دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دوم، شماره پنجم، بهار ۱۳۹۵
شماره شاپا: ۰۱۹۶-۱۶۸۲

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

شاخص‌های کارآئی تکنیکی جزیی و کلی در تحلیل پوششی داده‌ها

سهراب کردرستمی[۱*]، علیرضا امیرتیموری[۲]

(۱) استاد گروه ریاضی کاربردی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران
(۲) استاد گروه ریاضی کاربردی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

تاریخ دریافت مقاله: زمستان ۱۳۹۴ تاریخ پذیرش مقاله: بهار ۱۳۹۵

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها *(DEA)* یک روش غیرپارامتری است که کارآئی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری *(DMU)* متجانس با چندین ورودی و چندین خروجی را اندازه می‌گیرد. این روش اولین بار توسط چارنز و همکاران (۱۹۷۸) معرفی شد. در ارزیابی مدل‌های *DEA* فرض بر این است که همه ورودی‌ها به‌طور مشترک برای تولید همه خروجی‌ها مصرف می‌شوند. این درحالی است که اغلب اوقات همه ورودی‌ها در تولید همه خروجی‌ها نقش ندارند. یک مثال ساده از چنین وضعیتی را می‌توان در شرکت‌های گاز به‌عنوان واحدهای تصمیم‌گیری مشاهده کرد. شرکت‌های گاز در ایران به صورت استانی اداره می‌شوند و هر یک از شرکت‌های گاز استانی به‌عنوان یک واحد تصمیم‌گیری ورودی‌هایی نظیر پرسنل، هزینه و سرمایه را برای تولید خروجی‌هایی نظیر تعداد مشترکین، حجم شبکه‌گذاری، حجم گاز و ... مصرف می‌کنند. در این فرایند بخشی از پرسنل جهت مشترکین، بخش دیگری در قسمت شبکه‌گذاری و ... مشغول هستند. به‌طور منطقی دریک فرآیند تولید، هر ورودی لزوماً در تولید هر یک از خروجی‌ها نقش ندارد. بر این باوریم که بخشی از هر ورودی برای تولید هر خروجی مصرف می‌شود.

هدف: هدف این مقاله تعیین قدرالسهمی برای هر خروجی از هر ورودی در جهت افزایش کارایی نسبی واحدهای تصمیم گیری می‌باشد. در مدلی که ارایه خواهد شد سهم هرخروجی از هر ورودی جهت بهینه کردن اندازه کارایی کلی واحدها تعیین خواهد شد.

روش بررسی: برای نیل به هدف از تکنیک‌های غیرپارامتری و به ویژه تکنیک *DEA* استفاده خواهد شد.

نتایج: مقاله مدلی ارائه می‌کند که به کمک آن علاوه بر این که سهم هر ورودی در تولید هر خروجی تعیین می‌شود، عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری در تولید هر خروجی نیز محاسبه می‌شوند. به‌عبارت دیگر برای هر خروجی یک شاخص کارآئی تعیین می‌شود که ترکیب محدب این شاخص‌ها، کارآئی کلی واحد تحت ارزیابی را می‌سازد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارآئی تکنیکی، کارایی جزیی، ورودی–خروجی.

*. عهده دار مکاتبات : krostami@guilan.ac.ir

۱– مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها *(DEA)* یک روش غیرپارامتری است که کارآئی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم گیری *(DMU)* متجانس با چندین ورودی و چندین خروجی را اندازه می‌گیرد. این روش اولین بار توسط چارنز و همکاران (۱۹۷۸) معرفی شد. در ارزیابی مدل‌های *DEA* فرض بر این است که همه ورودی‌ها به طور مشترک برای تولید همه خروجی‌ها مصرف می‌شوند. چارنز کوپر و رودز (۱۹۷۸) نخستین بار صورت خطی شده مدل CCR را به صورت زیر معرفی کردند:

$$
\begin{aligned}
&[CCR]\\
&Max \quad e_0=\sum_{r=1}^{s} u_r\, y_{ro}\\
&subject \quad to:\\
&\textstyle\sum_{i=1}^{m} v_i\, x_{io}=1\,,\\
&\sum_{r=1}^{s} u_r\, y_{rj}-\sum_{i=1}^{m} v_i\, x_{ij}\le 0\,, \qquad\qquad (۱)\\
&j=1,\dots,n\\
&u_r\,,v_i\ge \varepsilon\,, \qquad r=1,\dots,s\,, \qquad i=1,\dots,m
\end{aligned}
$$

