دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره پانزدهم، پاییز ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۲۵۸۸–۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

اندازه‌گیری کارایی سود کلی استوار با در نظر گرفتن عدم قطعیت در بردارهای قیمت ورودی و خروجی

محمدعلی رعایت پناه[۱]، نازیلا آقایی[*۲]

(۱) گروه علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران
(۲) گروه ریاضی، واحد اردبیل، دانشگاه آزاد اسلامی، اردبیل، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۰۷/۰۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۰۶/۲۶

چکیده

مدل کارایی سود کلی کلاسیک نیاز به اطلاعات دقیق از ورودی‌ها، خروجی‌ها و بردارهای قیمت ورودی و خروجی دارد. در حالی‌که در دنیای واقعی همه داده‌ها بطور دقیق در دسترس نمی‌باشد. در این حالت می‌توان از روش‌های تصادفی یا فازی برای محاسبه کارایی سود کلی استفاده نمود. در محاسبه کارایی سود کلی با این روش‌ها نیاز به اطلاعات بیشتری از داده‌ها از جمله تابع توزیع احتمال یا تابع عضویت داده‌ها می‌باشد، که در بعضی حالت‌ها ممکن است اطلاعات کافی برای تخمین این توابع وجود نداشته باشد و تنها دانش مربوط به پارامترها، تغییر آنها در یک فضای محدب بسته و کراندار است. لذا، در این مقاله با توجه به مدل عدم قطعیت بودجه‌ای در بهینه‌سازی استوار که قابل اعمال به مسایل بهینه‌سازی می‌باشد و نیز آنکه قابلیت تنظیم درجه محافظه کاری را دارد، مدل معادل استوار مساله محاسبه کارایی سود کلی با عدم قطعیت پارامتر بردار قیمت مطرح می‌گردد و سپس همتای استوار مدل برنامه‌ریزی خطی ارائه می‌شود. نتایج عددی نشان می‌دهند مقدار کارایی سود کلی واحدهای تصمیم گیرنده توسط مدل پیشنهادی در مقایسه با حالت خوش‌بینانه بیشتر است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، بهینه سازی استوار، کارایی سود کلی، داده‌های غیر قطعی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: nazila.aghayi@gmail.com

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر انواع مختلفی از کاربردهای تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی عملکرد نهادهای مختلف در بسیاری از سازمان‌ها مورد استفاده قرار گرفته است، از دلایل عمده استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها غیر پارامتری بودن این روش است. اولین بار در سال ۱۹۵۷ تابع کارایی برای برآورد چند ورودی و خروجی توسط فارل [1] مطرح گردید و تخمین تابع تولید را به طریق غیر پارامتری به دست آورد. چارنز و همکاران [2] تکنیک برنامه‌ریزی خطی با عنوان تحلیل پوششی داده‌ها را برای تعیین کارایی واحدهای تصمیم گیرنده با چند ورودی و خروجی معرفی کردند. این مدل که CCR نامیده شد، برای مسائل با بازده به مقیاس ثابت کاربرد داشت. بنکر و همکاران [3] مدل CCR را برای مسائل بازده به مقیاس متغیر تغییر دادند که مدل BCC نامیده شد. چارنز و همکاران [4] مدلی غیرشعاعی، با نام مدل جمعی معرفی نمودند. تن [5] روشی بر اساس اسلک‌ها برای اندازه گیری کارایی واحدهای تصمیم گیرنده ارائه داد. اندازه کارایی واحدهای تصمیم گیرنده در بازه [0,1] تغییر می‌کند و به واحدهایی که نمره کارایی انها برابر یک باشد واحد کارا و در غیر اینصورت ناکارا گفته می‌شود.

هنگامی که شخصی نیاز به هدف رفتاری همراه با اطلاعاتی از قیمت داشته باشد، کارایی کلی تعریف و اندازه گیری می‌شود. که این اهداف، حداکثر کردن درآمد، حداقل کردن هزینه و حداکثر کردن سود می‌باشند. اولین بار فارل [1] دغدغه خود را درباره اندازه گیری دقیق قیمت ها به منظور استفاده در ارزیابی کارایی هزینه مطرح نمود. در توسعه کار فارل، واریان و همکاران[6] مدلی برای اندازه گیری کارایی سود کلی معرفی کردند. مدل ارائه شده توسط آنها دارای بعضی نقاط ضعف و مشکلات می‌باشند، که طلوع و همکاران[7] مدلی برای اندازه گیری کارایی سود کلی ارائه دادند که مشکلات قبلی را ندارد و بردارهای قیمت ورودی و خروجی برای هر DMU می‌تواند تغییر کند، همچنین آنها نشان دادند که در حالت‌هایی که قیمت های خرید و فروش یکتایی در دست نباشد، از یک سری قیمت های مشاهده شده برای وضع کران‌های بالا و پایین می‌توان استفاده کرد که برای وضع چنین کران‌هایی از نظرات فردی استفاده می‌شود. در نتیجه، حالت های مختلفی از داده‌ها را در نظر گرفتند و مدلی برای اندازه گیری کارایی سود کلی با داده‌های بازه ای ارائه دادند. کاربردهای از کارایی سود را می‌توان در مقالات ونگ و همکاران [8] و ساکای و تاکاهاشی [9] دید. آقایی [10] مدلی برای اندازه گیری کارایی هزینه با داده‌های فازی پیشنهاد داد. امروزنژاد و همکاران [11] پیشرفت و پسرفت واحدهای تصمیم گیرنده را به کمک اندیس مالمکوییست و بر اساس کارایی سود کلی آنها با داده‌های بازه ای و فازی محاسبه کردند. رستمی مال خلیفه و آقایی [12] کارایی سود کلی را با داده‌های بازه ای محاسبه کردند و به رتبه بندی واحدها بر مبنای کارایی سود کلی با دو روش اندرسن و پیترسن و نرم یک پرداختند [13]. کسرونی [14] مفهومی از ساختار صنعتی حداقل کردن هزینه را پیاده سازی کردند و رابطه ای بین اندازه کارایی هزینه فردی و صنعتی در تکنولوژی با بازده به مقیاس متغیر برقرار کردند. صالح پور و آقایی [15] بیشترین کارای درآمد برای واحدها را با داده‌های نادقیق بدست آوردند.

