دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره هجدهم، خرداد و تیر ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

دو تصویری بودن جبرهای باناخ نسبت به ایده‌آل

مرتضی قربانی[۱]، حمیدرضا رحیمی[۲*]

[۱و۲] دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۱۱/۰۷   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۳/۰۴

چکیده

در این مقاله مفهوم جدید دوتصویری بودن یک جبر باناخ نسبت به ایده‌آل را معرفی می‌کنیم، که تعریف دوتصویری بودن در حالت کلاسیک، حالت خاصی از آن به شمار می‌رود. با استفاده از این مفهوم برخی شرایط لازم و کافی را برای انقباض‌پذیری یک جبر باناخ نسبت به ایده‌آل به دست می‌آوریم و به ویژه جبرهای باناخ خارج قسمتی انقباض‌پذیر را مشخص‌سازی می‌کنیم. همچنین ارتباط بین دوتصویری بودن یک جبر باناخ نسبت به یک ایده‌آل بسته آن و دوتصویری بودن جبر باناخ خارج قسمتی متناظر را مطالعه می‌کنیم و با استفاده از تناظر موجود بین همنهشتی‌های روی نیمگروه S و ایده‌آل‌ها در جبر نیمگروهی $l^1(S)$، به عنوان یک کاربرد، نسخه‌ای از قضیه مهم هلمسکی را در مورد دوتصویری بودن جبرهای باناخ نیمگروهی ارائه می‌کنیم. به عبارت دیگر نشان می‌دهیم برای نیمگروه دلخواه S، $l^1(S)$ نسبت به I_ρ دوتصویری است اگر و تنها اگر $\frac{S}{\rho}$ متناهی باشد که در آن I_ρ ایده‌آل متناظر با همنهشتی ρ روی S است.

واژه‌های کلیدی: دوتصویری بودن نسبت به ایده‌آل، انقباض‌پذیری نسبت به ایده‌آل، جبر نیمگروهی، همنهشتی گروهی، مدول باناخ.

*. عهده‌دار مکاتبات:
Email: rahimi@iauctb.ac.ir

۱- مقدمه

یکی از مفاهیم مهم مرتبط با انقباض‌پذیری یک جبر باناخ، مفهوم دوتصویری[1] بودن آن است. فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک $A-$ دومدول باناخ باشد؛ نگاشت خطی و کراندار $D: A \to X$ را یک اشتقاق نامیم هرگاه به ازای هر a و b در A داشته باشیم: $D(ab) = a.D(b) + D(a).b$. به ازای هر $x \in X$، نگاشت $\delta_x(a) = a.x - x.a$ یک اشتقاق است که به آن اشتقاق درونی (القا شده به وسیله x) می‌گوییم. جبر باناخ A را انقباض‌پذیر (میانگین‌پذیر) می‌نامیم هرگاه به ازای هر $A-$ دومدول باناخ X، هر اشتقاق $D: A \to X$ ($D: A \to X^*$) درونی باشد.

همچنین A را دوتصویری می‌نامیم هرگاه نگاشت ضربی $\pi_A: A \widehat{\otimes} A \to A$ با ضابطه $\pi_A(a \otimes b) = ab$، به عنوان یک همریختی $A-$ دومدولی کراندار، یک درون‌بر[2] باشد؛ یعنی یک همریختی $A-$ دومدولی کراندار مانند $\rho: A \to A \widehat{\otimes} A$ موجود باشد به طوری که $\pi_A o\rho = id_A$؛ که در آن id_A همان نگاشت همانی روی A است.

در حالت کلاسیک می‌دانیم اگر جبر باناخ A دارای یک واحد تقریبی کراندار و دوتصویری باشد آنگاه A میانگین‌پذیر است؛ بعلاوه ثابت شده است که جبر باناخ A انقباض‌پذیر است اگر و تنها اگر A دوتصویری و یکدار باشد. همچنین هلمسکی نشان داده است که به ازای هر گروه موضعاً فشرده (گسسته) G، $L^1(G)$ ($l^1(G)$) دوتصویری است اگر و تنها اگر G فشرده (متناهی) باشد. برای جزئیات بیشتر در این زمینه می‌توان به منابع [3,6,7,8] مراجعه نمود.

