دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره شانزدهم، زمستان ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

آزمونی جدید برای وجود دسته‌ای از ثابت‌های نوع اویلر تعمیم‌یافته

محمدهادی اقتصادی فرد[۱]، محمدهادی هوشمند[۲*]

(۱) دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران
(۲) دانشیار، گروه ریاضی، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۱/۲۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۰/۲۷

چکیده

یکی از مهمترین ثابت‌های ریاضی، ثابت اویلر- ماسکورونی[۱] است که حد دنباله $(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})-log\ n$ بوده و با نماد γ نمایش داده می‌شود ($\gamma = 0/5772156649...$). به منظور تعمیم این ثابت، ثابت‌های توسعه یافته دیگری معرفی شده که به ثابت‌های نوع اویلر[۲] معروف هستند. در این مقاله با ایده گرفتن از مشتق دنباله تابعی جمع‌بند حدی توابع (معرفی شده بوسیله نویسنده دوم)، دسته‌ای از ثابت‌های نوع اویلر تعمیم یافته را معرفی و آزمونی برای همگرایی آنها و وجود چنین ثابت‌هایی را به اثبات می‌رسانیم. سپس نشان می‌دهیم که آزمون وجودی ارائه شده توسط ساندور[۳] نتیجه‌ای از آن بوده و ثابت‌های نوع اویلر تعمیم یافته ذکر شده طیف وسیع‌تری از آنها را شامل می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: ثابت اویلر- ماسکورونی، ثابت‌های نوع اویلر، تابع گاما، جمع‌پذیری حدی توابع حقیقی.

---

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: hadi.hooshmand@gmail.com

1. Euler-Mascheroni Constant
2. Euler type Constants
3. Jozef Sandor

۱- تاریخچه و مقدمه

ثابت اویلر که با γ نشان داده می‌شود، یکی از ثابت‌های معروف پرکاربرد ریاضی است که در قرن هجدهم توسط اویلر و ماسکورونی معرفی شد (برای مثال مرجع [۱,۲] را ببینید). سپس به منظور تعمیم آن، ثابت‌های نوع اویلر معرفی شد که یکی از مقالات مهم در آن زمینه مرجع [۷] است که در سال ۲۰۰۷ توسط ساندور ارئه گردید. همچنین در مرجع [۶] ثابت‌های نوع اویلر و تحقیقات انجام شده در مورد آنها، بطور کامل مورد مطالعه قرار گرفته است. از طرف دیگر در سال ۱۹۹۷ وبستر توابع نوع گاما را که در معادله تابعی

$$f(x+1)=g(x)f(x) \quad ; x>0$$

صدق می‌کردند، مورد مطالعه قرار داد و قضیه بوهر–مالراپ را تعمیم داد (مرجع [۲,۸] را ببینید). اما در مرجع [۳] هوشمند مفهوم جدید جمع‌پذیر حدی توابع و توابع جمع‌بند آن‌ها را برای هر تابع تعریف شده بر زیرمجموعه اعداد حقیقی یا مختلط (فقط با شرط آن که دامنه آن شامل اعداد طبیعی باشد) مطرح نموده و نشان داد که توابع نوع گاما را می‌توان به عنوان زیر مبحثی از آن در نظر گرفت. در این راستا برخی از قضایای مربوطه از جمله قضیه بوهر–مالراپ به نحو مطلوبی تعمیم داده شده و شرایط یکتایی تابع جمع‌بند حدی و وجود جواب یکتا برای معادلات تابعی

$$\lambda(x)=f(x)+\lambda(x-1),\varphi(x)=f(x)\varphi(x-1)$$

مورد مطالعه قرار گرفت. اخیراً در مرجع [۵] جمع‌پذیر تحلیلی توابع نیز توسط نویسنده دوم معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