بردارهای هزینه ورودی و سود خروجی از عوامل مهم آمیخته بازاریابی شناخته می‌شوند. در حالت کلی تعیین مقدار بردارهای هزینه ورودی و سود خروجی فعالیتی است که باید تکرار شود و فرایندی مداوم و پیوسته است. این تداوم ناشی از تغییرات محیطی نبوده ثبات در شرایط بازار است که لزوم تکرار این فرایند را توجیه می‌کند. ظرفیت مازاد، رقابت شدید و تغییرات دائمی مشخص کردن مقدارهای ثابت را دچار مشکل می‌کند. برای اینکه واحدی بتواند سود کنونی خود را به حداکثر برساند، باید تقاضا و هزینه‌های مربوط به قیمت‌های مختلف را برآورد کند برای تعیین مقدار بردارهای هزینه ورودی و سود خروجی و رضایت‌بخش باید عوامل موثر را شناسایی و آنها را تنظیم کرد. سه دسته کلی عوامل سازمانی، عوامل مشتری و عوامل بازار بر تصمیمات موثرند. این عوامل باعث می‌شود در هنگام ایجاد یک مدل نتوان مقدار مشخصی را برای داده‌ها متصور شد زیرا ممکن است برخی از پارامترهای هزینه ورودی و سود خروجی در

هنگام ایجاد مدل موجود نباشند. از این‌رو مقادیر مربوط به این پارامترها لازم است با پیش‌بینی مقداردهی شود بنابراین این پارامترها دارای خطای پیش‌بینی هستند و یا ممکن است بعضی از پارامترهای را دقیقاً نمی‌توان اندازه‌گیری نمود و مقداری که برای آن‌ها درنظر گرفته می‌شود یک مقدار اسمی می‌باشد. بنابراین این پارامترها دارای خطای اندازه‌گیری بوده و باید رفتاری تصادفی را برای پارامترها در نظر گرفته و بر اساس این رفتار به ارزیابی عملکرد واحدها پرداخته شود. در رویکرد تصادفی پارامترها می‌توان از برنامه‌ریزی تصادفی برای ارزیابی واحدها استفاده کرد. اما استفاده از برنامه‌ریزی تصادفی مستلزم شناخت توزیع پارامترها و برآورد توزیع با روش‌های آماری است که منجربه خطاهای نوع اول و دوم می‌شود و ممکن به دلیل اشتباهات در شناخت و براورد توزیع حتی جواب بدست آمده دیگر شدنی نباشد. بنابراین استفاده از برنامه‌ریزی تصادفی ممکن است منجر به نتایج قاطع و قابل دفاع برای مدیر یا تصمیم گیرند نشود پس روشی مورد نیاز است که با توجه به عدم قطعیت داده‌ها قادر به تولید جواب‌های با ریسک پذیر خیلی پایین بوده و تنها از دانش تغییرات پارامترها در یک مجموعه فشرده استفاده نمایید. پس هدف اصلی در اینجا مشخص کردن کارایی سود کلی است بطوری که پارامترهای به‌طور قطعی مشخص نمی‌باشد. این مسئله بدلیل سازگاری با شرایط دنیای واقعی از اهمیت شایانی برخوردار است که تا کنون به علت جدید بودن مبحث بهینه سازی استوار مورد توجه چندانی قرار نگرفته است.

روش بهینه‌سازی استوار اولین بار توسط سویستر[16] مطرح شد. آنها بهینه سازی خطی استوار را پیشنهاد دادند که بردار ستون‌های ماتریس قیود در یک مجموعه نامعین بیضوی[1] قرار داشت. سپس بن–تال و نمیروسکی [17,18,19] بهینه سازی استوار را با مجموعه‌های نامیعن مختلف مورد بحث قرار دادن و مدل‌های برنامه‌ریزی محدب با توجه به مجموعه نامعین ارائه دادند برتسیماس و سیم[20] مجموعه نامعین چندوجهی را در نظر گرفتند و تکنیکی را ارائه دادند که بر اساس آن مدل بهینه سازی به یک مدل برنامه‌ریزی خطی تبدیل و جواب بهینه با دقت محافظه‌کاری مشخص بدست آید. بعلاوه آنها این روش را برای مسائل گسسته نیز استفاده کردند این تکنیک باعث بوجود آمدن تحقیقاتی و کاربردهای زیادی در بهینه سازی کمترین مربعات و مدیریت زنجیره تامین شد ([21, 22] را ببینید). آقایی و همکاران [23] مدلی برای اندازه گیری کارایی واحدها با داده‌های غیرقطعی با وزن مشترک و به کمک سطح محافظت ارائه دادند. آقایی و ملکی [24] کارایی را با خروجی های نامطلوب و ورودی های ثابت به کمک بهینه سازی استوار محاسبه کردند.

در ادامه مقاله، تعاریف متغیرها و پارامترها برای ارائه مدل کارایی سود استوار در بخش دوم توصیف شده و سپس نتایج عددی و نتیجه‌گیری به ترتیب در بخش‌های سوم و چهارم بیان می‌شوند.

۲- پیشینه تحقیق

در این بخش، ابتدا مدل کلی برای اندازه گیری کارایی سود کلی را توضیح می‌دهیم و در ادامه، مدل پیشنهادی برای ارزیابی اندازه گیری کارایی سود کلی با در نظر گرفتن عدم قطعیت بردارهای قیمت ورودی و خروجی با توجه به مدل عدم قطعیت بودجه‌ای در بهینه‌سازی استوار آورده می‌شود.

فرض کنید n، DMU وجود دارد که m ورودی را برای تولیدی s خروجی مصرف می‌کند. فرض کنید $y_j = (y_{1j}, \ldots, y_{sj})$ و $x_j = (x_{1j}, \ldots, x_{mj})$ به ترتیب ورودی و خروجی DMU_j باشند که $x_j \geq 0$، $y_j \geq 0$، $x_j \neq 0$. $y_j \neq 0$ به علاوه، $p_j = (p_{1j}, \ldots, p_{sj})$ و $c_j = (c_{1j}, \ldots, c_{mj})$ به ترتیب بردارهای قیمت ورودی و خروجی متناظر DMU_j باشند که $c_j \geq 0, p_j \geq 0, c_j \neq 0, p_j \neq 0$

اسمیلد و همکاران [25] مدل زیر را برای اندازه‌گیری کارایی سود کلی معرفی کردند:

$$
\begin{aligned}
& max\, \varphi - \theta \\
& s.t.\ \varphi[r_o^T y_o] \leq r_o^T Y \lambda, \\
& \theta[r_o^T y_o] \leq c_o^T X \lambda, \\
& \lambda \geq 0,
\end{aligned} \tag{۱}
$$

1. ellipsoid

جایی که اندیس o، DMU تحت ارزیابی (DMU_o، $o = 1, \ldots, n$) را مشخص می‌کند تابع هدف مدل فوق، به واسطه حداکثر کردن درآمد کلی φ و حداقل کردن هزینه کلی (θ) به ازای بردار قیمت داده شده سود را حداکثر می‌کند.