مفهوم انقباض‌پذیری (میانگین‌پذیری) یک جبر باناخ نسبت به ایده‌آل آن توسط رحیمی – طهماسبی (رحیمی – امینی) در مقاله [10] ([1]) معرفی گردید. در واقع اگر I یک ایده‌آل بسته از جبر باناخ A باشد آنگاه A را نسبت به I انقباض‌پذیر (میانگین‌پذیر) نامیم هرگاه به ازای هر $A-$ دومدول باناخ X که $I.X = X.I = 0$، هر اشتقاق $D: A \to X$ ($D: A \to X^*$) روی $A\backslash I$ درونی باشد؛ یعنی عنصر $x \in X$ ($\varphi \in X^*$) موجود باشد به طوری که به ازای هر $a \in A\backslash I$ داشته باشیم:

$$D(a) = a.x - x.a$$
$$(D(a) = a.\varphi - \varphi.a)$$

ما در این مقاله، مفهوم دوتصویری بودن یک جبر باناخ نسبت به ایده‌آل را معرفی می‌کنیم و ارتباط آن با مفاهیم انقباض‌پذیری و انقباض‌پذیری نسبت به ایده‌آل را مطالعه می‌کنیم. به عنوان کاربردی از نتایج حاصله، نشان می‌دهیم که به ازای هر نیمگروه S، $l^1(S)$ نسبت به I_ρ دوتصویری است اگر و تنها اگر $\frac{S}{\rho}$ متناهی باشد که در آن I_ρ ایده‌آل متناظر با همنهشتی ρ روی S است. این نتیجه را می‌توان به عنوان نسخه‌ای از قضیه هلمسکی برای جبرهای باناخ نیمگروهی در نظر گرفت.
این مقاله در دو بخش تنظیم شده است، که اهداف هر بخش در ابتدای آن با تفصیل بیان شده‌اند.

۲- دوتصویری بودن جبرهای باناخ نسبت به ایده‌آل

در این بخش ابتدا مقدمات لازم را برای معرفی مفهوم دوتصویری بودن یک جبر باناخ نسبت به ایده‌آل می‌آوریم و سپس با تعریف این مفهوم، برخی شرایط لازم و کافی را برای انقباض‌پذیری یک جبر باناخ نسبت به ایده‌آل به دست می‌آوریم. به ویژه جبرهای باناخ خارج قسمتی انقباض‌پذیر را با استفاده از مفهوم فوق مشخص‌سازی می‌کنیم.
فرض کنیم A یک جبر باناخ و I یک ایده‌آل بسته آن باشد. در ادامه مقصود از نماد $\mathcal{AI}$، ایده‌آل بسته تولید شده به وسیله مجموعه $\{a.i : a \in A, i \in I\}$ می‌باشد. همچنین به ازای هر $a \in A$، از نمادهای $\bar{a}$ و $\tilde{a}$ به ترتیب برای نمایش عناصر $a + I$ در $\frac{A}{I}$ و $a + \mathcal{AI}$ در $\frac{A}{\mathcal{AI}}$ استفاده می‌کنیم.
می‌دانیم اگر X و Y دو $A-$ دومدول باناخ باشند، آنگاه حاصلضرب تانسوری تصویری $X \widehat{\otimes} Y$ نیز یک $A-$ دومدول باناخ با ضرب‌های مدولی زیر است:

$$a.(x \otimes y) = a.x \otimes y$$
$$(x \otimes y).a = x \otimes y.a$$
$$(x \in X, y \in Y, a \in A)$$

1. Biprojectivity
2. Retraction

بنابراین $\frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{\mathcal{AI}}$ یک A- دومدول باناخ است که در آن ضرب‌های مدولی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$a.\left(\bar{b}\otimes\tilde{c}\right)=\overline{ab}\otimes\tilde{c}$$
$$\left(\bar{b}\otimes\tilde{c}\right).a=\bar{b}\otimes\widetilde{ca}\quad(a,b,c\in A)$$

همچنین نگاشت $\tilde{b}\mapsto\bar{b}$ به وضوح یک همریختی A- دومدولی کراندار از $\frac{A}{\mathcal{AI}}$ به روی $\frac{A}{I}$ است، بدین ترتیب نگاشت $\pi:\frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{\mathcal{AI}}\to\frac{A}{I}$ با ضابطه $\pi\left(\bar{a}\otimes\tilde{b}\right)=\overline{ab}$ یک همریختی A- دومدولی کراندار خوش‌تعریف است.

در ادامه برای جبر باناخ A مقصود از نماد id_A همان نگاشت همانی روی A و مقصود از نماد π_A نگاشت $a\otimes b\mapsto ab$ از $A\widehat{\otimes}A$ به A است.

اگر E و F دو فضای باناخ باشند آنگاه از نماد $\mathcal{B}(E,F)$ برای نمایش مجموعه نگاشت‌های خطی کراندار از E به F استفاده می‌کنیم و برای A- دومدول‌های باناخ X و Y، نماد ${}_A\mathcal{B}_A(X,Y)$ را برای نمایش مجموعه همریختی‌های A- دومدولی کراندار از X به Y به کار می‌بریم.