جمع‌پذیری حدی توابع حقیقی و مختلط

فرض کنید f تابعی از D_f به $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد بطوریکه $\mathbb{N}^*\subseteq D_f$ ($\mathbb{N}^*$ نشان‌دهنده مجموعه اعداد طبیعی است و $\mathbb{N}=\mathbb{N}^*\bigcup\{0\}$). مجموعه جمع‌بند D_f با

$$\sum_f=\{x:x+\mathbb{N}^*\subseteq D_f\}$$

تعریف می‌شود. از اینرو $x\in\sum_f$ اگر و فقط اگر

$$\{x+1,x+2,\dots,x+n,\dots\}\subseteq D_f$$

اگر $\mathbb{N}^*\subseteq D_f$ آن‌گاه دنباله‌های تابعی زیر در مرجع [۳] به آن نظیر شده است:

$$R_n(f,x)=R_n(x)=f(n)-f(x+n),$$

$$f_{\sigma_n}(x)=xf(n)+\sum_{k=1}^{n}R_k(x)$$

برای تمام $n\in\mathbb{N}^*$ و $x\in\sum_f$. تابع f در $x_0\in\sum_f$ (بطور مشابه روی $S\subseteq\sum_f$) جمع پذیر است اگر دنباله تابعی $f_{\sigma_n}(x)$ در x_0 (بطور مشابه در هر نقطه S) همگرا باشد. تابع f جمع‌پذیر یکنواخت روی S نامیده می‌شود اگر $f_{\sigma_n}(x)$ روی S همگرای یکنواخت باشد.

تابع حدی $f_{\sigma_n}(x)$ (بطور مشابه $R_n(f,x)$) با $f_\sigma(x)$ (بطور مشابه با $R(f,x)$) نشان داده می‌شود و به f_σ تابع جمع‌بند حدی f (یا به اختصار تابع جمع بند f) می‌گوئیم. توجه کنید که دامنه f_σ، بصورت

$$D_{f_\sigma}=\{x\in\sum_f : \text{در } x \text{ جمع‌پذیراست } f\}$$

است. دانستن موارد زیر مهم است که

$$\sum_f\bigcap D_f=\sum_f+1=\{x+1:x\in\sum_f\},f_\sigma(0)=0$$

(بنابراین $0\in D_{f_\sigma}$).

اگر $0\in D_{f_\sigma}$ داریم $f_\sigma(-1)=-f(0)$ همچنین $1\in D_{f_\sigma}$ اگر و فقط اگر $R_n(1)$ همگرا بوده و این نیز معادل آن است که $D_f\bigcap D_{f_\sigma}=D_{f_\sigma}+1$. شرط لازم برای جمع‌پذیری f در x آن است که

$$\lim_{n\to\infty}(R_n(x)-xR_{n-1}(1))=0$$

همچنین اگر $R(1)=0$، آن‌گاه

$$(1.1)\quad f_\sigma(x)=f(x)+f_\sigma(x-1)\ ;\ x\in D_{f_\sigma}+1$$

$$(1.2)\quad f_\sigma(m)=\sum_{j=1}^{m}f(j)\ ;\quad m\in\mathbb{N}^*$$

در مرجع [۳] ثابت شده که گزاره های زیر معادل‌اند و هر تابعی که در یکی از آن شرایط صدق کند جمع‌پذیر حدی نامیده می‌شود:

الف) $D_f \subseteq D_{f_\sigma}$, $R(۱)=۰$

ب) $R(۱)=۰$, $D_f \subseteq D_f - ۱$, $D_{f_\sigma} = \sum_f$

پ) برای هر $x \in D_f$، $f_\sigma(x)=f(x)+f_\sigma(x-۱)$

لذا اگر f جمع‌پذیر حدی باشد آن‌گاه $\lambda = f_\sigma$ در معادله تابعی تفاضلی

$$\lambda(x)=f(x)+\lambda(x-۱)\ ;\ x\in D_f$$

صدق می‌کند بنابراین f_σ همچنین جواب معادله

$$g(x+۱)-g(x)=F(x)\ ;\ x\in D_f-۱$$

است که در آن $F(x)=f(x+۱)$.

با بکارگیری قضیه ۳۰۳ از مرجع [۴] نتیجه می‌گیریم $f:[۱,+\infty)\to\mathbb{R}$ جمع‌پذیر است اگر و فقط اگر f روی بازه $(۰,۱)$ جمع‌پذیر بوده و $R(f,۱)=۰$.

یکی از مهمترین محک‌ها برای جمع‌پذیری حدی در مرجع [۴] معرفی شده است که نشان می‌دهد توابع محدب یا مقعری که $R_n(f,۱)$ کراندار باشد جمع‌پذیری حدی هستند. قضیه زیر بیان دیگری از آن برای توابع $f:[۱,+\infty)\to\mathbb{R}$ می‌باشد.