که در آن $DMU_j: j=1,\dots,n$ ورودی‌های $x_{ij}: i=1,\dots,m$ را جهت تولید خروجی‌های $y_{rj}: r=1,\dots,s$ مصرف می‌کند. این در حالی است که اغلب اوقات همه ورودی‌ها در تولید همه خروجی‌ها نقش ندارند. یک مثال ساده ازچنین وضعیتی را می‌توان درشرکت‌های گاز به‌عنوان واحدهای تصمیم‌گیری مشاهده کرد. شرکت‌های گاز در ایران به‌صورت استانی اداره می‌شوند و هر یک از شرکت‌های گازاستانی به‌عنوان یک واحد تصمیم‌گیری ورودی‌هایی نظیر پرسنل، هزینه و سرمایه را برای تولید خروجی‌هایی نظیر تعداد مشترکین، حجم شبکه‌گذاری، حجم گاز و ... مصرف می‌کنند. در این فرایند بخشی از پرسنل جهت مشترکین، بخش دیگری در قسمت شبکه گذاری و ... مشغول هستند. مطالعات اولیه در خصوص تعیین سهم ورودی‌ها برای خروجی‌ها و اندازه کارایی مولفه‌ای توسط بیزلی (۱۹۹۵)، فیر و گروسکوف (۱۹۹۶)، کوک و همکاران (۲۰۰۰) انجام گرفت. فیر و گروسکوف (۱۹۹۶)، مسأله تولید را به‌عنوان یک فرآیند چند مرحله‌ای در نظر گرفتند که در آن خروجی یک مؤلفه به‌عنوان ورودی مؤلفه بعدی در نظر گرفته می‌شد. در مدل آن‌ها تنها یک شاخص کارآئی کلی برای هر واحد تصمیم‌گیری به‌دست می‌آید. کوک و همکاران در درون هر واحد تصمیم‌گیری دو مولفه در نظر گرفتند که این دو مولفه، جدا از هم، هر کدام ورودی‌هایی را برای تولید خروجی‌هایی مصرف می‌کردند و تمام مولفه‌ها در مصرف یک ورودی سهیم بودند. مدل مطرح شده توسط کوک و همکاران به گونه‌ای بود که علاوه بر کارآئی کلی، کارآئی مؤلفه‌های سازای یک واحد تصمیم گیری نیز به دست می‌آمد، در ادامه، مطالعات متعددی در این زمینه صورت گرفت که از جمله آن‌ها می‌توان به کارهای جهانشاهلو و همکاران (۲۰۰۳)، کوک و همکاران (۲۰۰۴) اشاره کرد. در این مقاله از منظر دیگری به موضوع پرداخته می‌شود. به طور منطقی در یک فرآیند تولید، هر ورودی لزوماً در تولید هر یک از خروجی‌ها نقش ندارد. بر این باوریم که بخشی از هر ورودی برای تولید هر خروجی مصرف می‌شود.

هدف این مقاله ارائه مدلی است که به کمک آن علاوه بر این که سهم هر ورودی در تولید هر خروجی تعیین می‌شود، عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری در تولید هر خروجی نیز محاسبه می‌شوند. به‌عبارت دیگر برای هر خروجی یک شاخص کارآئی تعیین می‌شود که ترکیب محدب این شاخص‌ها، کارآئی کلی واحد تحت ارزیابی را می‌سازد. سازماندهی بخش‌های بعدی مقاله به صورت زیر است:

بخش بعدی به معرفی روش پیشنهادی می‌پردازد. در بخش سوم یک مثال عددی ارائه خواهد شد و در بخش چهارم نتیجه‌گیری ارایه می‌شود.

۲- تفکیک کارآئی و تعیین سهم خروجی‌ها از ورودی‌ها

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیری هر کدام با m ورودی و s خروجی مورد نظر هستند. در حالت خاص DMU_0، ورودی‌های $x_{io}: i=1,\dots,m$ را جهت تولید خروجی‌های $y_{ro}: r=1,\dots,s$ مصرف می‌کند. همان گونه که ذکر شد هدف به دست آوردن میزان کارآئی خروجی rام و تعیین سهم هر خروجی از منابع ورودی است. برای تولید هر یک از خروجی‌های $y_{ro}: r=1,\dots,s$، سهمی از ورودی iام x_{io} مصرف می‌شود، فرض می‌کنیم میزانی