طلوع و همکاران [7] مدل ارائه شده توسط اسمیلد و همکاران را توسعه داند و کارایی سود کلی DMU_o را با n بردار قیمت مختلف اندازه گیری کردند. آن ها مدل زیر را ارائه دادند:

$$
\begin{aligned}
&\max\ \varphi - \theta \\
&s.t.\ \varphi[r_j^T y_o] \le r_j^T Y \lambda, \quad j = 1, \cdots, n \\
&\theta[r_j^T y_o] \le c_j^T X \lambda, \quad j = 1, \cdots, n, \\
&\lambda \ge 0,
\end{aligned} \tag{۲}
$$

تعریف ۲-۱: DMU_o کارای سود کلی است هر گاه در مدل فوق، $\varphi - \theta = 0$ برقرار باشد.

قضیه ۲-۱: به ازای جواب بهینه $(\varphi^*, \theta^*, \lambda^*)$ از مدل فوق، داریم $\varphi^* - \theta^* \ge 0$

اثبات: به طلوع و همکاران (۲۰۰۸) مراجعه کنید.

توجه شود که چون مدل فوق با بازده به مقیاس ثابت، حداکثر سود را صفر در نظر می‌گیرد. بنابراین محدودیت $1\lambda = 1$ به مدل فوق اضافه می‌شود تا بازده به مقیاس متغیر در نظر گرفته شود.

در ادامه، مسئله کارایی سود کلی، هنگامی که پارامترها نامعین است درنظر گرفته می‌شود و فرض شده که پارامترهای مسئله از توزیع مشخصی پیروی نمی‌کند ولی در یک فضای محدب، کران‌دار و بسته قرار دارند. در چنین حالتی نمی‌توان از مدل‌های کلاسیک کارایی هزینه برای محاسبه کارایی سود کلی استفاده کرد. در واقع در حالتی که داده‌های غیر دقیق در یک بازه تغییر می‌کند آنگاه مقدار کارایی هزینه دارای عدم قطعیت می‌باشد. هدف طراحی مدلی است که جواب بدست آمده از آن با احتمال بالای در فضای نامعین پارامترها شدنی باشد. بنابراین باید مدلی طراحی گردد که در بدترین حالت تغییر پارامترهای کارایی سود کلی را مشخص نماید بر این اساس یک مدل بهینه‌سازی استوار معرفی می‌گردد که کارایی سود کلی را در بدترین حالت ممکن پیدا می‌کند. مدل بهینه‌سازی استوار با توجه به مجموعه نامعین به یک مدل خطی یا غیر خطی تبدیل شده که با استفاده از این مدل کارایی مناسب مشخص می‌شود.

با مفروضات قبلی برای n، DMU، مدل زیر را برای اندازه گیری کارایی سود کلی با در نظر گرفتن عدم قطعیت در بردارهای هزینه ورودی و سود خروجی بصورت زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
&\max\ \phi - \theta \\
&s.t. \\
&\sum_{r=1}^{s} \tilde{p}_{rj} [(\phi - \lambda_o) y_{ro} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq o}}^{n} y_{rl} \lambda_l] \le 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\
&\sum_{i=1}^{m} \tilde{c}_{ij} [(\lambda_o - \theta) x_{io} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq o}}^{n} \lambda_l x_{il})] \le 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
&\lambda_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n,
\end{aligned} \tag{۳}
$$

که در آن بردارهای هزینه ورودی $\widetilde{C}_j$ و سود خروجی $\widetilde{P}_j$ در یک مجموعه U تغییر می‌کند.

مدل فوق را می‌توان با استفاده از قیود شانس برای حمایت جواب در برابر نشدنی بودن نیز فرمول‌بندی کرد. اما فرمول‌بندی بر اساس قیود شانس باعث به وجود آمدن مسایل غیر محدب در حالت کلی می‌شود که مسایل غیرمحدب در حالت کلی در کلاس مسائل سخت قرار دارد. در اینجا تلاش می‌شود مدلی مناسب در رابطه با عدم قطعیت داده‌ها طراحی شود تا قادر به یافتن جوابی باشد که شدنی بودن این مدل را تضمین کنند. از آنجایی که این مدل یک مدل برنامه‌ریزی خطی غیرقطعی است پس مطلوب آن است که مدلی برنامه‌ریزی خطی در رابطه با عدم قطعیت بیان شود. به این دلیل مدلی بر مبنای بهینه سازی استوار برای این مدل به صورت زیر بیان می‌شود.

$$
\begin{aligned}
&\max \quad \varphi - \theta \\
&s\,t \quad \max_{\tilde{p}_j \in U_P,} \left\{ \sum_{r=1}^{s} \tilde{p}_{rj} \left[(\varphi - \lambda_0) y_{r0} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq 0}}^{n} y_{rl} \lambda_l \right] \right\} \le 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& j=1,\ldots.n, \\
& \max_{\tilde{c}_j \in U_P} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \tilde{c}_{ij} \left[(\lambda_o - \theta) x_{io} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq 0}}^{n} \lambda_l x_{il} \right] \right\} \leq 0, \\
& j=1,\ldots.n, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
& \lambda_j \geq 0 \qquad j=1,\ldots,n
\end{aligned} \tag{۴}
$$

که U_C و U_P به ترتیب مجموعه‌های داده شده برای پارامترهای دارای عدم قطعیت بردارهای هزینه ورودی و سود خروجی هستند. ارائه مدل خطی قابل حل برای مدل (۴) وابسته به انتخاب فرم مجموعه‌های U_C و U_P هستند. برای بدست آوردن یک مدل بهینه سازی خطی استوار، مجموعه‌های U_C و U_P را به صورت بازه‌ای در نظر گرفته می‌شود. در ادامه به بیان مدل همزاد استوار برای اندازه‌گیری کارایی کلی DMU_0 در رابطه با مدل (۴) می‌پردازیم.