قضیه الف ([۴]). فرض کنید $f:[۱,+\infty)\to\mathbb{R}$ یک تابع حقیقی باشد بطوریکه $R_n(۱)$ کراندار باشد آن‌گاه

الف) اگر f از جایی به بعد روی $D_f=[۱,+\infty)$ محدب یا مقعر باشد آن‌گاه f روی هر زیرمجموعه کراندار $\sum_f=[۰,+\infty)$، جمع‌پذیر یکنواخت است.

ب) اگر f روی $[۱,+\infty)$ محدب باشد، آن‌گاه

$$f_\sigma(x)\ge(x+۱)f(۱)-f(x+۱)\ \ ;\ \ x\ge ۰$$

یکی دیگر از محک‌های مهم از مرجع [۴]، قضیه ۳۰۱ است که نتیجه بعدی را برای جمع‌پذیری حدی توابع یکنوا می‌دهد.

نتیجه ب ([۴]). فرض کنید $f:[۱,+\infty)\to\mathbb{R}$ تابعی حقیقی باشد بطوریکه دنباله f_n کراندار است. اگر f از جایی به بعد روی $[۱,+\infty)$ یکنوا آن‌گاه f جمع‌پذیر حدی است و روی هر زیرمجموعه کراندار $[۰,+\infty)$ جمع‌پذیر حدی یکنواخت است.

۲- مشتق توابع جمع‌بند حدی و معرفی ثابت‌های نوع اویلر تعمیم یافته

مشتق توابع جمع‌بند (یعنی f_σ) توسط هوشمند مطالعه شد که دنباله تابعی آن به دسته ای از ثابت‌های نوع اویلر تعمیم یافته منتهی می‌شود.

اگر f روی $\sum_f$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه قرار می‌دهیم

$$f_{\sigma'_n}(x):=(f_{\sigma_n}(x))'=f(n)-\sum_{k=۱}^{n}f'(x+k)$$

و حد آن تابع در صورت وجود با $f_{\sigma'}(x)$ نمایش داده می‌شود. چون (با انتخاب $f=log$) داریم $log_{\sigma'}(۰)=-\gamma$ پس برای نمایش چنین ثابت‌های نوع اویلر وابسته به f از نماد $-\gamma_n(f,x)$ و $-\gamma_n(f)$ نیز به جای $f_{\sigma'_n}(x)$ و $f_{\sigma'_n}(۰)$ استفاده می‌کنیم و در واقع داریم

$$\gamma_n(f,x)=-f_{\sigma'_n}(x)\ \ ,\ \ \gamma_n(f)=-f_{\sigma'_n}(۰)$$

مثال ۲-۱: تابع حقیقی $f(x)=exp_a(x)=a^x$ با شرط $۰<a<۱$ در نظر می‌گیریم. دنباله تابعی $f_{\sigma'_n}(x)$ همگراست و داریم

$$\gamma(exp_a,x)=-\lim_{n\to\infty}(a^n-a^x\ln a\sum_{k=۱}^{n}a^k)$$
$$=a^x\frac{a}{۱-a}\ln a$$

و $\gamma(f,x)$ در معادله تابعی زیر صدق می‌کند

$$\gamma(exp_a,x-۱)-\gamma(exp_a,x)$$
$$=exp'_a(x)\ \ ;\ \ x\ge ۰$$

در واقع داریم

$$\begin{aligned}
&\gamma(exp_a, x-1)-\gamma(exp_a, x)\\
&= a^{x-1}\frac{a}{1-a}\ln a + a^{x}\frac{a}{1-a}\ln a\\
&= a^{x}\frac{a}{1-a}\left(\frac{1}{a}-1\right)\ln a = a^{x}\ln a\\
&= exp'_a(x)
\end{aligned}$$

همچنین اگر تابع حقیقی $f(x)=-\log x$ را در نظر بگیریم، دنباله تابعی $f_{\sigma'_n}(x)$ نیز همگراست و در نتیجه داریم

$$\begin{aligned}
&\gamma(-\log, x) = -\log_{\sigma'}(x)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\log n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+x}\right)\\
&= -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k(k+x)}\\
&= \psi(x+1) = \frac{1}{x}+\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\\
&= \frac{1}{x}+\psi(x)
\end{aligned}$$