از ورودی x_{io} که صرف تولید خروجی y_{ro} می‌شود برابر $\gamma_{ir}x_{io}$ باشد. γ_{ir} به نوعی مبین میزان سهم y_{ro} از ورودی x_{io} است. γ_{ir}ها را در آرایه ای نشانده و ماتریس Γ_o را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Gamma_o = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1s} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2s} \\ \\ \gamma_{i1} & \gamma_{i2} & \cdots & \gamma_{is} \\ \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{ms} \end{bmatrix}.$$

Γ_o را ماتریس «تعیین سهم از منابع» می‌نامیم. به وضوح هر یک از بردارهای سطری این ماتریس باید نرمال باشند، به عبارت دیگر:

$$\sum_{r=1}^{s}\gamma_{ir} = 1, \quad i = 1,\dots,m.$$

بر این اساس می‌توانیم ادعا کنیم برای تولید خروجی $y_{ro}, r = 1,\dots,s$، ورودی‌های $x_m,\dots,x_1$ هر کدام با سهم $\sum_{i=1}^{m}\gamma_{ir}x_{io}$ نقش دارند. شاخص کارآئی جزئی خروجی rام DMU_o را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e_o^{(r)} = \frac{u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i(\gamma_{ir}x_{io})} \;, \quad r = 1,\dots,s, \tag{۲}$$

این شاخص در حقیقت همان نسبت توزین شده خروجی rام به مجموع توزین شده تمام ورودی‌هائی است که برای تولید y_{ro} مصرف می‌شوند. حال با استفاده از کارآئی‌های جزئی فوق برای هر خروجی، کارآئی کل DMU_o هماهنگ با ادبیات تحلیل پوششی داده‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_o^{(a)} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} \tag{۳}$$

قضیه ۱- کارآئی تجمعی $e_o^{(a)}$ را می‌توان به صورت ترکیب محدب کارآئی‌های جزئی $e_o^{(r)}$ها نمایش داد.

برهان: برای نشان دادن مطلب فوق کافی است قرار دهیم.

$$\mu_r = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i(\gamma_{ir}x_{io})}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} \;, \quad r = 1,\dots, s$$

از این رو خواهیم داشت

$$\sum_{r=1}^{s}\mu_r e_o^{(r)} = \left[\sum_{r=1}^{s}\frac{\sum_{i=1}^{m} v_i(\gamma_{ir}x_{io})}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} \times \frac{u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i(\gamma_{ir}x_{io})}\right]$$

$$= \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} = e_o^{(a)}$$

و

$$\sum_{r=1}^{s}\mu_r = \sum_{r=1}^{s}\frac{\sum_{i=1}^{m} v_i(\gamma_{ir}x_{io})}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}\sum_{r=1}^{s}\gamma_{ir}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} = 1$$

این به این معنی است که $e_o^{(a)} = \sum_{r=1}^{s}\mu_r e_o^{(r)}$، $\sum_{r=1}^{s}\mu_r = 1$ و $\mu_r \geq 0$ و حکم حاصل است. با در نظر گرفتن قضیه فوق منطقی است که برای ارزیابی DMU_o کارآئی کلی آن را ماکزیمم کنیم. این باعث می‌شود که مجموع توزین شده کارآئی‌های جزئی بیشینه شود. برای پیشگیری از بیکران شدن مسأله، محدودیت نابیشتر از یک بودن کارآئی‌های جزئی را لحاظ می‌کنیم. لذا مسأله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{lll} Max & e_o^{(a)} & \\ s.t. & e_o^{(r)} \le 1, & r = 1,\cdots,s, \\ & u_r,\ v_i \ge 0, & for\ \ all\ \ i,r. \end{array} \tag{۴}$$

در مدل ارایه شده γ_{ir} و وزن‌های u_r و v_i مجهول هستند. با جایگذاری $e_o^{(a)}$ و $e_o^{(r)}$ها از روابط (۲) و (۳) مسأله (۴) منجر به مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی کسری زیر می‌شود:

$$\begin{array}{l} Max \quad \dfrac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} \\ s.t. \quad \dfrac{u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i(\gamma_{ir} x_{io})} \le 1, \\ r=1,\ldots,s \ \ ,\ \ j=1,\ldots,n \\ \sum_{i=1}^{s} \gamma_{ir} = 1 \qquad i=1,\ldots,m \\ v_i, \gamma_{ir}, u_r \ge 0 \quad for\ \ all\ \ i,r. \end{array} \tag{۵}$$