مفروضات کلی: در طول این مقاله از نمادهای $\mathcal{AI}$، π، π_A، id_A، $\mathcal{B}(X,Y)$ و ${}_A\mathcal{B}_A(X,Y)$ به معنایی که در بالا معرفی شدند، استفاده می‌کنیم مگر آنکه خلاف آن صراحتاً ذکر گردد.

تعریف ۲-۱: فرض کنید A یک جبر باناخ و I یک ایده‌آل بسته آن باشد. A را نسبت به I دوتصویری نامیم هرگاه نگاشت $\pi:\frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{\mathcal{AI}}\to\frac{A}{I}$ با ضابطه $\pi\left(\bar{a}\otimes\tilde{b}\right)=\overline{ab}$ یک درون‌بر در ${}_A\mathcal{B}_A\left(\frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{\mathcal{AI}},\frac{A}{I}\right)$ باشد؛ یعنی نگاشت π دارای یک وارون راست در ${}_A\mathcal{B}_A\left(\frac{A}{I},\frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{\mathcal{AI}}\right)$ باشد.

با استفاده از تعریف زیر، مفهوم دوتصویری بودن یک جبر باناخ نسبت به ایده‌آل را در قضیه ۲-۴ مشخص‌سازی می‌کنیم.

تعریف ۲-۲: فرض کنید A یک جبر باناخ و I یک ایده‌آل بسته آن باشد. عنصر $u\in\frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{\mathcal{AI}}$ را یک I- قطر تصویری برای A می‌نامیم هرگاه به ازای هر $a\in A$ داشته باشیم:

(i) $a.u=u.a$

(ii) $a.\pi(u)=\bar{a}$

تبصره ۲-۳: اگر I یک ایده‌آل بسته از جبر باناخ A باشد و A دارای یک I- قطر تصویری مانند u باشد آنگاه $\frac{A}{I}$ دارای عنصر واحد $\pi(u)$ است؛ زیرا به ازای هر $\bar{a}\in\frac{A}{I}$ داریم:

$$\bar{a}.\pi(u)=a.\pi(u)=\pi(a.u)=\pi(u.a)$$
$$=\pi(u).a=\pi(u).\bar{a}=\bar{a}$$

قضیه ۲-۴: فرض کنید A یک جبر باناخ و I یک ایده‌آل بسته آن باشد. در این صورت $\frac{A}{I}$ یکدار و A نسبت به I دوتصویری است اگر و تنها اگر A دارای یک I- قطر تصویری باشد.

برهان: ($\Leftarrow$) فرض کنید A نسبت به I دوتصویری باشد، در این صورت نگاشت $\rho\in{}_A\mathcal{B}_A\left(\frac{A}{I},\frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{\mathcal{AI}}\right)$ موجود است به طوری که: $\pi o\rho=id_{\frac{A}{I}}$. فرض کنید $e\in A$ به طوری که $\bar{e}$ عضو واحد $\frac{A}{I}$ باشد و قرار دهید: $u=\rho(\bar{e})$. در این صورت $u\in\frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{\mathcal{AI}}$ و داریم:

$$\pi(u)=\pi\left(\rho(\bar{e})\right)=(\pi o\rho)(\bar{e})=\bar{e}$$

و به ازای هر $a\in A$ داریم:

$$\begin{aligned}a.u=a.\rho(\bar{e})&=\rho(a.\bar{e})=\rho(\bar{a}\bar{e})\\&=\rho(\bar{a})=\rho(\bar{e}\bar{a})\\&=\rho(\bar{e}.a)=\rho(\bar{e}).a\\&=u.a\end{aligned}$$

بنابراین u یک I- قطر تصویری برای A است.

($\Rightarrow$) فرض کنید A دارای یک I- قطر تصویری به نام u باشد. در این صورت بنابر تبصره ۲-۳، $\bar{e}:=\pi(u)$ همان عنصر واحد $\frac{A}{I}$ است و بعلاوه به ازای هر $b\in A$ داریم $b.u=u.b$. نگاشت $\rho:\frac{A}{I}\to\frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{\mathcal{AI}}$ را با ضابطه $\rho(\bar{a})=a.u$ تعریف می‌کنیم. چون $I.\left(\frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{\mathcal{AI}}\right)=0$، نگاشت ρ خوش‌تعریف است.

