

طیف و طیف اساسی ترکیبات خطی عملگرهای ترکیبی روی فضای هاردی H^2

محمود حاجی شعبانی^{۱*}، مهسا فاتحی^۲، ملیحه فرضی^۳

^(۱) استاد، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

^(۲) استاد، گروه ریاضی، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران

^(۳) دانشجوی دکتری، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۱۲/۰۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۱/۰۷

چکیده

فرض کنید $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. اگر φ یک خودنگاشت تحلیلی از \mathbb{D} باشد، برای هر f تحلیلی روی \mathbb{D} ، عملگر ترکیبی C_φ را به صورت $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$ تعریف کرده و φ را تابع ترکیب می‌نامیم. اگر ψ یک تابع تحلیلی کراندار روی \mathbb{D} باشد، عملگر ترکیبی وزن‌دار $C_{\psi, \varphi}$ به صورت $C_{\psi, \varphi}(f)(z) = \psi(z)f(\varphi(z))$ تعریف می‌شود. مجموعه تمام توابع تحلیلی f روی \mathbb{D} را که قدر مطلق مربع ضرایب سری مکلورن آن‌ها جمع‌پذیر است را فضای هاردی H^2 می‌نامیم. منظور از H^∞ ، فضای تمام توابع تحلیلی کراندار روی \mathbb{D} می‌باشد. اگر $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ توابعی خطی کسری و غیرخودریختی باشند، با قرار دادن شرایطی روی آن‌ها طیف و طیف اساسی مجموع آن‌ها و همچنین هر ترکیب خطی از آن‌ها را بدست می‌آوریم. همچنین در حالتی که $\varphi_{t_1}, \dots, \varphi_{t_n}$ سهموی‌های غیرخودریخت با تنها یک نقطه ثابت t_1, \dots, t_n و t_n اعداد انتقال آن‌ها باشند، طیف هر ترکیب خطی عملگرهای ترکیبی القائی توسط آن‌ها را بدست می‌آوریم. در ادامه با معرفی مفهوم زنجیر ماکزیمال، نشان می‌دهیم که اگر $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ یک زنجیر ماکزیمال به طول n و $m > n$ باشد، آن‌گاه هر ترکیب خطی از عملگرهای ترکیبی القاء شده توسط آن‌ها با توان m فشرده می‌باشد. در پایان در حالت خاص دیگری نیز طیف و طیف اساسی ترکیبات خطی بعضی از عملگرهای ترکیبی وزن‌دار را بدست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: فضای هاردی، عملگر ترکیبی، طیف، طیف اساسی.

۱- مقدمه

اگر S زیر مجموعه‌ای از صفحه مختلط \mathbb{C} باشد، نقاط مرزی S را با ∂S نشان داده و برای هر عدد مختلط a ، aS را به صورت $\{as : s \in S\}$ تعریف می‌کنیم. برای تابع تحلیلی f روی \mathbb{D} و $0 \leq r \leq 1$ تابع f_r را بصورت $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$ تعریف می‌کنیم. بوضوح برای هر $f_r, 0 \leq r \leq 1$ ها توابعی پیوسته می‌باشند. فضای تمام توابع تحلیلی f روی \mathbb{D} که $\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} |f_r(e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} < \infty$ را فضای هاردی H^2 نامیده و ریشه دوم این مقدار سوپریمم را به وسیله $\|f\|$ نمایش می‌دهیم. منظور از H^∞ ، فضای تمام توابع تحلیلی کراندار روی \mathbb{D} با نرم سوپریمم $\|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|$ می‌باشد. همانطور که می‌دانیم برای هر $f \in H^2$ ، تقریباً همه جا به ازای هر $\theta \in [0, 2\pi]$ $\liminf_{r \rightarrow 1} (re^{i\theta})$ موجود بوده، بنابراین $f(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ تعریف می‌کنیم.

یک تبدیل خطی کسری از \mathbb{D} به \mathbb{D} بفرم $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ تعریف می‌شود، جایی که $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ و $ad - bc \neq 0$. مجموعه توابع بفرم فوق را با $LFT(\mathbb{D})$ نمایش می‌دهیم. خود ریختی‌ها از \mathbb{D} به \mathbb{D} را توابع تحلیلی، یک به یک و پوشا روی \mathbb{D} در نظر می‌گیریم. ثابت می‌شود که این توابع بفرم $\varphi(z) = \lambda \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ می‌باشند بطوریکه $|\lambda|=1$ و a درون دایره یکه قرار دارد. مجموعه همه خودریختی‌ها روی \mathbb{D} را با $Aut(\mathbb{D})$ نشان می‌دهیم [۵].