در مسأله (۵) γ_{ir}ها، u_rها و v_iها نامعلومند. این مجهولات به گونه‌ای تعیین می‌شوند که کارآئی کلی DMU_o بیشینه شود. به وضوح (۵) یک مسأله برنامه‌ریزی کسری غیرخطی است. ابتدا با استفاده از تبدیل چارنز و کوپر (۱۹۶۲) مسأله (۵) را به یک مسأله برنامه‌ریزی غیرکسری تبدیل می‌کنیم. برای این منظور قرار می‌دهیم $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = \frac{1}{t}$، $tu_r = \bar{u}_r$ و $tv_i = \bar{v}_i$. بنابر این مدل (۵) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{array}{l} Max \quad \sum_{r=1}^{s} \bar{u}_r y_{ro} \ \ , \\ s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} \bar{v}_i x_{io} = 1, \\ \bar{u}_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} \bar{v}_i(\gamma_{ir} x_{ij}) \le 0, \\ r=1,\ldots,s \ \ ,\ \ j=1,\ldots,n \\ \sum_{i=1}^{s} \gamma_{ir} = 1 \qquad i=1,\ldots,m \\ \bar{v}_i, \gamma_{ir}, \bar{u}_r \ge 0 \quad r=1,\ldots,s,\ j=1,\ldots,n. \end{array} \tag{۶}$$

مدل (۶) هنوز یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی است. برای خطی سازی آن، قرار می‌دهیم $\bar{v}_i \gamma_{ir} = \mu_{ir}$, $i = 1,\ldots, m$. به این ترتیب مسأله برنامه‌ریزی غیر خطی (۶) به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{array}{l} \rho_0^* = Max \quad \sum_{r=1}^{s} \bar{u}_r y_{ro} \ \ , \\ s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} \bar{v}_i x_{io} = 1, \\ \bar{u}_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} \mu_{ir} x_{ij} \le 0, \\ r=1,\ldots,s \ \ ,\ \ j=1,\ldots,n \\ \sum_{i=1}^{s} \mu_{ir} = \bar{v}_i \ , \qquad i=1,\ldots,m \\ \bar{v}_i \ge \varepsilon.t \ , \qquad j=1,\ldots,m \\ \bar{u}_r \ge \varepsilon.t \ , \qquad r=1,\ldots,s \end{array} \tag{۷}$$

مدل (۷) یک مسأله برنامه‌ریزی خطی است که به آسانی با استفاده از نرم افزارهای برنامه‌ریزی خطی نظیر $GAMS$ یا DS حل می‌شود. با حل مسأله برنامه‌ریزی خطی (۷)، اوزان بهینه $\bar{u}_r^*$ ، μ_{ir}^* و t^* به دست می‌آیند. برای به دست آوردن وزن‌های بهینه u_r^* و v_r^* مدل (۶) و ماتریس تعیین سهم ازمنابع Γ_o کافیست قرار دهیم:

$$\begin{array}{ll} u_r^* = \bar{u}_r^* / t^* \ , & r = 1,\cdots,s, \\ v_i^* = \bar{v}_i^* / t^* \ , & i = 1,\cdots,m, \\ \gamma_{ir}^* = \mu_{ir}^* / \bar{v}_i^* \ , & i = 1,\cdots,m,\ r = 1,\cdots,s, \end{array}$$

اگر فرض کنیم $\bar{u}_r = (\bar{u}_1^*,\ldots,\bar{u}_s^*)$، $\bar{v}_r = (\bar{v}_1^*,\ldots,\bar{v}_m^*)$، $M = [\gamma_{ir}]_{m\times s}$، $y_o = (y_{1o},\ldots, y_{so})$، $x_o = (x_{1o},\ldots, x_{mo})$، آن گاه بردار sتائی $M.x_o$ برداری است که مؤلفه rام آن مخرج کسر $e_o^{(r)}$ است.

۳- مثال عددی

چهار واحد تصمیم‌گیری A، B، C و D را در نظر بگیرید که هر کدام دو ورودی را برای تولید دو خروجی

مصرف می‌کنند. با اجرای مدل‌های (۱) و (۷) دو واحد تصمیم‌گیری C و D کاراً ظاهر شدند و واحدهای A و B در هر دو مدل ناکاراً شدند. مقادیر کمی شاخص‌های ورودی و خروجی در جدول (۱) گنجانده شده است.