برای تمام $x>0$. در این جا ψ نشان دهنده تابع دیگاما است و از قضیه الف نتیجه می‌گیریم

$$\log_{\sigma}(x)=\log\Gamma(x+1)$$

و

$$\log_{\sigma'}(x)=-\gamma(\log,x)=\psi(x+1)\ ,\quad \gamma=\gamma(\log,0)$$

حال آزمونی برای همگرایی مشتق دنباله تابعی جمع‌بند حدی و ثابت های تعمیم یافته نوع اویلر حاصل از آن ارائه می‌کنیم که نه تنها شرایط وجودی دسته وسیعی از آنها را به ما می‌دهد بلکه در حالت خاص $x=0$ آزمون ساندور از مرجع [۷] را نتیجه می‌دهد.

قضیه۲-۲: فرض کنید $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ تابعی باشد که مشتق آن نزولی و مثبت (یا صعودی و منفی) است. آن‌گاه $\gamma_n(f,x)$ برای هر $x\geq 0$ همگراست. افزون بر آن اگر $R_n(f,1)$ همگرا باشد آن‌گاه تابع $\gamma(f,x)$ و $f_{\sigma'}(x)$ در معادلات تابعی زیر صدق می‌کند

$$(1.3)\quad \gamma(f,x)=\gamma(f,x-1)-f'(x)\quad ;\ x\geq 1$$

$$(1.4)\quad f_{\sigma'}(x)=f_{\sigma'}(x-1)+f'(x)\quad ;\ x\geq 1$$

اثبات. با اعمال قضیه مقدار میانگین ($M.V.T$) برای f روی بازه $[n,n+1]$ (n عدد طبیعی دلخواه) وجود دارد $n<c_n<n+1$ بطوریکه

$$f(n+1)-f(n)=f'(c_n)$$

از طرفی یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned}
&(1.5)\ -\gamma_{n+1}(f,x)+\gamma_n(f,x)\\
&= f(n+1)-f(n)-f'(n+1+x)\\
&= f'(c_n)-f'(n+1+x)\geq 0\ ;\ x\geq 0
\end{aligned}$$

(زیرا $c_n<n+1<n+1+x$ و f' نزولی است). بنابراین دنباله $f_{\sigma_n}(x)=-\gamma_n(f,x)$ برای $x\geq 0$ صعودی است. حال عدد حقیقی ثابت $x\geq 0$ را در نظر می‌گیریم از طرف دیگر برای هر عدد صحیح $2\leq k\leq n$ داریم

$$f'(x+k)\leq\int_{k-1}^{k}f'(t+x)dt\leq f'(x+k-1)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
f'(x+k)&\leq f(x+k)-f(x+k-1)\\
&\leq f'(x+k-1)\ ;\ k=2,3,\dots,n
\end{aligned}$$

از ترکیب نامساوی‌های بالا نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{n}f'(x+k)\leq f(x+n)-f(x+1)\\
&\leq\sum_{k=2}^{n}f'(x+k-1)
\end{aligned}$$

و این ایجاب می‌کند

$$\begin{aligned}
&(1.6)\ \ f(n)-f(x+n)-f'(x+1)\\
&+f(x+1)\leq-\gamma_n(f,x)\\
&\leq f(n)-f(x+n+1)+\\
&f'(x+1)f(x+2)\ ;\ x\geq 0
\end{aligned}$$

و بار دیگر با استفاده از قضیه مقدار میانگین برای f روی بازه $[n,x+n+۱]$ پیدا می‌کنیم $n<d_n<x+n+۱$ بطوریکه

$$f(x+n+۱)-f(n)=(x+۱)f'(d_n)$$

بنابراین با بکارگیری نامساوی (۱،۶) می‌توان نوشت

$$(۱.۷)\ -\gamma_n(f,x)\leq -(x+۱)f'(d_n) -f'(x+۱)+f(x+۲) \leq f(x+۲)\ ;\ x\geq ۰$$