بعلاوه به ازای هر $a,b\in A$ داریم:

$$\rho(b.\bar{a})=\rho(\overline{ba})=(ba).u=b.(a.u)=b.\rho(\bar{a})$$

و

$$\rho(\bar{a}.b)=\rho(\overline{ab})=(ab).u=a.(b.u)=a.(u.b)=(a.u).b=\rho(\bar{a}).b$$

بنابراین $\rho\in {}_A\mathcal{B}_A\left(\frac{A}{I},\frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{\mathcal{AI}}\right)$. از طرفی به ازای هر $a\in A$ داریم:

$$\pi o\rho(\bar{a})=\pi(a.u)=a.\pi(u)=a.\bar{e}=\bar{a}\bar{e}=\bar{a}$$

یعنی $\pi o\rho=id_{\frac{A}{I}}$؛ بنابراین π یک درون‌بر در ${}_A\mathcal{B}_A\left(\frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{\mathcal{AI}},\frac{A}{I}\right)$ است و بنابراین A نسبت به I دوتصویری است. ■

لم ۲-۵: فرض کنید A یک جبر باناخ و I یک ایده‌آل بسته آن باشد به طوری که $\frac{A}{I}$ یکدار و دارای عضو واحد $\bar{e}$ باشد ($e\in A$). اگر X یک $\frac{A}{I}$ – دومدول باناخ و

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{a_n}\otimes\widetilde{b_n}\right)\in\frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{\mathcal{AI}}$$

یک I– قطر تصویری برای A باشد آنگاه:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{a_nb_n}=\bar{e}$

(ii) به ازای هر $a\in A$ و هر نگاشت خطی $T:\frac{A}{I}\to X$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{aa_n}.T(\overline{b_n})\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{a_n}.T(\overline{b_na})\quad(a_n,b_n\in A)$$

برهان: (i) بنابر تبصره ۲-۳ داریم $\pi(u)=\bar{e}$؛ از طرفی

$$\pi(u)=\pi\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{a_n}\otimes\widetilde{b_n}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\pi\left(\overline{a_n}\otimes\widetilde{b_n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{a_nb_n}$$

بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{a_nb_n}=\bar{e}$.

(ii) نگاشت $\varphi:\frac{A}{I}\times\frac{A}{\mathcal{AI}}\to X$ با ضابطه $\varphi(\bar{a},\tilde{b})=\bar{a}.T(\bar{b})$ را تعریف می‌کنیم. به وضوح φ یک نگاشت دوخطی خوش‌تعریف است. بنابراین طبق خاصیت جهانی حاصلضرب تانسوری، نگاشت خطی $\psi:\frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{\mathcal{AI}}\to X$ با ضابطه $\psi(\bar{a}\otimes\tilde{b})=\bar{a}.T(\bar{b})$ موجود است. فرض کنید $a\in A$ دلخواه باشد، چون u یک I– قطر تصویری برای A است داریم $a.u=u.a$ و این یعنی:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{aa_n}\otimes\widetilde{b_n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{a_n}\otimes\widetilde{b_na}\right).$$

اکنون با تأثیر نگاشت ψ بر طرفین تساوی فوق داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{aa_n}.T(\overline{b_n})\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{a_n}.T(\overline{b_na}).$$

قضیه ۲-۶: فرض کنید A یک جبر باناخ و I یک ایده‌آل بسته آن باشد. در این صورت A دارای یک I– قطر تصویری است اگر و تنها اگر $\frac{A}{I}$ انقباض‌پذیر باشد.

برهان: ($\Leftarrow$) فرض کنید X یک $\frac{A}{I}$ – دومدول باناخ و $D:\frac{A}{I}\to X$ یک اشتقاق دلخواه و $u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{a_n}\otimes\widetilde{b_n}\right)$ در $\frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{\mathcal{AI}}$ یک I– قطر تصویری برای A باشد ($a_n,b_n\in A$). قرار می‌دهیم:

$$x_0=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{a_n}.D(\overline{b_n})$$

به ازای هر $a\in A$ با استفاده از لم ۲-۵ داریم:

$$\bar{a}.x_0-x_0.\bar{a}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{aa_n}.D(\overline{b_n})\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{a_n}.D(\overline{b_n}).\bar{a}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{a_n}.D(\overline{b_na})\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{a_n}.D(\overline{b_n}).\bar{a}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\overline{a_n b_n}.D(\bar{a})\right) = \bar{e}.D(\bar{a})$$

که در آن $\pi(u) = \bar{e}$ عنصر واحد $\frac{A}{I}$ است. اکنون قرار می‌دهیم: $\widehat{D} = D - \bar{e}.D$؛ در این صورت $\widehat{D}:\frac{A}{I} \to X$ یک اشتقاق است و به ازای هر $\bar{a}, \bar{b} \in \frac{A}{I}$ داریم: $\bar{a}.\widehat{D}(\bar{b}) = 0$.