گوییم φ دارای مشتق زاویه‌ای متناهی در \mathbb{D} $\zeta \in \partial \mathbb{D}$ است اگر $\eta \in \partial \mathbb{D}$ موجود باشد بطوریکه حد $(\varphi(z) - \eta)/(z - \zeta)$ وقتی که z به طور غیر مماسی در \mathbb{D} به ζ میل کند، متناهی باشد. این حد را با $\varphi'(\zeta)$ نمایش می‌دهند. اگر $\varphi \in LFT(\mathbb{D})$ دارای نقطه ثابت منحصر بفرد $\zeta \in \partial \mathbb{D}$ باشد، φ را یک سهموی گوییم. فرض کنید $T(z) = \frac{\zeta+z}{\zeta-z}$ ، قرار دهید $T^{-1} \circ \varphi \circ T = \psi$. در این

صورت ψ یک تبدیل خطی کسری از نیم صفحه سمت راست به خودش می‌باشد که ∞ را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین عدد t که $\text{Re } t \geq 0$ وجود دارد بطوریکه $\psi(z) = z + t$. عدد ثابت t را عدد انتقال φ می‌نامند. اگر قسمت حقیقی t برابر صفر باشد، φ یک سهموی خودریختی و در غیر این صورت φ خودریختی نیست. همچنین در [۲۶] نشان داده شده است که اگر $\zeta \in \partial \mathbb{D}$ نقطه ثابت برای سهموی φ باشد، آن‌گاه $\varphi'(\zeta) = 1$. با محاسبه به راحتی می‌توان دید که اگر φ یک نگاشت سهموی با نقطه ثابت ζ و عدد انتقال t باشد آن‌گاه $\varphi(z) = \frac{(2-t)z + t\zeta}{2+t-t\zeta z}$ در [۱۰] نشان داده شده است که اگر φ یک تبدیل خطی کسری از \mathbb{D} به \mathbb{D} باشد، آن‌گاه $C_\varphi^* = T_g C_\sigma T_h^*$ ، که $\sigma(z) := \frac{\bar{a}z - \bar{c}}{-\bar{b}z + \bar{d}}$ یک خود نگاشت از \mathbb{D} ، $g, h \in H^\infty$ و $g(z) := (-\bar{b}z + \bar{d})^{-1} h(z) := cz + d$. اگر $\zeta, \eta \in \partial \mathbb{D}$ ، $\varphi(\zeta) = \eta$ ، آن‌گاه $\sigma(\eta) = \zeta$. نگاشت‌های σ, g و h را تابع‌های کمکی کاون می‌نامند. مجموعه همه عملگرهای کراندار و عملگرهای فشرده از H^2 به H^2 را به ترتیب با $B(H^2)$ و $B_0(H^2)$ نشان می‌دهیم. در این مقاله برای هر $T \in B(H^2)$ ، طیف T و طیف اساسی T را به ترتیب با $\sigma(T)$ و $\sigma_e(T)$ نشان می‌دهیم. در [۴]، [۷]، [۱۱]، [۲۱] و [۲۵] طیف عملگرهای ترکیبی C_φ روی H^2 ، که φ خود نگاشت خطی کسری از \mathbb{D} می‌باشد کاملاً مشخص شده است. اخیراً نتایج جالبی در مورد طیف عملگرهای ترکیبی وزن دار روی H^2 بدست آمده است. به عنوان مثال در [۱۸] طیف عملگرهای ترکیبی وزن دار در حالتی که φ دارای یک نقطه ثابت در \mathbb{D} و $C_{\psi, \varphi}$ فشرده می‌باشد، مورد بررسی قرار گرفته است. در [۸] طیف عملگرهای ترکیبی خودالحاق $C_{\psi, \varphi}$ و در [۳] طیف، در حالتی که $C_{\psi, \varphi}$ یکانی و یا نرمال با نقطه ثابت در \mathbb{D} باشد مورد مطالعه قرار گرفته است. در [۱۹] عملگرهای ترکیبی وزن دار معکوس پذیر روی H^2 تعریف و طیف آن‌ها بدست آورده شده است. در [۲۰] این نتایج، به $C_{\psi, \varphi}$ هایی که لزوماً معکوس پذیر نیستند و φ در آن‌ها خودریختی

خاص می‌پردازیم.

لم ۱.۲. اگر a_1 و a_2 دو عضو از جبر یکدار \mathcal{A} روی میدان \mathbb{F} باشند بطوریکه $a_1 a_2 = 0$ و $a_2 a_1 = 0$ ، آن‌گاه $(\sigma(a_1) \cup \sigma(a_2)) \setminus \{0\} \subseteq \sigma(a_1 + a_2) \setminus \{0\}$.