هزینه ورودی $\tilde{c}_{ij}$ و سود خروجی $\tilde{p}_{rj}$ به عنوان یک متغیر تصادفی مستقل، کراندار با توزیع متقارن فرض شود که $\tilde{c}_{ij}$ در بازه $\left[c_{ij}^{0} - d_{ij}^{c}, c_{ij}^{0} + d_{ij}^{c}\right]$ و $\tilde{p}_{rj}$ در بازه $\left[p_{rj}^{0} - d_{rj}^{p}, p_{rj}^{0} + d_{rj}^{p}\right]$ تغییر می‌کند. مقادیر c_{ij}^{0} و p_{rj}^{0} به ترتیب مقادیر اسمی از ورودی‌ها و خروجی‌ها می‌باشند. همچنین این احتمال وجود دارد که $d_{ij}^{p}=0,\ d_{ij}^{c}=0$ شود، در واقع در دنیای واقعی، غیر محتمل است که همه پارامترهای ورودی و خروجی معادل مقادیر اسمی خود باشند یا اینکه در بدترین حالت خود قرار گیرند. بنابراین نیاز به طراحی مدلی است که برای این رابطه –بین اینکه مقدار پارامتر بین مقدار اسمی یا بدترین عملکرد خود است– یک توازن و تعادلی ایجاد می‌کند. بنابراین اعداد Γ_j^p و Γ_i^c برای $j=1,\ldots,n$ را معرفی کنیم که مقادیر خود را به ترتیب در بازه $\left[0,\left|J_j^p\right|\right]$ و $\left[0,\left|J_j^c\right|\right]$ اختیار می‌کند. که J_j^p و J_j^c مجموعه اندیس‌هایی از پارامترهای نامعین از داده‌های هزینه ورودی و سود خروجی هستند.

اعداد Γ_j^p و Γ_i^c استواری از روش پیشنهادی را در مقابل سطح محافظه کارانه جواب تعدیل می‌کند.

در واقع آنها برای عدم قطعیت، بودجه‌ای در نظر می‌گیرد. به طوری که مجموعه تغییرات از پارامترها نمی‌تواند از مقدار اعداد Γ_j^p و Γ_i^c برای $j=1,\ldots,n$ تجاوز کند. از آنجایی این حد آستانه متناظر با عدم قطعیت پارامترهای ورودی و خروجی است بنابراین مقدار صحیحی را می‌توان برای آنها فرض کرد.

حداکثر اعداد Γ_j^p و Γ_i^c به ترتیب از پارامترهای ورودی و خروجی می‌توانند، تغییر کنند. بنابراین همزاد استوار مدل (۴) به شرح زیر می‌باشد.

$$
\begin{aligned}
& \overline{d}_0 = \max \varphi - \theta \\
& s.t. \quad \sum_{r=1}^{s} p_{rj}^{0} \left(\varphi y_{r0} - \sum_{l=1}^{n} y_{rl} \lambda_l\right) + \\
& \max_{\{s_j^p \,|\, s_j^p \subseteq J_j^p, |s_j^p| \leq \Gamma_j^p\}} \left(\sum_{r \in s_j^p} d_{rj}^{p} \left| \varphi y_{ro} - \sum_{l=1}^{n} y_{rl} \lambda_l \right| \right) \leq 0, \\
& \sum_{i=1}^{m} c_{ij}^{0} \left(-\theta x_{io} + \sum_{l=1}^{n} x_{il} \lambda_l\right) + \\
& \max_{\{s_j^c \,|\, s_j^c \subseteq J_j^c, |s_j^c| \leq \Gamma_j^c\}} \left(\sum_{i \in s_j^c} d_{ij}^{c} \left| -\theta x_{io} + \sum_{l=1}^{n} x_{il} \lambda_l \right| \right) \leq 0, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
& \lambda_j \geq 0, \qquad j=1,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{۵}
$$

توابع $\gamma_j^p(\varphi,\lambda,\Gamma_j^p)$ و $\gamma_j^c(\theta,\lambda,\Gamma_j^c)$ از jامین DMU در رابطه با عدم قطعیت بردارهای هزینه ورودی و سود خروجی به ترتیب ذیل تعریف می‌شود:

$$\gamma_j^p(\varphi,\lambda,\Gamma_j^p) = \max_{\{s_j^p \,|\, s_j^p \subseteq J_j^p, |s_j^p| \leq \Gamma_j^p\}} \sum_{r \in s_j^p} d_{rj}^{p} \left| \varphi y_{ro} - \sum_{l=1}^{n} y_{rl} \lambda_l \right|,$$

$$\gamma_j^c(\theta,\lambda,\Gamma_j^c) = \max_{\{s_j^c \,|\, s_j^c \subseteq J_j^c, |s_j^c| \leq \Gamma_j^c\}} \sum_{i \in s_j^c} d_{ij}^{c} \left| -\theta x_{io} + \sum_{l=1}^{n} x_{il} \lambda_l \right|.$$

در حقیقت، جمله‌های $\gamma_j^p(\varphi,\lambda,\Gamma_j^p)$ و $\gamma_j^c(\theta,\lambda,\Gamma_j^c)$ با ایجاد شکافی بین قیود و اعداد سمت راست از شدنی بودن آنها حمایت می‌کند. مدل (۵) در رابطه با شدنی بودن دارای درجه اطمینان بالایی است پس مقدار تابع هدف از این مدل نسبت به مقدار تابع هدف از مدل اسمی بهتر نخواهد بود. همچنین این مدل دارای انعطاف نسبت به تعدیل استواری جواب در مقابل سطح محافظه کاری جواب با تغییر Γ_j^p و Γ_j^c است از این رو فرض می‌کنیم Γ_j^p و Γ_j^c یک مقدار صحیح در

بازه $[0,|J_j^x|]$ و $[0,|J_j^y|]$ انتخاب می‌کنند. بنابراین توابع γ را می‌توان به صورت زیر بیان نمود.

$$\gamma_j^p(\varphi,\lambda,\Gamma_j^p)=\max\sum_{r\in J_j^p} d_{rj}^p\,|\varphi y_{ro}-\sum_{l=1}^n y_{rl}\lambda_l|z_{rj}^p$$
$$s.t.\sum_{r\in J_j^p} z_{rj}^p\le\Gamma_j^p,\qquad (a)$$
$$0\le z_{rj}^p\le 1,\forall r\in J_j^p.\quad (b)\qquad (۶)$$

$$\gamma_j^c(\varphi,\lambda,\Gamma_j^c)=\max\sum_{i\in J_j^c} d_{ij}^c\,|-\theta x_{io}+\sum_{l=1}^n x_{il}\lambda_l|z_{ij}^c$$
$$s.t.\sum_{i\in J_j^c} z_{ij}^c\le\Gamma_j^c,\qquad (a)$$
$$0\le z_{ij}^c\le 1,\forall i\in J_j^c.\quad (b)\qquad (۷)$$

فرض کنید z_j^p, q_{rj}^p, z_j^c و q_{rj}^c به ترتیب متغیرهای دوگان وابسته با قیود $(6a)$، $(6b)$، $(7a)$ و $(7b)$ را نشان دهد. با در نظر گرفتن دوگان مدل (۶)، مدل (۷) و با استفاده از قضیه قوی دوگان، مدل بهینه سازی خطی زیر معادل با مدل (۵) حاصل می‌گردد.