با فرض $x_1 = -\widehat{D}(\bar{e})$ داریم:

$$\begin{aligned}\bar{a}.x_1 - x_1.\bar{a} = -x_1.\bar{a} &= \widehat{D}(\bar{e}).\bar{a}\\ &= \widehat{D}(\bar{e}).\bar{a} + \bar{e}.\widehat{D}(\bar{a})\\ &= \widehat{D}(\bar{e}\bar{a})\\ &= \widehat{D}(\bar{a}) \qquad \left(\bar{a} \in \frac{A}{I}\right)\end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر $\bar{a} \in \frac{A}{I}$ داریم:

$$\begin{aligned}\bar{a}.(x_0 + x_1) - (x_0 + x_1).\bar{a} &= (\bar{a}.x_0 - x_0.\bar{a})\\ &+ (\bar{a}.x_1 - x_1.\bar{a})\\ &= \bar{e}.D(\bar{a}) + \widehat{D}(\bar{a})\\ &= \bar{e}.D(\bar{a})\\ &+ (D - \bar{e}.D)(\bar{a}) = D(\bar{a})\end{aligned}$$

و این یعنی اشتقاق D درونی و لذا $\frac{A}{I}$ انقباض‌پذیر است.

($\Rightarrow$) فرض کنیم $\frac{A}{I}$ انقباض‌پذیر باشد؛ قرار می‌دهیم $X = \frac{A}{I} \widehat{\otimes} \frac{A}{AI}$. چون $I.X = X.I = 0$، لذا A- دومدول X را می‌توان به عنوان یک $\frac{A}{I}$ - دومدول با ضرب‌های مدولی زیر در نظر گرفت:

$$\bar{a}.x = ax \quad , \quad x.\bar{a} = xa \quad \left(\bar{a} \in \frac{A}{I}, x \in X\right)$$

بنابراین زیر دومدول باناخ $\ker \pi$ از X نیز دارای ساختار $\frac{A}{I}$ - دومدولی مشابه است. چون $\frac{A}{I}$ انقباض‌پذیر است، بنابراین یکدار است؛ عنصر $e \in A$ را در نظر می‌گیریم به طوری که $\bar{e}$ عضو واحد $\frac{A}{I}$ باشد و نگاشت $D:\frac{A}{I} \to \ker \pi$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$D(\bar{a}) = \bar{a}.(\bar{e} \otimes \tilde{e}) - (\bar{e} \otimes \tilde{e}).\bar{a} \quad \left(\bar{a} \in \frac{A}{I}\right)$$

از آنجا که

$$\begin{aligned}\pi\big(D(\bar{a})\big) &= \pi(\bar{a} \otimes \tilde{e}) - \pi(\bar{e} \otimes \widetilde{ea})\\ &= \overline{ae} - \overline{eea}\\ &= \bar{a}\bar{e} - \bar{e}\bar{e}\bar{a} = \bar{a} - \bar{a}\\ &= 0\end{aligned}$$

لذا D خوش‌تعریف است. نگاشت D یک اشتقاق است و انقباض‌پذیری $\frac{A}{I}$ ایجاب می‌کند که $v \in \ker \pi$ موجود باشد به‌طوری‌که $D(\bar{a}) = \bar{a}.v - v.\bar{a}$. اکنون قرار می‌دهیم $u := \bar{e} \otimes \tilde{e} - v$؛ در این صورت $u \in X$ و

$$\pi(u) = \pi(\bar{e} \otimes \tilde{e}) - \pi(v) = \bar{e}$$

و بعلاوه

$$\begin{aligned}a.u - u.a = \bar{a}.u - u.\bar{a} &= [\bar{a}.(\bar{e} \otimes \tilde{e})\\ &- (\bar{e} \otimes \tilde{e}).\bar{a}]\\ &- [\bar{a}.v - v.\bar{a}]\\ &= D(\bar{a}) - D(\bar{a}) = 0\end{aligned}$$

بنابراین u همان I- قطر تصویری مطلوب برای A است.■

در قضایای زیر ارتباط بین مفاهیم دوتصویری بودن یک جبر باناخ نسبت به ایده‌آل و انقباض‌پذیری آن نسبت به ایده‌آل را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲-۷: فرض کنید A یک جبر باناخ و I یک ایده‌آل بسته آن باشد. اگر A نسبت به I انقباض‌پذیر باشد آنگاه A نسبت به I دوتصویری است.

برهان: چون A نسبت به I انقباض‌پذیر است، بنابر قضیه ۱۲(ii) از [10]، جبر باناخ $\frac{A}{I}$ انقباض‌پذیر است؛ لذا طبق قضیه ۲-۶، A دارای یک I- قطر تصویری است. اکنون بنابر قضیه ۲-۴، A نسبت به I دوتصویری است.

قضیه ۲-۸: فرض کنیم A یک جبر باناخ و I یک ایده‌آل بسته آن باشد به طوری که $\frac{A}{I}$ یکدار باشد و $I^2 = I$. در این صورت اگر A نسبت به I دوتصویری باشد، آنگاه A نسبت به I انقباض‌پذیر است.

