c_0\ : \|\boldsymbol{x}\| \le 1\}.$$

توجه داریم که $A_0 = A = B_0$. همچنین غیر خود نگاشت $T: A \to B$ را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم:

$$T\boldsymbol{x} = T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\tfrac{1}{2}, x_1, x_2, x_3, \dots).$$

در این صورت برای هر $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in A \times B$ داریم

$$\|T\boldsymbol{x} - T\boldsymbol{y}\| = \left\|\left(\frac{1}{2}, x_1, x_2, x_3, \dots\right) - \left(\frac{1}{2}, y_1, y_2, y_3, \dots\right)\right\| \\ = \sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i - y_i| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

فلذا $T$ یک نگاشت غیر انبساطی خواهد بود. چون $A \cap B$ ناتهی می‌باشد، پس بهترین نقطه تقریب نگاشت $T$ در صورت وجود همان نقطه ثابت $T$ خواهد بود. از طرفی اگر $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in A$ یک نقطه ثابت نگاشت $T$ باشد، آنگاه می‌بایست

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\frac{1}{2}, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

در نتیجه

$$\frac{1}{2} = x_1 = x_2 = x_3 = \cdots,$$

که این مطلب با فرض اینکه $x \in c_0$ در تناقض می‌باشد.

مثال بعد نشان می‌دهد که در گزاره ۳ بحث منحصر بفرد بودن مرکز مجانبی نسبی یک دنباله نسبت به یک مجموعه لزوماً در هر فضایی برقرار نمی‌باشد.

مثال ۴. فضای متریک آمده در مثال ۳ که هادامارد نمی‌باشد را در نظر بگیرید و فرض کنید

$$A = \left\{\boldsymbol{x} \in c_0\ : \|\boldsymbol{x}\| \le \frac{1}{2}\right\}, \\ B = \{e_1 + te_2 : \ 0 \le t \le \tfrac{1}{2}\}.$$

در این صورت $(A, B)$ یک زوج ناتهی، بسته، کراندار و محدب در $X$ بوده که برای هر $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in A \times B$ با $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ و $\boldsymbol{y} = e_1 + te_2$ به ازای $0 \le t \le \frac{1}{2}$ داریم

$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = \sup\{1-x_1, |t-x_2|, |x_j|; j \geq 3\} = 1-x_1.$

بنابراین $dist\ (A,B) = \frac{1}{2}$. دراین‌صورت

$$A_0 = \left\{\boldsymbol{x} \in c_0. : x_1 = \frac{1}{2}\right\},\quad B_0 = B.$$

حال فرض کنید $\{\boldsymbol{x}_n\}$ دنباله‌ای در $A_0$ تعریف شده با $\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{2}e_1$ و $\boldsymbol{x}_n = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{n}e_n$ برای هر $n \geq 2$ و $\boldsymbol{y} \in B$. از آنجا که

$$dist\ (A,\{\boldsymbol{y}\}) \leq \left\|\frac{1}{2}e_1 - (e_1 + te_1)\right\| = \frac{1}{2} = dist\ (A,B),$$

پس $P\boldsymbol{y} = \frac{1}{2}e_1$ برای هر $\boldsymbol{y} \in B$. از طرفی

$$\lim_{n\to\infty} \sup\|\boldsymbol{x}_n - P\boldsymbol{y}\| = \lim_{n\to\infty} \sup\left\|\frac{1}{2}e_1 + \left(\frac{1}{n}e_n - \frac{1}{2}e_1\right)\right\| = 0,$$

بنابراین $\delta_{B_0}(\{x_n\}) = 0$ و اینکه $C_{B_0}(\{x_n\}) = B$.

در نهایت با ارائه یک مثال به تبیین قضیه ۳ می‌پردازیم.

مثال ۵. $\mathbb{R}^2$ را با متر

$$d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \begin{cases} |y_1-y_2|\ ; & x_1 = x_2 \\ |x_1-x_2|,+|y_1|+|y_2|\ ; & x_1 \neq x_2 \end{cases}.$$

در این صورت $\mathbb{R}^2$ به همراه این متر، یک فضای هادامارد می‌باشد (برای جزئیات بیشتر [۲۶] مراجعه کنید). فرض کنید

$$A = \left\{(0,x) :\ 0 \leq x \leq \frac{1}{4}\right\},$$
$$B = \{(1,x) :\ 0 \leq x \leq 1\}.$$

آنگاه $(A,B)$ یک زوج محدب و فشرده در فضای هادامارد $X$ بوده و $dist(A,B) = 1$. در ضمن

$$A_0 = A\ ,\ B_0 = \{\ (1,y) : 0 \leq y \leq \tfrac{1}{4}\}.$$

نگاشت $T: A \to B$ را به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$T(0,x) = (1,x^2),\qquad 0 \leq x \leq \frac{1}{4}.$$