اثبات. فرض کنید $\lambda \neq 0$ از آنجا که $a_1 a_2 = a_2 a_1 = 0$ بنابراین

$$(a_2 - \lambda I)(a_1 - \lambda I) = (a_1 - \lambda I)(a_2 - \lambda I)$$

$$= -\lambda(a_1 + a_2 - \lambda I).$$

حال فرض کنید $\lambda \notin \sigma(a_1 + a_2)$ بنابراین $a_1 - \lambda I$ و $a_2 - \lambda I$ معکوس‌پذیرند. لذا $\lambda \notin \sigma(a_1)$ و $\lambda \notin \sigma(a_2)$. \square

لم ۲.۲. فرض کنید برای $n \geq 2$ ، a_2, a_1, \dots, a_n عضوهایی از جبر یکدار \mathcal{A} روی میدان \mathbb{F} و برای $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ که $i \neq j$ ، $a_i a_j = a_j a_i = 0$ در

$$\cdot \left(\bigcup_{k=1}^n \sigma(a_k) \right) \setminus \{0\} \subseteq \sigma \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \setminus \{0\}$$

اثبات. فرض کنید $\alpha_1 = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ و $\alpha_2 = a_n$. مشاهده می‌شود که α_1 و α_2 شرایط لم قبل را دارا می‌باشند. بنابراین نتیجه با استفاده از استقراء حاصل می‌شود. \square

لم ۳.۲. اگر a_1 و a_2 دو عضو از جبر یکدار \mathcal{A} روی میدان \mathbb{F} باشند، بطوریکه $a_1 a_2 = 0$ ، آن‌گاه

$$\sigma(a_1 + a_2) \subseteq \sigma(a_1) \cup \sigma(a_2)$$

اثبات. فرض کنید $\lambda \notin \sigma(a_1) \cup \sigma(a_2)$. پس $a_1 - \lambda I$ و $a_2 - \lambda I$ معکوس‌پذیرند. از آنجا که $a_1 a_2 = 0$ ، به راحتی می‌توان دید که $0 \in \sigma(a_1) \cup \sigma(a_2)$. لذا λ غیر صفر است. چون $a_1 a_2 = 0$ داریم

$$(a_1 - \lambda I)(a_2 - \lambda I) = -\lambda(a_1 + a_2 - \lambda I).$$

بنابراین با توجه به اینکه حاصل ضرب دو عضو معکوس‌پذیر، معکوس‌پذیر می‌باشد، $a_1 + a_2 - \lambda I$ معکوس‌پذیر خواهد بود. لذا اگر $\lambda \in \sigma(a_1 + a_2)$ ،

است، توسیع داده شده است. اگر φ یک تابع تحلیلی از \mathbb{D} به \mathbb{D} باشد، φ_0 را تابع همانی و φ_n را ترکیب n بار از φ با خودش در نظر می‌گیریم. در [۹] طیف عملگرهای ترکیبی وزن‌دار $C_{\psi, \varphi}$ روی H^2 در حالتی که φ دارای نقطه دنجوی-ولف a ، با خاصیت $0 < |\varphi'(a)| < 1$ می‌باشد و همچنین دنباله φ_n بطور یکنواخت به a همگرا و $\psi \in H^\infty$ در a پیوسته باشد، بطور کامل بررسی شده است. همچنین در [۱] و [۲] نیز طیف و طیف اساسی عملگرهای ترکیبی وزن‌دار مورد بررسی قرار گرفته است. اخیراً مقالات دیگری در مورد عملگرهای ترکیبی و عملگرهای ترکیبی وزن‌دار به چاپ رسیده است، که از جمله می‌توان به مراجع [۱۷-۱۲]، [۲۳]، [۲۴] و [۲۷] اشاره کرد. در این مقاله ابتدا چند لم برای بررسی طیف مجموع متناهی از عضوهای یک جبر یکدار بیان می‌کنیم. سپس برای $1 \leq i \leq n$ ، اگر $\varphi_i \in LFT(\mathbb{D})$ و $\psi_i \in H^\infty$ ، با قرار دادن شرایطی روی φ_i ها و ψ_i ها، نشان می‌دهیم که مجموعه عضوهای غیر صفر طیف اساسی مجموع C_{ψ_i, φ_i} ها به صورت اجتماعی از طیف اساسی هر کدام از آن‌ها به غیر از صفر می‌باشد. در ادامه طیف ترکیبات خطی $C_{\varphi_1}, \dots, C_{\varphi_n}$ که تابع‌های ترکیب آن‌ها سهموی‌های غیرخودریخت و همگی دارای یک نقطه ثابت یکسان می‌باشد را بدست می‌آوریم. در آخر طیف اساسی ترکیباتی خطی از عملگرهای ترکیبی C_φ که φ دارای نقطه ثابت در $\partial\mathbb{D}$ یا φ دارای شرایطی خاص می‌باشد را بررسی می‌کنیم. همانطور که قبلاً بیان شد، چون طیف و طیف اساسی عملگرهای ترکیبی در مراجع [۴]، [۷]، [۱۱]، [۲۱] و [۲۵] پیدا شده‌اند لذا با استفاده از نتایج بدست آمده در این مقاله می‌توان طیف و طیف اساسی هر ترکیب خطی عملگرهای بررسی شده در این مقالات را پیدا کرد.