برهان: چون $\frac{A}{I}$ یکدار و A نسبت به I دوتصویری است،

بنابر قضیه ۲-۴، A دارای یک I- قطر تصویری است؛ لذا بنابر قضیه ۲-۶، $\frac{A}{I}$ انقباض‌پذیر است. اکنون چون $I^2 = I$، طبق قضیه ۱۲(i) از [10]، A نسبت به I انقباض‌پذیر است.■

اگر I یک ایده‌آل بسته از جبر باناخ A باشد، در قضایای زیر ارتباط بین دوتصویری بودن A نسبت به I و دوتصویری بودن $\frac{A}{I}$ را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۲-۹: فرض کنید A یک جبر باناخ و I یک ایده‌آل بسته آن باشد؛ اگر $\frac{A}{I}$ دوتصویری و یکدار باشد آنگاه A نسبت به I دوتصویری است.

برهان: چون $\frac{A}{I}$ یکدار و دوتصویری است، بنابر قضیه ۲.۸.۴۸ از [3]، $\frac{A}{I}$ انقباض‌پذیر است، لذا طبق قضیه ۲-۶، A دارای یک I- قطر تصویری است؛ اکنون بنابر قضیه ۲-۴، A نسبت به I دوتصویری است.■

لم ۲-۱۰: فرض کنید A یک جبر باناخ، X و Y دو A- دومدول باناخ و I یک ایده‌آل بسته از A باشد به طوری که $I.X = X.I = 0$ و $I.Y = Y.I = 0$. در این صورت اگر $\varphi \in {}_A\mathcal{B}_A(X,Y)$ آنگاه $\varphi \in {}_{\frac{A}{I}}\mathcal{B}_{\frac{A}{I}}(X,Y)$.

برهان: چون $I.X = X.I = 0$، بنابراین A- دومدول باناخ X را می‌توان به عنوان یک $\frac{A}{I}$- دومدول باناخ با ضرب‌های مدولی $\bar{a}.x = a.x$ و $x.\bar{a} = x.a$ در نظر گرفت که در آن $a \in A$ و $x \in X$. به همین ترتیب A- دومدول باناخ Y دارای ساختار $\frac{A}{I}$- دومدولی با اعمال مدولی $\bar{a}.y = a.y$ و $y.\bar{a} = y.a$ می‌باشد که در آن $a \in A$ و $y \in Y$. اکنون اگر $\bar{a} \in \frac{A}{I}$ و $x \in X$ دلخواه باشند، آنگاه داریم:

$$\varphi(\bar{a}.x) = \varphi(a.x) = a.\varphi(x) = \bar{a}.\varphi(x)$$

و

$$\varphi(x.\bar{a}) = \varphi(x.a) = \varphi(x).a = \varphi(x).\bar{a}$$

بنابراین $\varphi \in {}_{\frac{A}{I}}\mathcal{B}_{\frac{A}{I}}(X,Y)$.■

در قضیه زیر با یک برهان مستقیم نشان می‌دهیم که دوتصویری بودن A نسبت به I یک شرط کافی برای دوتصویری بودن $\frac{A}{I}$ است.

قضیه ۲-۱۱: فرض کنید A یک جبر باناخ و I یک ایده‌آل بسته آن باشد؛ اگر A نسبت به I دوتصویری باشد آنگاه $\frac{A}{I}$ دوتصویری است.

برهان: بنا به فرض، نگاشت $\rho \in {}_A\mathcal{B}_A\left(\frac{A}{I}, \frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{\mathcal{AI}}\right)$ موجود است به طوری که $\pi o \rho = id_{\frac{A}{I}}$. اگر $\bar{a} \in \frac{A}{I}$ دلخواه باشد، می‌توان فرض کرد $\rho(\bar{a}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{a_n}\otimes\widetilde{b_n}\right)$، که در آن $\overline{a_n} \in \frac{A}{I}$ و $\widetilde{b_n} \in \frac{A}{\mathcal{AI}}$. نگاشت $q: \frac{A}{\mathcal{AI}} \to \frac{A}{I}$ را با ضابطه $q(\tilde{a}) = \bar{a}$ در نظر می‌گیریم $(a \in A)$. چون $\|\bar{a}\| \le \|\tilde{a}\|$، لذا q کراندار است. از طرفی به وضوح q یک همریختی A- دومدولی است. بنابراین $q \in {}_A\mathcal{B}_A\left(\frac{A}{\mathcal{AI}}, \frac{A}{I}\right)$. قرار می‌دهیم $\varphi := id_{\frac{A}{I}} \widehat{\otimes} q$؛ در این صورت $\varphi \in {}_A\mathcal{B}_A\left(\frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{\mathcal{AI}}, \frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{I}\right)$ و به ازای هر $a, b \in A$، $\varphi\left(\bar{a}\otimes\tilde{b}\right) = id_{\frac{A}{I}}(\bar{a})\otimes q\left(\tilde{b}\right) = \bar{a}\otimes\bar{b}$. قرار می‌دهیم $\psi = \varphi o \rho$. در این صورت $\psi \in {}_A\mathcal{B}_A\left(\frac{A}{I}, \frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{I}\right)$. چون $I.\left(\frac{A}{I}\right) = \left(\frac{A}{I}\right).I = 0$ و $I.\left(\frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{I}\right) = \left(\frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{I}\right).I = 0$، بنابر لم ۲-۱۱ داریم:

$$\psi \in {}_{\frac{A}{I}}\mathcal{B}_{\frac{A}{I}}\left(\frac{A}{I}, \frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{I}\right)$$