$$\begin{aligned}
&\bar{d}_o=\max\varphi-\theta\\
&s.t.\sum_{r=1}^s p_{rj}^0(\varphi y_{ro}-\sum_{l=1}^n y_{rl}\lambda_l)+\\
&z_j^p\Gamma_j^p+\sum_{r\in J_j^p} q_{rj}^p\le 0,\qquad j=1,\dots,n,\\
&\sum_{i=1}^m c_{rj}^0(-\theta x_{io}-\sum_{l=1}^n x_{il}\lambda_l)+z_j^c\Gamma_j^c\\
&+\sum_{i\in J_j^c} q_{ij}^c\le 0,\qquad j=1,\dots,n,\qquad (۸)\\
&z_j^p+q_{rj}^p\ge d_{rj}^p f_r^p,\qquad j=1,\dots,n,\quad r\in J_j^p,\\
&z_j^c+q_{ij}^c\ge d_{ij}^c f_i^c,\qquad j=1,\dots,n,\quad i\in J_j^c,\\
&-f_r^p\le\varphi y_{ro}^0-\sum_{l=1}^n y_{rl}^0\lambda_l\le f_r^p,\qquad r=1,\dots,s,\\
&-f_i^c\le\theta x_{io}^0-\sum_{l=1}^n x_{il}^0\lambda_l\le f_i^c,\qquad i=1,\dots,m,\\
&\sum_{j=1}^n\lambda_j=1,\\
&\lambda_j\ge 0,\quad z_j^p\ge 0,\ z_j^c\ge 0\\
&j=1,\dots,n,\\
&f_r^p\ge 0\quad f_i^c\ge 0,\ q_{rj}^c\ge 0,\\
&j=1,\dots,n,\qquad r\in J_j^p,\qquad i\in J_j^c.
\end{aligned}$$

تعریف۲-۲: DMU_0 کارایی سود کلی است هرگاه در مدل (۸) داشته باشیم : $\bar{d}_o=0$.

تعریف ۲-۳: کارایی سود کلی برای DMU_i بزرگتر از DMU_j است وقتی که $\bar{d}_i<\bar{d}_j$.

قضیه ۲-۲: برای هر جواب بهینه از مدل (۸) داریم $\phi^*-\theta^*\ge 0$.

اثبات: مدل (۸) دارای جواب شدنی $\phi=1$ $\theta=1$ $\lambda_0=1$ و $\lambda_j=0$ $(o\ne j)$ و سایر متغیرها صفر است. از این رو جواب بهینه برای $\phi-\theta$ نمایش داده شده با $\phi^*-\theta^*$بزرگتر یا مساوی صفر است.
از آنجایی که بردار قیمت به یک بازه متعلق است پس حالت خوش بینانه کارایی سود کلی از DMU_0 را می‌توان توسط رابطه زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}
&d_o^U=\max\varphi-\theta\\
&s.t.\sum_{r=1}^s p_{rj}^0(\varphi y_{ro}-\sum_{l=1}^n y_{rl}\lambda_l)+\\
&\sum_{r\in J_j^p} d_{rj}^p(-\varphi y_{ro}+\sum_{l=1}^n y_{rl}\lambda_l)\le 0\qquad j=1,\dots,n\\
&\sum_{i=1}^m c_{ij}^0(-\theta x_{io}+\sum_{l=1}^n x_{il}\lambda_l)-\sum_{i\in J_j^c} d_{ij}^c(\theta x_{io}+\sum_{l=1}^n x_{il}\lambda_l)\le 0\qquad j=1,\dots,n\\
&\sum_{j=1}^n\lambda_j=1,\\
&\lambda_j\ge 0,\qquad j=1,\dots,n\qquad (۸)
\end{aligned}$$

قضیه ۲-۳: فرض کنید $(\bar{\lambda},\bar{\varphi},\bar{\theta},\bar{z}^p,\bar{z}^c,\bar{q}^p,\bar{q}^c)$ و $(\lambda^*,\varphi^*,\theta^*)$ به ترتیب جواب‌های بهینه از مدل‌های (۸) و (۹) هستند، آنگاه داریم $\bar{d}_o\le d_o^U$.

اثبات: از آنجایی که،

$(\bar{\lambda},\bar{\varphi},\bar{\theta},\bar{z}^p,\bar{z}^c,\bar{q}^p,\bar{q}^c)$

جواب بهینه از مدل (۸) هست، بنابراین داریم:

$$\bar{z}_j^p+\bar{q}_{rj}^p\ge d_{ro}^p(\bar{\varphi}y_{ro}-\sum_{l=1}^n y_{rl}\bar{\lambda}_l),$$

$$j=1,\ldots,n, \quad r\in J_j^p,$$
$$\bar{z}_j^c+\bar{q}_{ij}^c\geq d_{ij}^c(-\bar{\theta}x_{io}+\sum_{l=1}^n x_{il}\bar{\lambda}_l),$$
$$j=1,\ldots,n, \quad r\in J_j^c$$

با مجموع گرفتن بر روی اندیس j بدست می‌آوریم:

$$\bar{z}_j^p\Gamma_j^p+\sum_{r\in J_j^p}\bar{q}_{rj}^p\geq\sum_{r\in J_j^p} d_{rj}^p(\bar{\varphi}y_{ro}-\sum_{l=1}^n\bar{\lambda}_l y_{rl}),$$
$$j=1,\ldots,n,$$
$$\bar{z}_j^c\Gamma_j^c+\sum_{r\in J_j^y}\bar{q}_{rj}^c\geq\sum_{r\in J_j^x} d_{ij}^c(-\bar{\theta}x_{io}+\sum_{l=1}^n\bar{\lambda}_l x_{il}),$$
$$j=1,\ldots,n,$$

با استفاده از قیود اول و دوم مدل (۸) داریم،

$$\sum_{r=1}^s p_{rj}^0(\bar{\varphi}y_{r0}-\sum_{l=1}^n\bar{\lambda}_l y_{rl})+$$
$$\sum_{r\in J_j^y} d_{rj}^p(\bar{\varphi}y_{r0}-\sum_{l=1}^n\bar{\lambda}_l y_{rl})\leq 0, \quad j=1,\ldots,n,$$
$$\sum_{i=1}^m c_{ij}^0(-\bar{\theta}x_{io}+\sum_{l=1}^n\bar{\lambda}_l x_{il})+$$
$$\sum_{r\in J_j^x} d_{ij}^c(-\bar{\theta}x_{io}+\sum_{l=1}^n\bar{\lambda}_l x_{il})\leq 0, \quad j=1,\ldots,n,$$

همچنین با توجه به قید $\sum_{j=1}^n\lambda_j=1$، جواب بهینه از مدل (۸) یک جواب شدنی مدل (۹) است. در نتیجه داریم، $\bar{d}_o\leq d_o^U$

نتیجه۲-۱: اگر DMU_0 کارایی سود کلی توسط مدل (۹) باشد، آنگاه آن کارایی سود کلی توسط مدل (۸) نیز می‌باشد.