۲- دست آوردهای پژوهش

در ابتدا چند لم برای پیدا کردن طیف مجموعی متناهی از اعضای یک جبر یکدار را بیان می‌کنیم. سپس به بررسی طیف و طیف اساسی مجموعی متناهی از عملگرهای ترکیبی و عملگرهای ترکیبی وزن‌دار تحت شرایطی

آن‌گاه $\lambda \in \sigma(a_1) \cup \sigma(a_2)$ و نتیجه حاصل می‌شود.

همچنین با توجه به لم ۴.۲،

$$\sigma_e \left(\sum_{i=1}^n \psi_i(\zeta_i) C_{\varphi_i} \right) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \sigma_e(\psi_i(\zeta_i) C_{\varphi_i}).$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \sigma_e \left(\sum_{i=1}^n \psi_i(\zeta_i) C_{\varphi_i} \right) \setminus \{0\} \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^n \sigma_e(\psi_i(\zeta_i) C_{\varphi_i}) \right) \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

لذا نتیجه حاصل می‌شود. \square

در قضیه بعد طیف ترکیبات خطی عملگرهای ترکیبی را در حالتی که تابع ترکیب آن‌ها سهموی‌های غیرخودریخت و همگی دارای نقطه ثابت یکسان می‌باشند مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۶.۲. فرض کنید $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ و $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ سهموی‌های غیرخودریخت از \mathbb{D} به \mathbb{D} با نقطه ثابت $\zeta \in \partial \mathbb{D}$ و $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ اعداد مختلط دلخواه باشند. اگر ثابت‌های t_1, t_2, \dots, t_n به ترتیب اعداد انتقال $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ و باشند، آن‌گاه

$$\begin{aligned} & \sigma(\alpha_1 C_{\varphi_1} + \dots + \alpha_n C_{\varphi_n}) = \\ & \{ \alpha_1 e^{-\beta t_1} + \dots + \alpha_n e^{-\beta t_n} : \beta \geq 0 \} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

اثبات. از آنجا که برای هر $1 \leq i \leq n$ ، ζ نقطه ثابت

φ_i می‌باشد، $\bar{\zeta}(\varphi_i(\zeta z)) = \zeta$ یک تابع سهموی با نقطه ثابت 1 است. زیرا

$$\bar{\varphi}_i(1) = \bar{\zeta}(\varphi_i(\zeta)) = \bar{\zeta}\zeta = |\zeta|^2 = 1$$

بنابراین برای هر $1 \leq i \leq n$ عملگر ترکیبی C_{φ_i} به طور یکانی هم ارز با $C_{\bar{\varphi}_i}$ می‌باشد که $C_{\bar{\varphi}_i} = C_{\zeta z} C_{\varphi_i} C_{\zeta z}^*$ جایی که $C_{\zeta z}$ یک عملگر یکانی است. حال بدون کاسته شدن از کلیت مسأله می‌توان فرض کرد φ_i ها سهموی‌های غیرخودریخت با نقطه ثابت 1 باشند. فرض کنید $\tau(G) = \{t : |\arg t| < \frac{\pi}{2}\}$ و قرار دهید $\varphi_i(z) = \sigma^{-1}(\sigma(z) + t)$ جایی که

لم ۴.۲. فرض کنید $n \geq 2$ یک عدد طبیعی و a_1, a_2, \dots, a_n عضوهایی از جبر یکدار \mathcal{A} روی میدان \mathbb{F} باشند، بطوریکه برای هر i و j که $1 \leq i < j \leq n$ ، $a_i a_j = 0$ در این صورت $\sigma(\sum_{k=1}^n a_k) \subseteq \bigcup_{k=1}^n \sigma(a_k)$

اثبات. با استفاده از استقراء و لم ۳.۲ نتیجه حاصل می‌شود. \square

در صفحه ۱۲۹ از مرجع [۱۰] بیان شده است که اگر $\varphi \in LFT(\mathbb{D})$ و $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ ، آن‌گاه C_φ روی H^2 فشرده است. در نتایج بعدی از این مطلب استفاده خواهد شد.

گزاره ۵.۲. فرض کنید $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ تبدیلات خطی کسری غیرخودریخت از \mathbb{D} به \mathbb{D} و برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $\zeta_i, \eta_i \in \partial \mathbb{D}$ موجود باشند بطوریکه $\varphi_i(\zeta_i) = \eta_i$ همچنین فرض کنید برای $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ که $i \neq j$ داشته باشیم $\zeta_i \neq \zeta_j$ ، $\eta_i \neq \eta_j$ اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $\zeta_i \neq \eta_i$ و $\zeta_i \neq \eta_j$ ، آن‌گاه

$$\begin{aligned} & \sigma_e(C_{\psi_1, \varphi_1} + C_{\psi_2, \varphi_2} + \dots + C_{\psi_n, \varphi_n}) \setminus \{0\} \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^n \psi_i(\zeta_i) \sigma_e(C_{\varphi_i}) \right) \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