بعلاوه داریم:

$$\begin{aligned}\left(\pi_{\frac{A}{I}} o \psi\right)(\bar{a}) &= \left(\pi_{\frac{A}{I}} o \varphi o \rho\right)(\bar{a}) \\ &= \left(\pi_{\frac{A}{I}} o \varphi\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{a_n} \otimes \widetilde{b_n}\right)\right) \\ &= \pi_{\frac{A}{I}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\left(\overline{a_n}\otimes\widetilde{b_n}\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi_{\frac{A}{I}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{a_n}\otimes\overline{b_n}\right)\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\pi_{\frac{A}{I}}\left(\overline{a_n}\otimes\overline{b_n}\right)\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\overline{a_n b_n}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\pi\left(\overline{a_n}\otimes\widetilde{b_n}\right)\right)\\
&= \pi\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{a_n}\otimes\widetilde{b_n}\right)\right)\\
&= \pi\big(\rho(\bar{a})\big) = \bar{a}
\end{aligned}$$

این یعنی $\pi_{\frac{A}{I}}$ یک درون‌بر در ${}_{\frac{A}{I}}\mathcal{B}_{\frac{A}{I}}\left(\frac{A}{I}\widehat{\otimes}\frac{A}{I},\frac{A}{I}\right)$ است و بنابراین $\frac{A}{I}$ دوتصویری است.■

۳- دوتصویری بودن جبرهای باناخ نیمگروهی نسبت به ایده‌آل

هلمسکی در [7,8] نشان داده است که برای گروه گسسته G، $l^1(G)$ دوتصویری است اگر و تنها اگر G متناهی باشد. پس از او رامسدن در مورد دوتصویری بودن جبرهای باناخ نیمگروهی در [11] نشان داد که برای هر نیمگروه گسسته S، $l^1(S)$ دوتصویری است اگر و تنها اگر S به طور یکنواخت موضعاً متناهی و هر زیرگروه ماکزیمال S متناهی باشد.

در این بخش ما با استفاده از تناظر موجود بین همنهشتی‌های روی نیمگروه S و ایده‌آل‌ها در جبر نیمگروهی $l^1(S)$، نشان می‌دهیم که دوتصویری بودن یک نیمگروه خارج قسمتی را می‌توان به دوتصویری بودن یک جبر نسبت به ایده‌آل ترجمه نمود و نسخه مشابهی از قضیه هلمسکی را در مورد جبرهای باناخ نیمگروهی به دست می‌آوریم. برای این منظور ابتدا مقدمات لازم در مورد نظریه نیمگروه‌ها را یادآوری می‌کنیم. برای جزئیات بیشتر می‌توان به منابع [4,5,9] مراجعه نمود.

فرض کنید ρ یک همنهشتی روی نیمگروه S باشد؛ ρ را یک همنهشتی گروهی نامیم هرگاه $\frac{S}{\rho}$ یک گروه باشد.

می‌دانیم جبر نیمگروهی $l^1(S)=\{f|f:S\to\mathbb{C},\sum_{s\in S}|f(s)|<\infty\}$ تحت نرم $\|f\|_1=\sum_{s\in S}|f(s)|$ یک جبر باناخ است و هر عضو از آن دارای یک نمایش منحصر به فرد به صورت $f=\sum_{s\in S}c_s.\delta_s$ است که در آن δ_s همان جرم نقطه‌ای در s است. با یکسان فرض کردن s با δ_s می‌توان S را به عنوان یک زیرمجموعه از $l^1(S)$ در نظر گرفت.

فرض کنید S یک نیمگروه، ρ یک همنهشتی روی S و $\varphi:S\to\frac{S}{\rho}$ همان نگاشت خارج قسمتی باشد. φ را می‌توان به بروریختی جبری $\hat{\varphi}:l^1(S)\to l^1\left(\frac{S}{\rho}\right)$ توسیع داد که در آن $\ker\hat{\varphi}:=I_\rho$ یک ایده‌آل در $l^1(S)$ است که با مجموعه $\{\delta_s-\delta_t: s,t\in S, s\rho t\}$ تولید می‌شود. بنابراین $l^1\left(\frac{S}{\rho}\right)\simeq\frac{l^1(S)}{I_\rho}$؛ همچنین اگر J یک ایده‌آل از $l^1(S)$ و ρ_J همنهشتی تعریف شده روی S به صورت زیر باشد:

$\rho_J=\{(s,t): s,t\in S,\delta_s-\delta_t\in J\}$

آنگاه $I_{\rho_J}\subseteq J$.