۳- مثال‌های عددی

در این بخش، نتایج عددی جهت ارزیابی عملکرد مدل پیشنهادی بر روی دو نمونه از داده‌ها ارائه می‌شود. در نمونه اول مساله‌ای با ۱۲ واحد تصمیم گیرنده دارای دو ورودی و دو خروجی با بردار قیمت بازه‌ای در نظر گرفته شده و در نمونه دوم روش بیان شده برای شعبات بانک ملی استان اردبیل در ایران در نظر گرفته شده است.

مدل (۸) براساس تغییرات مقادیر مختلف گاما در دو حالت حل شده‌اند. در حالت اول، مقدار کارایی کلی هزینه برای هر گاما، که بطور تصادفی تولید شده، بدست می‌آید. در حالت دوم، مقدار کارایی کلی با تغییر از صفر تا تعداد پارامترهای نامعین محاسبه می‌گردد. میانگینی از مقدار کارایی سود کلی به عنوان کارایی سود کلی استوار در نظر می‌گیریم.

مساله‌ای با ۱۲ واحد تصمیم گیرنده دارای دو ورودی و دو خروجی با بردار هزینه بازه‌ای در نظر گرفته شده است. بردار ورودی، خروجی و قیمت‌های اسمی از مقاله کوپر و همکاران [25] استفاده شده است. داده‌های ورودی و خروجی در جدول (۱) آمده است. بردارهای قیمت ورودی و خروجی در جدول (۲) نمایش داده شده‌اند. فرض شده است که انحراف از داده‌های اسمی برابر ۱۰ باشد یعنی $d_{rj}^p=d_{ij}^c=10$.

مدل (۸) برای ترکیب‌های مختلفی از Γ_j^p و Γ_j^c با استفاده از $GAMS$ حل شده است. ده Γ_j^p و Γ_j^c تصادفی تولید شده و کارایی سود کلی متناظر به دست آمده است. و کارایی سود کلی استوار با استفاده از میانگین مقادیر به دست آمده مشخص می‌شود و با $\bar{d}_j^1$ نمایش می‌دهیم. همچنین مقادیر Γ_j^p و Γ_j^c از مقدار صفر تا دو با طول گام ۰،۲ افزایش یافته و کارایی سود کلی متناظر را به دست می‌آوریم. میانگینی از مقدار کارایی سود کلی را عنوان کارایی سود کلی استوار بیان شده و با $\bar{d}_j^2$ نمایش می‌دهیم.

نتایج به دست آمده در جدول (۳) داده شده است. آخرین ستون از جدول (۳) مقدار کارایی سود کلی از DMUها را با بردار قیمت ورودی و خروجی بازه‌ای در حالت خوش بینانه نشان می‌دهد. در جدول (۳) DMU_1 وقتی با مدل (۸) ارزیابی می‌شود، کارای سود کلی است، در حالیکه توسط مدل (۹) ناکارای سود کلی می‌باشد.

جدول ۱. داده‌های ورودی و خروجی برای ۱۲ واحد تصمیم گیرنده

O_2	O_1	I_2	I_1	DMU
90	100	151	20	1
50	150	131	19	2
55	160	160	25	3
72	180	168	27	4
66	94	158	22	5
90	230	255	55	6
88	220	235	33	7
80	152	206	31	8
100	190	244	30	9
100	250	268	50	10
147	260	306	53	11
120	250	284	38	12

جدول ۲. هزینه‌های ورودی و قیمت‌های خروجی برای ۱۲ واحد تصمیم گیرنده

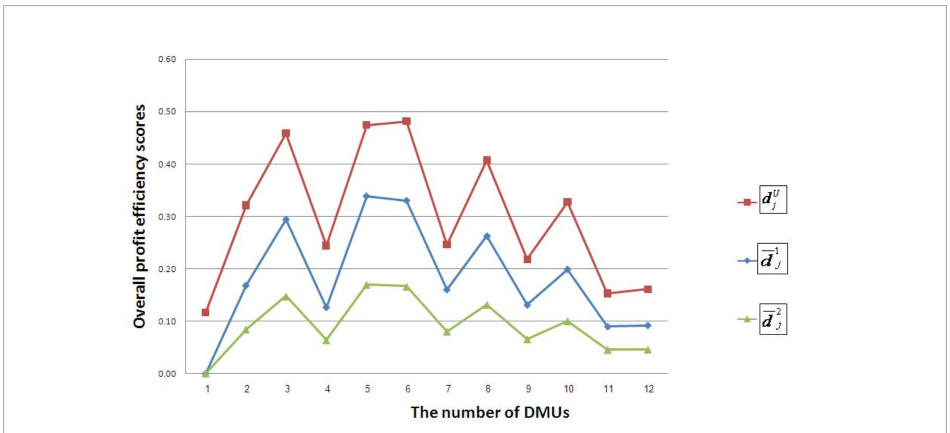
p_{2j}	p_{1j}	c_{2j}	c_{1j}	DMU
2010	550	100	500	1
1800	400	80	350	2
2200	480	90	450	3
3500	600	120	600	4
3050	400	70	300	5
3900	430	80	450	6
3300	540	100	500	7
3500	420	85	450	8
2900	350	76	380	9
2600	410	75	410	10
2450	540	80	440	11
3000	295	70	400	12

جدول ۲. نتایج بدست آمده از مدل برای ۱۲ واحد تصمیم گیرنده

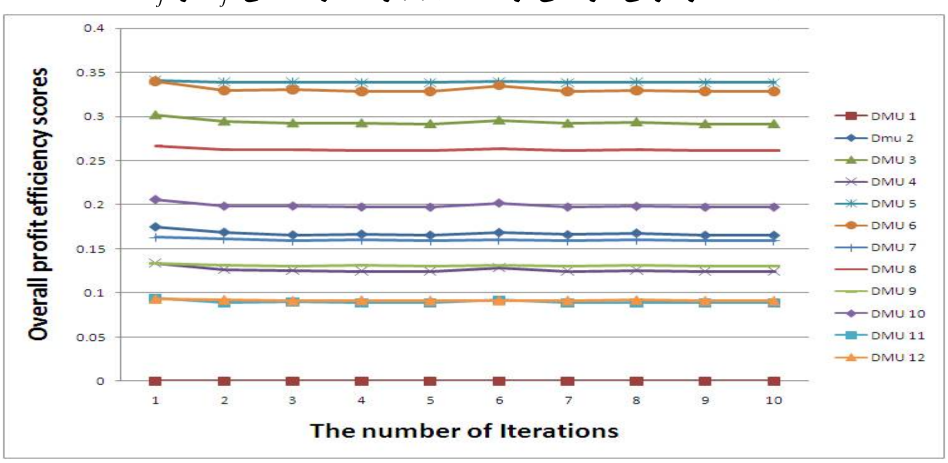
d_j^u	$\bar{d}_j^2$	$\bar{d}_j^1$	DMU
0.12	0	0	1
0.32	0.08	0.17	2
0.46	0.15	0.29	3
0.24	0.06	0.13	4
0.48	0.17	0.34	5
0.48	0.17	0.33	6
0.25	0.08	0.16	7
0.41	0.13	0.26	8
0.22	0.07	0.13	9
0.33	0.10	0.20	10
0.15	0.05	0.09	11
0.16	0.05	0.09	12