اثبات. با استفاده از نتیجه ۲.۲ از [۲۲] داریم:

$$\begin{aligned} & \sigma_e(C_{\psi_1, \varphi_1} + \dots + C_{\psi_n, \varphi_n}) = \\ & \sigma_e(\psi_1(\zeta_1) C_{\varphi_1} + \dots + \psi_n(\zeta_n) C_{\varphi_n}). \end{aligned}$$

از طرفی برای هر i و j که $i \neq j$ ، به راحتی می‌توان دید که $\varphi_i(\varphi_j(\mathbb{D})) \subseteq \mathbb{D}$ بنابراین با توجه به صفحه ۱۲۹ از مرجع [۱۰]، یک عملگر فشرده است. لذا با توجه به لم ۲.۲،

$$\begin{aligned} & \left(\bigcup_{i=1}^n \sigma_e(\psi_i(\zeta_i) C_{\varphi_i}) \right) \setminus \{0\} \\ & \subseteq \sigma_e \left(\sum_{i=1}^n \psi_i(\zeta_i) C_{\varphi_i} \right) \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

بطوریکه $\varphi(\zeta) = \eta$ که در این حالت $\|\varphi\|_\infty = 1$ خواهد بود.

(ج) نقطه منحصر بفرد $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ موجود باشد بطوریکه $\varphi(\zeta) = \zeta$ که در این حالت $\|\varphi\|_\infty = 1$.

در تعریف ۷.۲ قصد داریم برای مجموعه‌ای از توابع خطی کسری که شرایط حالت (ب) را دارا باشند، مفهوم جدیدی ارائه دهیم.

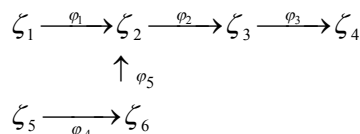
تعریف ۷.۲.

فرض کنید $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ تبدیلات خطی کسری غیرخودریخت از \mathbb{D} به \mathbb{D} و برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $\|\varphi_i\|_\infty = 1$. همچنین فرض کنید برای هر $1 \leq m \leq n$ ، زیر مجموعه‌ای از $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ باشند، بطوریکه برای هر $1 \leq j \leq m$ ، $\varphi_{i_j}(\zeta_j) = \zeta_{j+1}$ و φ_{i_j} ها دو بدو متمایز و $\{\zeta_1, \dots, \zeta_m, \zeta_{m+1}\} \subseteq \partial\mathbb{D}$ گوییم m تایی مرتب $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ یک زنجیر ماکزیمال به طول m می‌باشد اگر $\|\varphi_i \circ \varphi_{i_{m-1}} \circ \dots \circ \varphi_1\|_\infty = 1$ و برای هر t که $t \notin \{i_1, \dots, i_m\}$ ، $\|\varphi_t \circ \varphi_{i_m} \circ \varphi_{i_{m-1}} \circ \dots \circ \varphi_1\|_\infty < 1$ و نیز برای $1 \leq j \leq m+1$ ، ζ_j ها دو بدو متمایز باشند.

دقت شود از آن‌جا که ζ_j ها در تعریف ۷.۲ با هم متمایز هستند، اگر $\varphi \in LFT(\mathbb{D})$ دارای یک نقطه ثابت در مرز \mathbb{D} باشد، آن‌گاه φ در هیچ زنجیر ماکزیمالی قرار نمی‌گیرد.

مثال ۸.۲.

فرض کنید $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ تبدیلات خطی کسری غیرخودریخت از \mathbb{D} به \mathbb{D} با نرم سوپریمم 1 و برای هر $1 \leq i \leq 6$ ، $\zeta_i \in \partial\mathbb{D}$ متمایز باشند. همچنین فرض کنید $\varphi_1(\zeta_1) = \zeta_2$ ، $\varphi_2(\zeta_2) = \zeta_3$ ، $\varphi_3(\zeta_3) = \zeta_4$ ، $\varphi_4(\zeta_4) = \zeta_5$ و $\varphi_5(\zeta_5) = \zeta_6$ ، $\varphi_5(\zeta_6) = \zeta_2$ برای درک بهتر آن نمودار زیر را ارائه می‌دهیم.



$\sigma(z) = \frac{1+z}{1-z}$ و $t \in \tau(G)$. طبق آنچه در قسمت

پیش گفتار بیان کردیم φ_t ها توابع سهموی غیرخودریخت می‌باشند. حال فرض کنید U یک جبر بسته نرم‌دار تولید شده توسط مجموعه $\{C_{\varphi_t} : t \in \tau(G)\} \cup \{I\}$ را مجموع تمام تابع‌های خطی ضربی ناصفر روی U تعریف کنیم، در این صورت با توجه به اثبات قضیه ۱.۶، از مرجع [۷]، برای هر $t \in \tau(G)$ و $\Lambda \in \sum$ ، $\Lambda(C_{\varphi_t}) = 0$ یا $\Lambda(C_{\varphi_t}) = e^{-\beta t}$ ، جایی که $\beta \geq 0$. لذا با توجه به قضیه ۶.۸ صفحه ۲۱۹ از [۶]، داریم

$$\begin{aligned} & \sigma(\alpha_1 C_{\varphi_1} + \dots + \alpha_n C_{\varphi_n}) \\ & \subseteq \{ \Lambda(\alpha_1 C_{\varphi_1} + \dots + \alpha_n C_{\varphi_n}) : \Lambda \in \sum \} \\ & = \{ \alpha_1 \Lambda(C_{\varphi_1}) + \dots + \alpha_n \Lambda(C_{\varphi_n}) : \Lambda \in \sum \} \\ & = \{ \alpha_1 e^{-\beta t_1} + \dots + \alpha_n e^{-\beta t_n} \} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