لذا نامساوی‌های (۱،۵) و (۱،۷) ایجاب می‌کند که برای هر $x\geq ۰$ دنباله تابعی $\gamma_n(f,x)$ همگراست.
به منظور اثبات معادلات تابعی (۱،۳) و (۱،۴) با مشتق گیری از اتحاد

$$f_{\sigma_n}(x)=f(x)+f_{\sigma_n}(x-۱)+R_n(f,x)\ ;\ x\geq ۱$$

داریم

$$(۱.۸)\ f_{\sigma'_n}(x)=f'(x)+f_{\sigma'_n}(x-۱)-f'(n+x)$$

از طرفی یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که

$$R_n(f,۱)+f'(x+n)=f_{\sigma'_n}(x-۱)-f_{\sigma'_{n+۱}}(x-۱);x\geq ۱$$

حال با توجه به همگرایی دنباله تابعی $f_{\sigma'_n}(x)$ روی $[۰,+\infty)$ و دنباله $R_n(f,۱)$، تساوی فوق ایجاب می‌کند

$$\lim_{n\to\infty} f'(n+x)=-R(f,۱)\ ;\ x\geq ۱$$

بنابراین با $n\to\infty$ در (۱،۸) نتیجه می‌شود

$$f_{\sigma'}(x)=f'(x)+f_{\sigma'}(x-۱)+R(f,۱)\ ;\ x\geq ۱$$

به ویژه اگر $R(f,۱)=۰$ آن‌گاه داریم

$$\gamma(f,x)=\gamma(f,x-۱)-f'(x)\quad ;\ x\geq ۱$$

مثال ۲-۳: تابع حقیقی $f(x)=tan^{-۱}(x)$ با دامنه $\mathbb{R}$ در نظر گرفته و با بکارگیری قضیه الف و قضیه ۲-۲ نتیجه می‌گیریم که f روی $[۱,+\infty)$ جمع‌پذیر است (چون f مقعراست) و $f_{\sigma'}(x)$ برای هر $x\in[۰,+\infty)$ همگرا است. لذا

$$\gamma(f,x)=\gamma(tan^{-۱},x)=-(tan^{-۱})_{\sigma'}(x) =\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{۱+(x+k)^۲}-\frac{\pi}{۲}$$

بویژه

$$\gamma(f)=\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{۱+k^۲}-\frac{\pi}{۲} =\frac{۱}{۲}(\pi coth(\pi)-۱)-\frac{\pi}{۲}$$

همچنین $\gamma(f,x)$ در معادله تابعی زیر صدق می‌کند.

$$f_{\sigma'}(x)-f_{\sigma'}(x-۱)=f'(x)\quad ;\quad x\geq ۱$$

یعنی

$$\gamma(tan^{-۱},x-۱)-\gamma(tan^{-۱},x) =(tan^{-۱})'(x)=\frac{۱}{۱+x^۲}\ ;\ x\geq ۱$$

در واقع داریم

$$\gamma(f,x-۱)-\gamma(f,x)= \sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{۱+(x+k-۱)^۲}-\frac{\pi}{۲}-\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{۱+(x+k)^۲}+\frac{\pi}{۲} =\lim_{n\to\infty}(\frac{۱}{۱+x^۲}-\frac{۱}{۱+(x+n)^۲})=(tan^{-۱})'(x)$$

که همان معادله تابعی (۱.۴) برای $f=tan^{-۱}$ است.

۳- ارتباط با برخی دیگر از ثابت‌های نوع اویلر

ساندور برخی از ثابت‌های نوع اویلر و وجود آنها را در مقاله [۶] بررسی کرد و آزمونی برای همگرایی آنها ارائه

داد. در آن مقاله تابع $F:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ با ویژگی‌های معینی در نظر گرفته شده است. مطابق نماد بکار رفته شده در قضیه ساندور فرض کنید A_n و B_n دو دنباله از تابع انتگرال‌پذیر $F:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ به ترتیب زیر باشد

$$A_n=A_n(F)=\sum_{i=1}^{n}F(i)-\int_1^{n+1}F(x)\,dx$$

$$B_n=B_n(F)=\sum_{i=1}^{n+1}F(i)-\int_1^{n+1}F(x)\,dx \quad ;\ n\geq 1$$

اگر $F(x)=\frac{1}{x}$ آن‌گاه حد مشترک این دنباله‌ها همان ثابت اویلر- ماسکورونی می‌باشد.

قضیه پ (ساندور [۷])

فرض کنید تابع $F:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ مثبت و نزولی و پیوسته باشد آن‌گاه دنباله $A_n(F)$ صعودی و همگرا و دنباله $B_n(F)$ نزولی و همگراست و با فرض اینکه $\lim_{x\to\infty}F(x)=0$ دو دنباله حد یکسان دارند.