به طور متوسط همه DMUها دارای سود کلی بهتری توسط مدل (۸) در مقایسه با مدل (۹) هستند. در واقع این نتیجه نشان می‌دهد که حالت خوش‌بینانه مقدار کارایی حداکثر را نتیجه نمی‌دهد. در نتیجه، تصمیم گیرنده حداکثر مقدار کارایی سود کلی را می‌تواند در مقداری بین حالت خوش بینانه و بدبینانه به دست آورد.
مقایسه بین مدل پیشنهادی در حالت‌هایی که مقادیر Γ_j^p و Γ_j^c به طور تصادفی یا با طول گام ثابت تغییر می‌کند در شکل (۱) نشان داده شده است.
این شکل نشان می‌دهد که حداکثر مقدار کارایی سود کلی وقتی مقادیر Γ_j^p و Γ_j^c با طول گام ۰،۲ افزایش می‌یابد رخ می‌دهد. در شکل (۲)، نتایج مربوط به $\bar{d}_j^1$ در هر تکرار نشان داده شده است. می‌توان دید که مقدار کارایی سود کلی DMU از یک رفتار مشخصی به علت تصادفی بودن مقادیر Γ_j^p و Γ_j^c پیروی نمی‌کند. برای مثال، مقدار کارایی سود کلی از DMU_6 در تکرار ۶ بزرگتر از تکرار ۲ است. نتایجی از $\bar{d}_j^2$ در هر تکرار در شکل (۳) نمایش داده شده است. این نتایج نشان می‌دهد که مقدار کارایی سود کلی از هر DMU با افزایش مقدار Γ_j^p و Γ_j^c کاهش می‌یابد. بنابراین، یک DMU دارای مقدار کارایی سود کلی نزدیک به صفر است وقتی مقدار Γ_j^p و Γ_j^c به دو نزدیک می‌شود.

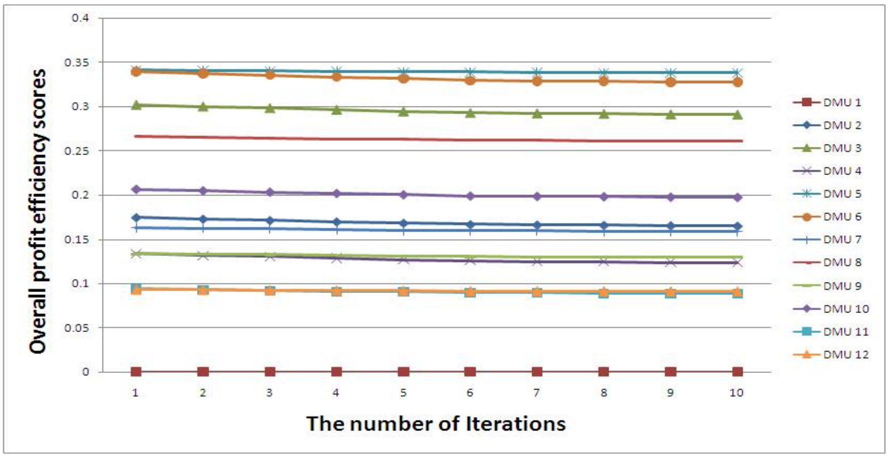
شکل ۱. مقایسه‌ای از مقدار کارایی سود کلی با بردار قیمت ورودی و خروجی بازه‌ای



شکل ۲ . مقدار کارایی سود کلی توسط مدل (۸) و مقادیر تصادفی Γ_j^p و Γ_j^c



شکل ۳. مقدار کارایی سود کلی توسط مدل (۸) و برای مقادیر افزایشی Γ_j^p و Γ_j^c



برای یک مقایسه بهتر بین حالت خوش‌بینانه و مدل پیشنهادی، شکل (۴) را در نظر بگیرید. این شکل مقدار کارایی سود کلی از DMU_1 در حالت خوش‌بینانه و مدل پیشنهادی را نشان می‌دهد. بدیهی است که DMU_1 در حالت خوش‌بینانه ناکارا است در حالیکه در روش پیشنهادی کارا می‌باشد. این نتایج نشان می‌دهد که DMUها در حالت خوش‌بینانه همیشه به مقدار حداکثر کارایی خود نمی‌رسند.

در نمونه دوم داده‌های، روش پیشنهادی بر روی داده‌های شعبات بانک ملی استان اردبیل در ایران اجرا گردیده است. داده‌های مربوط به بانک از مقاله آقایی و ملکی [24] گرفته شده است. این داده‌ها شامل ۲۷ واحد از شعبات بانک ملی بوده که شامل اطلاعات از سال 1390 تا سال 1393 می‌باشد. در اینجا سه شاخص برای خروجی ها در نظر گرفته شده که عبارتند از مانده تسهیلات ناخالص غیر دولتی، مانده کسورات غیر دولتی و میزان سود هر شعبه هستند. همچنین در این ارزیابی وام های معوقه هر بانک به صورت یک ورودی برای هر شعبه تعریف شده و ضرایب قیمت ورودی و خروجی به صورت بازه‌ای در نظر گرفته شده است. در اینجا نیز مدل (۸) برای ترکیب‌های مختلفی از Γ_j^p و Γ_j^c با استفاده از نرم‌افزار $GAMS$ مانند نمونه اول داده‌ها حل شده است. نتایج در جدول (۴) نشان داده شده که آخرین ستون از جدول (۴) مقدار کارایی سود کلی از DMUها را با بردار قیمت ورودی و خروجی بازه‌ای در حالت خوش بینانه نشان می‌دهد. با استفاده از جدول (۴) می‌توان مقایسه‌ای بین مدل پیشنهادی و حالت خوش‌بینانه انجام داد. به عنوان مثال از جدول می‌توان دید که DMU_4 در مدل پیشنهادی کارای سود کلی هست در حالیکه در حالت خوش‌بینانه ناکارا است. بطور کلی مقدار کارایی سود کلی از DMUها در مدل (۸) بزرگتر از مقادیر کارایی سود کلی در حالت خوش‌بینانه می‌باشد. که نتیجه بیان شده در قضیه ۲-۳ را تایید می‌کند. همچنین می‌توان ملاحظه کرد که مقدار کارایی سود کلی از هر DMU با افزایش Γ_j^p و Γ_j^c کاهش می‌یابد.