همچنین با توجه به نتیجه ۲.۶ از [۷]، $f(z) = \exp(-\beta \sigma(z))$ یک بردار ویژه با مقدار ویژه $e^{-\beta t}$ برای هر C_{φ_t} می‌باشد. لذا

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 C_{\varphi_1} + \dots + \alpha_n C_{\varphi_n})(f) = \\ & (\alpha_1 e^{-\beta t_1} + \dots + \alpha_n e^{-\beta t_n})(f) \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} & \alpha_1 e^{-\beta t_1} + \alpha_2 e^{-\beta t_2} + \dots + \alpha_n e^{-\beta t_n} \\ & \in \sigma(\alpha_1 C_{\varphi_1} + \dots + \alpha_n C_{\varphi_n}). \end{aligned}$$

از آنجا که برای هر $1 \leq i \leq n$ ، φ_{t_i} ها سهموی‌های غیرخودریخت می‌باشند، بنابراین $\text{Re } t_i > 0$. به راحتی می‌توان دید که 0 یک نقطه حدی برای $\alpha_1 e^{-\beta t_1} + \alpha_2 e^{-\beta t_2} + \dots + \alpha_n e^{-\beta t_n}$ و از آنجا که طیف فشرده است نتیجه حاصل می‌شود. \square

همانطور که می‌دانیم برای هر $\varphi \in LFT(\mathbb{D})$ خودریختی نباشد تنها یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد.

(الف) $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ به این معنی که $\|\varphi\|_\infty < 1$ یا به عبارتی دیگر φ هیچ نقطه‌ای از $\partial\mathbb{D}$ را به نقطه‌ای از $\partial\mathbb{D}$ نمی‌برد.

(ب) تنها دو نقطه $\zeta, \eta \in \partial\mathbb{D}$ که $\zeta \neq \eta$ موجود باشند

از میان n بار ترکیب φ_i ها فقط $\varphi_n \circ \varphi_{n-1} \circ \dots \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ نقطه ζ_1 از مرز قرص واحد را به مرز قرص واحد می‌برد و بقیه n بار ترکیب φ_i ها تمام مرز \mathbb{D} را به داخل \mathbb{D} می‌برند. حال چون $m > n$ می‌باشد، طبق تعریف ۷.۲ و صفحه ۱۲۹ از [۱۰]، برای هر $1 \leq j \leq n$ ، همه ترکیبات بفرم $C_{\varphi_j \circ \varphi_{n-1} \circ \dots \circ \varphi_2 \circ \varphi_1}$ و $C_{\varphi_n \circ \varphi_{n-1} \circ \dots \circ \varphi_1 \circ \varphi_j}$ فشرده‌اند. بنابراین با توجه به قضیه

۱۰.۴ صفحه ۲۰۴ از [۶] داریم

$$\begin{aligned} & (\sigma_e(\alpha_1 C_{\varphi_1} + \alpha_2 C_{\varphi_2} + \dots + \alpha_n C_{\varphi_n}))^m \\ &= \sigma_e((\alpha_1 C_{\varphi_1} + \alpha_2 C_{\varphi_2} + \dots + \alpha_n C_{\varphi_n})^m) \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

پس $\sigma_e(\alpha_1 C_{\varphi_1} + \alpha_2 C_{\varphi_2} + \dots + \alpha_n C_{\varphi_n}) = \{0\}$ غیر $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in LFT(\mathbb{D})$ فرض کنید خودریختی و برای هر $1 \leq t \leq n$ ، $\|\varphi_t\|_\infty = 1$ و اگر $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ و $1 \leq i, j \leq n$ وجود داشته باشند بطوریکه $\partial\mathbb{D}$ $\varphi_i(\zeta), \varphi_j(\zeta) \in \partial\mathbb{D}$ ، آن‌گاه $\varphi_i = \varphi_j$. همچنین φ_i ها در یکی از شرایط زیر صدق کنند.

الف) تابع φ_i دارای یک نقطه ثابت در $\partial\mathbb{D}$ باشد و اگر ζ نقطه ثابت برای φ_i باشد، آن‌گاه برای هر $1 \leq j \leq n$ که $j \neq i$ ، اگر $\zeta_j, \eta_j \in \partial\mathbb{D}$ و $\varphi_j(\zeta_j) = \eta_j$ ، آن‌گاه $\zeta \neq \zeta_j$ و $\zeta \neq \eta_j$.