قضیه ۳-۱: فرض کنید S یک نیمگروه و ρ یک همنهشتی گروهی روی S باشد. در این صورت $l^1(S)$ نسبت به I_ρ دوتصویری است اگر و تنها اگر $\frac{S}{\rho}$ متناهی باشد.

برهان: چون $\frac{S}{\rho}$ یک گروه است، $l^1\left(\frac{S}{\rho}\right)$ یکدار است. از طرفی $l^1\left(\frac{S}{\rho}\right)\simeq\frac{l^1(S)}{I_\rho}$؛ بنابراین طبق قضیه هلمسکی، جبر باناخ یکدار $\frac{l^1(S)}{I_\rho}$ دوتصویری است اگر و تنها اگر $\frac{S}{\rho}$ متناهی باشد. اکنون بنابر قضایای ۲-۱۰ و ۲-۱۲، $l^1(S)$ نسبت به I_ρ دوتصویری است اگر و تنها اگر $\frac{S}{\rho}$ متناهی باشد.■

مثال ۳-۲: فرض کنید $S=(\mathbb{N},\vee)$ نیمگروه اعداد صحیح مثبت با عمل ماکزیمم باشد. بنابراین $E(S)=\mathbb{N}$؛ که در آن $E(S)$ مجموعه تمام خودتوان‌های S است. همنهشتی ρ روی S را به صورت

زیر تعریف می‌کنیم:

$$m\rho n \Leftrightarrow \exists k \in E(S): \\ km = kn \qquad (m, n \in S)$$

به وضوح ρ یک همنهشتی گروهی (کوچکترین همنهشتی گروهی) روی S است و $\frac{S}{\rho} = G_S$ همان تصویر گروهی ماکزیمم (بدیهی) از S است. چون G_S متناهی است، بنابر قضیه ۳-۱، $l^1(S)$ نسبت به I_ρ دوتصویری است.

مثال ۳-۳: فرض کنید $S = \{p^m q^n : m, n \geq 0\}$ نیمگروه دو دوری تولید شده به وسیله p و q باشد. به سادگی می‌توان دید که $E(S) = \{p^n q^n : n = 0,1,2,\dots\}$ که در آن $E(S)$ مجموعه تمام خودتوان‌های S است. همنهشتی ρ روی S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x\rho y \Leftrightarrow \exists e \in E(S): \\ ex = ey \qquad (x, y \in S)$$

در این صورت ρ کوچکترین همنهشتی گروهی روی S است و $\frac{S}{\rho} = G_S = \mathbb{Z}$ ([2]). چون G_S نامتناهی است، بنابر قضیه ۳-۱، $l^1(S)$ نسبت به I_ρ دوتصویری نیست.

فهرست مراجع

[1] M. Amini, H. Rahimi, Amenability of semigroups and their algebras modulo a group congruence, Acta Mathematica Hungarica, Vol 144, Issue 2 (2014), 407-415.

[2] A. H. Clifford, J. B. Preston, The algebraic theory of semigroups, American Mathematical Society Surveys **7**, American Mathematical Society, Providence, 1961.

[3] H. G. Dales, Banach algebras and automatic continuity, London Mathematical Society Monographs **24** (Clarendon Press, Oxford), 2000.

[4] R. S. Gigon, Congruences and group congruences,
In Semigroup Forum, Springer, **86** (2013), 431-450.

[5] G. M. S. Gomes, Group congruences on eventually inverse semigroups, Portugaliae Mathematica, **49** (1992), 417-428.

[6] A Ya Helemskii, On a method for calculating and estimating the global homological dimension of banach algebras, Sbornik: Mathematics, **(1) 16** (1972), 125-138.

[7] A.Ya. Helemskii, Flat banach modules and amenable algebras, Trans. Moscow Math. Soc**.** **47** (1984), 179-218.

[8] A.Ya. Helemskii, The homology of Banach and topological algebras, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.

[9] J. M. Howie, Fundamentals of Semigroup Theory, London Mathematical Society Monographs **12**, (Clarendon Press, Oxford), 1995.

[10] H. Rahimi, E. Tahmasebi, Amenability and contractibility modulo an ideal of Banach algebras, Abstract and Applied Analysis **2014** (2014).

[11] P. Ramsden, Biflatness of semigroup algebras, In Semigroup Forum, Springer **79** (2009), 515-530.