جدول ۳. نتایج بدست امده از مدل برای ۲۷ واحد از شعبات بانک ملی استان اردبیل در ایران

d_j^u	$\bar{d}_j^2$	$\bar{d}_j^1$	DMU
0.19	0.06	0.11	1
0.10	0.05	0.07	2
0.66	0.25	0.47	3
0.09	0	0	4
0.58	0.21	0.38	5
0.47	0.16	0.38	6
0.28	0.09	0.16	7
0.71	0.23	0.48	8
0.11	0.03	0.5	9
0.10	0.03	0.05	10
0.39	0.18	0.34	11
0.22	0.08	0.13	12
0.25	0.08	0.15	13
0.53	0.19	0.35	14
0.02	0	0	15
0.16	0.05	0.13	16
0.43	0.14	0.26	17
0.41	0.18	0.33	18
0.18	0.06	0.16	19
0.75	0.24	0.43	20
0.56	0.09	0.17	21
0.28	0.09	0.20	22
0.14	0.06	0.09	23
0.13	0.04	0.07	24
0.64	0.21	0.43	25
0.43	0.14	0.35	26
0.54	0.17	0.31	27

نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک مدل برنامه‌ریزی خطی با استفاده از مفهوم بهینه سازی استوار برای بررسی اندازه گیری سود کلی با بردارهای هزینه ورودی و سود خروجی نامعین پیشنهاد شده است. یکی از جذاب ترین ویژگی های این مدل این است که با استفاده از اطلاعات بسیار کمی در مورد داده‌های نامعین قابل اجرا است. در واقع با علم بر میانگین و واریانس داده‌های نامعین می‌توان جواب‌های استوار را تولید کرد. مقدار کارایی سود کلی DMUها توسط مدل پیشنهادی در مقایسه با حالت خوش‌بینانه بیشتر است. بنابراین یک DMU می‌تواند در مدل استوار کارا باشد در حالیکه در مدل حالت خوش‌بینانه ناکارا است. در نتیجه، D DMU M می‌تواند حداکثر سازگاری بین موارد خوش بینانه و بدبینانه را پیدا کند.

فهرست منابع

[1] M. J. Farrell. The measurement of productive efficiency, Journal of the Royal Statistical Society, Series A, General 120 (3), 253–281, (1957).

[2] A. Charnes, W.W. Cooper, and E. Rodes. Measuring the efficiency of decision making units, European Journal of Operational Research, 2 (6), 429–444, (1978).

[3] R.D. Banker, A. Charens, and W.W. Cooper. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis, Management Science, 30, 1078–1092, (1984).

[4] A. Charnes, W.W. Cooper, B. Golany, L.M. Seiford, and J. Stutz. Foundations of data envelopment analysis and Pareto–Koopmans empirical production functions, Journal of Econometrics, 30, 91–107, (1985).

[5] K. Tone. A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis, European Journal of Operational Research, 130, 498–509, (2001).

[6] H. Varian. The nonparametric approach to production analysis, Econometrical 54, 579-597.

[7] M. Toloo, N. Aghayi, and M. Rostamy-malkhalifeh, (2008). Measuring overall profit efficiency with interval data, Applied Mathematics and Computation, 201(1):640–649, (1988).

[8] Y-S. Wang, B. Xie, L. F. Shang, and W. H. Li. Measures to improve the performance of China's thermal power industry in view of cost efficiency, Applied energy, 112, 1078-1086, (2013).

[9] H. Sakai and Y. Takahashi. Ten years after bus deregulation in Japan: An analysis of institutional changes and cost efficiency. Research in Transportation Economics, 39 (1), 215-225, (2013).

[10] N. Aghayi. Cost efficiency measurement with fuzzy data in DEA. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 32, 409–420, (2017).

[11] A. Emrouznejad, M. Rostamy-Malkhalifeh, A. Hatami-Marbini, M. Tavana, and N. Aghayi. An overall profit Malmquist productivity index with fuzzy and interval data. Mathematical and Computer Modelling, 54 (11-12), 2827-2838, (2011).

[12] M. Rostamy-Malkhalifeh and N. Aghayi. Measuring overall profit efficiency with fuzzy data. Journal of Mathematical Extension, 5 (2), 73-90, (2011).

[13] M. Rostamy-Malkhalifeh and N. Aghayi. Two Ranking of Units on the Overall Profit Efficiency with Interval Data. Mathematics Scientific Journal, 8(2), 73–93, (2011).

[14] G. Cesaroni. Industry cost efficiency in data envelopment analysis. Socio-Economic Planning Sciences, 61, 37-43, (2018).

[15] S. Salehpour and N. Aghayi. The Most Revenue Efficiency with Price Uncertainty. International Journal of Data Envelopment Analysis, 3, 575-592, (2015).

[16] A.L. Soyster. Technical noteconvex programming with set-inclusive constraints and applications

function: Application on Bank Industry. Energy, 112, 376-387, (2016).

[25] M. Asmild, J.C. Paradi, D.N. Reese, and F. Tam. Measuring overall efficiency and effectiveness using DEA, European Journal of Operational Research, 178, 305–321, (2007).

[26] W.W. Cooper, L.M. Seiford, and K. Tone. Data envelopment analysis: a comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software. Springer, (2006).

to inexact linear programming. Operations research, 21(5):1154–1157, (1973).

[17] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. Robust convex optimization. Mathematics of Operations Research, 23, 769-805, (1998).

[18] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. Robust solutions to uncertain programs. Operations Research Letters; 25; 1-13, (1999).

[19] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. Mathematical Programming, 88, 411-424, (2000).

[20] D. Bertsimas and M. Sim. The price of robustness. Operations research, 52(1),35–53, (2004).

[21] L. El-Ghaoui and H. Lebret. Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications, 18 (4), 1035-1064, (1997).

[22] L. El-Ghaoui, F. Oustry, and H. Lebret. Robust solutions to uncertain semidefinite programs. SIAM Journal on Optimization, 9, 33-52, (1998).

[23] N. Aghayi, M. Tavana, and M.A. Raayatpanah. Robust efficiency measurement with common set of weights under varying degrees of conservatism and data uncertainty, European Journal Industrial Engineering, 10, 385-405, (2016).

[24] N. Aghayi and B. Maleki. Efficiency Measurement of DMUs with Undesirable outputs under uncertainty based on the directional distance