ب) تابع φ_i در یک زنجیر ماکزیمال قرار داشته باشد (دقت کنید که با توجه به تعریف ۷.۲، φ_i دارای نقطه ثابت در $\partial\mathbb{D}$ نمی‌باشد). توجه شود که تحت شرایط بالا اگر $2 \leq m \leq n$ و $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\} \subseteq \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ و $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ موجود باشد بطوریکه $\zeta = (\varphi_i \circ \varphi_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{i_m})(\zeta)$ ، آن‌گاه طبق تعریف ۷.۲، $\varphi_{i_1} = \varphi_{i_2} = \dots = \varphi_{i_m}$ و ζ نقطه ثابت آن‌ها می‌باشد.

در قضیه بعد فرض می‌کنیم φ_i ها شرایط فوق را دارا باشند و طیف اساسی را برای ترکیبات خطی از این قبیل C_{φ_i} ها پیدا می‌کنیم.

با توجه به تعریف ۷.۲، ملاحظه می‌شود که $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ و $(\varphi_4, \varphi_5, \varphi_2, \varphi_3)$ ، به ترتیب زنجیرهایی ماکزیمال به طول سه و چهار می‌باشند. حال اگر برای $\alpha_1, \dots, \alpha_5 \in \mathbb{C}$ $\alpha_1 C_{\varphi_1} + \alpha_2 C_{\varphi_2} + \dots + \alpha_5 C_{\varphi_5}$ را پنج مرتبه با خودش ترکیب کنیم، ترکیبی خطی از عملگرهایی بفرم $C_{\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{i_5}}$ حاصل می‌شود که برای $1 \leq j \leq 5$ ، $\varphi_{i_j} \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_5\}$ به بیان دیگر

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 C_{\varphi_1} + \alpha_2 C_{\varphi_2} + \dots + \alpha_n C_{\varphi_n})^5 \\ &= \sum_{\substack{i_j \in \{1, \dots, 5\} \\ 1 \leq j \leq 5}} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_5} C_{\varphi_{i_1}} C_{\varphi_{i_2}} \dots C_{\varphi_{i_5}}. \end{aligned}$$

با توجه به تعریف ۷.۲، داریم $\|\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{i_5}\|_\infty < 1$ لذا با توجه به صفحه ۱۲۹ از [۱۰]، فشرده است. از طرفی با استفاده از قضیه ۱۰.۴ صفحه ۲۰۴ از [۶]

$$\begin{aligned} & (\sigma_e(\alpha_1 C_{\varphi_1} + \alpha_2 C_{\varphi_2} + \dots + \alpha_5 C_{\varphi_5}))^5 \\ &= \sigma_e((\alpha_1 C_{\varphi_1} + \alpha_2 C_{\varphi_2} + \dots + \alpha_5 C_{\varphi_5})^5) \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

و بنابراین $\sigma_e(\alpha_1 C_{\varphi_1} + \alpha_2 C_{\varphi_2} + \dots + \alpha_5 C_{\varphi_5}) = \{0\}$ در گزاره بعد نشان می‌دهیم که طیف اساسی ترکیبات خطی عملگرهای ترکیبی با تابع‌های ترکیبی که در یک زنجیر قرار دارند صفر می‌باشد.

گزاره ۹.۲. اگر $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ زنجیری ماکزیمال به طول n باشد، در این صورت برای هر $m > n$ $(\alpha_1 C_{\varphi_1} + \alpha_2 C_{\varphi_2} + \dots + \alpha_n C_{\varphi_n})^m$ می‌باشد و همچنین

$$\sigma_e(\alpha_1 C_{\varphi_1} + \alpha_2 C_{\varphi_2} + \dots + \alpha_n C_{\varphi_n}) = \{0\}$$

اثبات. فرض کنید $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n, \zeta_{n+1}\} \subseteq \partial\mathbb{D}$ و برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $\varphi_i(\zeta_i) = \zeta_{i+1}$. بوضوح برای هر $m > n$ داریم

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 C_{\varphi_1} + \alpha_2 C_{\varphi_2} + \dots + \alpha_n C_{\varphi_n})^m \\ &= \sum_{\substack{i_j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ 1 \leq j \leq m}} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_m} C_{\varphi_{i_1}} C_{\varphi_{i_2}} \dots C_{\varphi_{i_m}}. \end{aligned}$$