اندازه‌های کارایی کلی و جزیی حاصل از مدل (۷) و ماتریس تعیین سهم ازمنابع $\Gamma_o\ ,\ o = A,\ B,\ C,\ D$ در جدول (۲) گنجانده شده‌اند. به‌عنوان مثال $\Gamma_B = \begin{bmatrix} ۰/۳۰۷۷ & ۰/۶۹۲۳ \\ ۰/۰۶۲۵ & ۰/۹۳۷۵ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. ۳۰۷۷٪ ورودی اول صرف تولید خروجی اول و ۶۹۲۳٪ ورودی اول صرف تولید خروجی دوم می‌شود. به‌همین ترتیب ۰۶۲۵٪ ورودی دوم صرف تولید خروجی اول و ۹۳۷۵٪ ورودی دوم صرف تولید خروجی دوم می‌شود. کارایی خروجی اول در DMU_B برابر ۰/۲۷۷۸ و این شاخص برای خروجی دوم برابر یک محاسبه شد. کارایی کلی DMU_B نیز ۰/۸۷۲۹ می‌باشد.

نتیجه‌گیری

در مدل‌های موجود تحلیل پوششی داده‌ها فرض براین است که تمام ورودی‌ها در تولید تمامی خروجی‌ها نقش دارند. اما در بسیاری از کاربردهای عملی، حالاتی وجود دارد که همه ورودی‌ها در تولید هر خروجی شرکت نمی‌کنند بلکه بخشی از هر ورودی برای تولید هر خروجی به کار می‌رود و ممکن است بعضی ورودی‌ها هیچ نقشی در تولید بعضی خروجی‌ها نداشته باشند. در این مقاله بر حسب سهم هر ورودی جهت تولید هر خروجی، کارآئی تکنیکی به کارآئی‌های جزئی متناظر هر یک از خروجی‌های واحد تحت بررسی تفکیک شد. به کمک یک مسأله برنامه‌ریزی خطی، اندازه کارآئی کلی و اندازه‌های کارآئی جزئی واحدهای تصمیم‌گیری محاسبه شدند و برای هر واحد تصمیم‌گیری یک ماتریس تعیین سهم از منابع تعیین شد. همچنین نشان داده شد که اندازه کارآئی کلی ترکیب محدبی از کارآئی‌های جزئی است.

جدول (۱)، ورودی‌ها و خروجی‌ها

DMU	x_1	x_2	y_1	y_2
A	۳	۵	۶	۸
B	۴	۳	۵	۲۲
C	۳	۶	۱۴	۲۹
D	۲	۲	۱۳	۱۵

جدول (۲): اندازه‌های کارایی کلی و جزیی و ماتریس تعیین سهم

DMU	θ^*_{CCR}	ρ^*_o	جزئی ۱	جزئی۲	ماتریس تعیین سهم
A	۰/۳۴۵۸	۰/۳۴۴۸	۰/۳۶۱۱	۰/۲۹۶۳	$\Gamma_A = \begin{bmatrix} 0.8889 & 0.1111 \\ 0.5556 & 0.4444 \end{bmatrix}$
B	۰/۸۹۷۶	۰/۸۷۲۹	۰/۲۷۷۸	۱	$\Gamma_B = \begin{bmatrix} 0.3077 & 0.6923 \\ 0.0625 & 0.9375 \end{bmatrix}$
C	۱	۱	۱	۱	$\Gamma_C = \begin{bmatrix} 0.3636 & 0.6364 \\ 0.0769 & 0.9231 \end{bmatrix}$
D	۱	۱	۱	۱	$\Gamma_D = \begin{bmatrix} 0.4444 & 0.5556 \\ 0.0278 & 0.9722 \end{bmatrix}$

مقدار کمیت ناارشمیدوسی ε برابر ۰/۰۱ انتخاب شده است.

فهرست منابع

[1] Charnes A., Cooper W.W. and Rodes E. European Journal of Operational Research. 2 (6), 429, (1978).

[2] Beasely J. E. Journal of Operational Research Society. 46, 441, (1995).

[3] Fare R. and Grosskof S. Economic Letters. 50 (1), 65, (1996).

[4] Cook W. D., Hababou M. and Tuenter H. J. H., Journal of Productivity Analysis. 14, 209, (2000).

[5] Jahanshahloo G. R., Amirteimoori A. R. and Kordrostami S. Applied Mathematics Computation. 155, 283, (2004).

[6] Cook W. D. and Green R. H. European Journal of Operational Research. 157, 540, (2004).

[7] Kordrostami S. and Amirteimoori A. R. Applied Mathematics Computation. 171, 721, (2005).