حال ادعا می‌کنیم که قضیه (پ) نتیجه‌ای از قضیه ۲-۲ به ازای $x=0$ است (واضح است که عکس آن برقرار نیست).

قضیه۳-۱: قضیه (پ) نتیجه‌ای از قضیه ۲-۲ است (در حالت خاص $x=0$)

اثبات. فرض کنید که $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ در شرایط قضیه (پ) صدق کند (در اینجا f نقش F در قضیه ساندور را بازی می‌کند). از اینرو f پیوسته بوده و حد f در بی‌نهایت موجود و دارای تابع اولیه F روی $[1,+\infty)$ است. حال تابع F شرایط قضیه ۲-۲ (به جای f) را دارد لذا دنباله $\gamma_n(F,x)$ برای $x\geq 0$ همگرا می‌باشد. اما با محاسبه داریم

$$(1.8)\qquad B_{n-1}(f)=\gamma_n(F)+F(1)$$
$$=F(1)-F(n)+\sum_{k=1}^{n}F'(k)$$

با توجه به همگرایی دنباله $\gamma_n(F,0)$، رابطه فوق ایجاب می‌کند $B_n(f)$ همگرا بوده و داریم

$$(1.9)\qquad B(f)=\gamma(F)+F(1)$$

لذا $A_n(f)$ نیز با توجه به رابطه زیر همگرا است

$$A_n(f)=B_n(f)-f(n+1)$$

و در نتیجه

$$(1.10)\qquad A(f)=\gamma(F)+F(1)-f(\infty)$$

که $f(\infty)$ همان $\lim_{n\to\infty}f(n)$ است. لذا اگر $f(\infty)=0$ آن‌گاه

$$A(f)=B(f)=\gamma(F)+F(1).$$

مثال ۳-۲: فرض کنید $0<p\leq 1$ عدد حقیقی ثابتی باشد و قرار دهید $f(x)=(\log x)^p$. با توجه به $0<p\leq 1$ نتیجه می‌شود f' بر $[1,+\infty)$ نزولی و مثبت است پس شرایط قضیه ۲-۲ را دارد و

$$\gamma(f)=\lim_{n\to\infty}\left((\log n)^p-\sum_{k=1}^{n}\frac{p}{k}(\log k)^{p-1}\right)=$$

$$\begin{cases}-\gamma \\ p=1 \\ \sum_{k=1}^{\infty}\left((\log(k+1))^p-(\log k)^p-\frac{p}{k}(\log k)^{p-1}\right) \\ 0<p<1\end{cases}$$

از طرفی با رابطه بدست آمده بین $\gamma(f)$، $B(f')$ و $A(f')$ (با جایگزین کردن F بوسیله f و تابع f توسط f') در (۱،۹) و (۱،۱۰) خواهیم داشت

$$\gamma_{f'}=A(f')=B(f')=f(1)+\gamma(f).$$

فهرست منابع

[1] T. M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Springer, 1976.

[2] E. Artin, The Gamma Function, Holt Rhinehart & Wilson, New York; Transl. by M. Butler (1931) from Einfuhrung un dfr Theorie der Gamma fonktion, Teubner, Leipzig, 1964.

[3] M. H. Hooshmand, Limit Summability of Real Functions, Real Analysis Exchange, 27(2) (2002), 463-472.

[4] M. H. Hooshmand, Another Look at the Limit Summability of Real Functions, J. Math. Ext., 4(2009), 73-89.

[5] M. H. Hooshmand, Analytic Summ-ability of Real and Complex Functions, J. Contemp. Math. Anal., 4(2016), 63-73.

[6] J. C. Lagarias, Eulers constant: Eulers Work and Modern Developments, Bulletin (New series) of the American Mathematical Society, vol. 50, No. 4(2013), 527- 628

[7] J. Sandor, On Generalized Euler Con–stants and Schlomilch-Lemonnier Type Inequalities, J. Math. Anal. Appl., 328(2007), 1336-1342.

[8] R. J. Webster, Log-Convex Solutions to the Functional Equation $f(x+1)=g(x)f(x):\Gamma$-Type Functions, J. Math. Anal. Appl., 209(1997), 605-623.