در این‌صورت برای هر $(0,x),(0,y) \in A$ داریم

$$d\big(T(0,x),T(0,y)\big) = d(1,x^2),(1,y^2)) = |x^2-y^2| \leq |x-y|,$$

به این معنی که $T$ یک نگاشت غیر انبساطی می‌باشد و به‌وضوح $T(A_0) \subset B_0$. اکنون از قضیه ۳ وجود بهترین نقطه تقریب برای نگاشت $T$ تضمین می‌شود که نقطه $x^* = (0,0)$ می‌باشد.

## فهرست منابع

1. A. Abkar, M. Gabeleh, Best proximity point of nonself mappings, Top, 21 (2013), 287-295.

2. K. Fan, Extensions of two fixed point theorems of F.E. Browder, Math. Z. 122(1969), 234-240.

3. A.A. Eldred, W.A. Kirk, P. Veeramani, Proximal normal structure and relatively nonexpansive mappings, Studia Math., 171 (2005),283-293.

4. S. Sadiq Basha, Best proximity points: Optimal solutions, J. Optim. Theory Appl., 151 (2011), 210-216.

5. M. Gabeleh, Best proximity point theorems via proximal non-self mappings. J. Optim. Theory Appl., 164 (2015), 565-576.

6. S. Abbasbansy, B. Azarnavid, M.S Alhuthali, A shooting reproducing kernel Hilbert space method for multiple solutions of nonlinear boundary value problems, J. Computational Appl. Math., 279 (2015), 293-305.

7. B. Azarnavid, F. Parvaneh, S. Abbasbansy, Picard reproducing kernel Hilbert space method for solving generalized singular nonlinear Lane-Emden type euations, Mathematical Modelling and Analysis, 20 (2015)754-767.

8. T.A. Burton, Stability theory for functional differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., 255 (1979) 263-275.

9. J.A. Clarkson, Uniformly convex spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 40 (1936), 396-414.

10. M. Gabeleh, Best Proximity points: global minimization of multivalued non-self mappings, Optimization Letters, 8 (2014)1101-1112.

11. A. Burago, Y. Burago, S. Ivanov, A course in Metric Geometry, Garadute Studies in Math., 33, Amer: Math Soc., Providence, RI, (2001).

12. M.R. Bridson, A, Haeflinger, Metric Space of Non-positive Curvature, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (1999).

13. A. Papadopoulus, Metric Spaces, Convexity and non-positive Curvature, Europe Math. Soc. Zurich, pp. Xii+287 (2005).

14. G.C. Ahuja, T.D. Narang, S. Trehan, Best approximation on convex sets in a metric space, J. Approx Theory 12, (1974), 94-97.

15. S. Dhompongsa, B. Panyanak, On Δ-convergence theorems in CAT(0) spaces, Comput. Math. Appl., 56 (2008) 2572-2579.

16. A. Fernandes Leon, A. Nicolae, Best proximity pair results for relatively nonexpansive mappings in geodesic spaces, Numer. Funct. Anal. Optim, 35, (2014) 1399-1418.

17. R. Espinola, A new approach to relatively nonexpansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 136, (2008) 1987-1995.

18. T. Suzuki, Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpanxive

mappings, J. Math. Anal. Appl., 340, (2008) 1088-1095.

19. V. Berinde, Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration, Nonlin. Anal. Forum, 9 (2004), 43-53.

20. T. Suzuki, M. Kikkawa, C. Vetro, The existence of best proximity points in metric spaces with the property UC, Nonlinear Anal., 71 (2009), 2918-2926.

21. A.A. Eldred, P. Veeramani, Existence and convergence of best proximity points, J. Math. Anal. Appl., 323 (2006), 1001-1006.

22. K. Goebel, W.A. Kirk, Topics in Metric Fixed Point Theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1990).

23. M. Gabeleh, O.O. Otafudu, Markov-Kakutani's theorem for best proxmimity pairs in Hadamard spaces, Submitted.

24. M. Gabeleh, Minimal stes of noncyclic relatively nonexpansive mappings in convex metric spaces, Fixed Point Theory (Romania), 16 (2015), 313-322.

25. B. Nanjaras, B. Panyanaka, W. Phuengrattana, Fixed point theorems and convergence theorems for Suzuki-generalized nonexpansive mappins in CAT(0) spaces. Nonlinear Analysis, 4 (2010), 25-31.

26. R. Espinola, P. Lorenzo, Metric fixed point theory on hyperconvex spaces: recent progress, Arab J. Math., 1(2012) 439-463.