متفاوت قرار داشته باشند. لذا با توجه به تعریف ۷.۲،
 $\|\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{i_{N+1}}\|_\infty < 1$ و سپس با توجه به صفحه
 ۱۲۹ از [۱۰]، فشرده $C_{\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{i_{N+1}}}$ است. پس تمام
 جموعدهای S^{N+1} فشرده می‌باشند، لذا S^{N+1} فشرده
 است. بنابراین با توجه به قضیه ۱۰.۴ صفحه ۲۰۴ از [۶]،
 $\sigma_e(S) = \{0\}$ از طرفی TS و ST فشرده می‌باشند.
 زیرا برای $1 \leq i_0 \leq n_1$ و $1 \leq j_0 \leq n$ ، با توجه به
 شرط (الف) بیان شده قبل از صورت قضیه، $\varphi_{i_0} \circ \varphi_{j_0}$
 $\varphi_{j_0} \circ \varphi_{i_0}$ هیچ نقطه‌ای از $\partial \mathbb{D}$ را به $\partial \mathbb{D}$ نمی‌برد. پس
 با توجه به صفحه ۱۲۹ از [۱۰]، $C_{\varphi_{j_0} \circ \varphi_{i_0}}$ و $C_{\varphi_{i_0} \circ \varphi_{j_0}}$
 فشرده می‌باشند. لذا با استفاده از لم‌های ۱.۲ و ۳.۲ داریم
 $\sigma_e(\alpha_1 C_{\varphi_{i_1}} + \alpha_2 C_{\varphi_{i_2}} + \dots + \alpha_n C_{\varphi_{i_n}}) \setminus \{0\}$
 $= \sigma_e(S+T) \setminus \{0\}$
 $= (\sigma_e(S) \cup \sigma_e(T)) \setminus \{0\}$
 $= \sigma_e(T) \setminus \{0\}$
 $= \bigcup_{i=1}^{n_1} \{\alpha_i \sigma_e(C_{\varphi_{i_1}})\} \setminus \{0\}$.

دقت شود که تساوی آخر از این مطلب نتیجه می‌شود که
 با توجه به شرط (الف) بیان شده قبل از صورت قضیه
 ضرب هر دو عضو از T فشرده می‌باشد. \square

نتیجه ۱۱.۲. فرض کنید $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ و φ_n شرایط
 قضیه قبل را دارا و برای هر $1 \leq i \leq n$ ، ζ_i عضوی از
 $\partial \mathbb{D}$ باشد بطوریکه $\varphi_i(\zeta_i) \in \partial \mathbb{D}$. اگر برای هر
 $1 \leq i \leq n$ ، $\psi_i \in H^\infty$ و ψ_i در ζ_i پیوسته باشند،
 آن‌گاه

$$\sigma_e(C_{\psi_1, \varphi_1} + C_{\psi_2, \varphi_2} + \dots + C_{\psi_n, \varphi_n}) \setminus \{0\}$$

$$= \bigcup_{i=1}^n \{\psi_i(\zeta_i) \sigma_e(C_{\varphi_i})\} \setminus \{0\},$$

که در آن φ_i دارای نقطه ثابت در $\partial \mathbb{D}$ باشد: $i \in I$
اثبات. با توجه به نتیجه ۲.۲ از [۲۲] داریم

$$\sigma_e(C_{\psi_1, \varphi_1} + C_{\psi_2, \varphi_2} + \dots + C_{\psi_n, \varphi_n})$$

$$= \sigma_e(\psi_1(\zeta_1)C_{\varphi_1} + \psi_2(\zeta_2)C_{\varphi_2}$$

$$+ \dots + \psi_n(\zeta_n)C_{\varphi_n}).$$

قضیه ۱۰.۲. اگر $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ شرایط فوق را
 دارا باشند، آن‌گاه برای هر ترکیب خطی بفرم زیر از C_{φ_i}
 ها داریم

$$\sigma_e(\alpha_1 C_{\varphi_1} + \alpha_2 C_{\varphi_2} + \dots + \alpha_n C_{\varphi_n}) \setminus \{0\}$$

$$= \bigcup_{i \in I} \{\alpha_i \sigma_e(C_{\varphi_i})\} \setminus \{0\},$$

که در آن φ_i دارای یک نقطه ثابت در $\partial \mathbb{D}$ باشد: $i \in I$
اثبات. فرض کنید $1 \leq n_1 \leq n$ و برای هر $1 \leq i \leq n_1$ ،
 φ_i دارای یک نقطه ثابت در $\partial \mathbb{D}$ باشد. قرار دهید
 $S = \sum_{i=n_1+1}^n \alpha_i C_{\varphi_i}$ و $T = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i C_{\varphi_i}$
 $1 \leq i \leq n$ ، زنجیر ماکزیمالی موجود باشد بطوریکه
 φ_i درون آن قرار گیرد. بدون کاسته شدن از کلیت،
 فرض می‌کنیم که برای هر $1 \leq i \leq n$ ، φ_i فقط
 در یک زنجیر ماکزیمال قرار داشته باشد (بوضوح اگر i_0
 ی موجود باشد بطوریکه φ_{i_0} درون حداقل دو زنجیر
 ماکزیمال باشد مشابه مثال ۸.۲ و روند اثبات همین
 قضیه، می‌توان نشان داد که زنجیرهای ماکزیمال در
 محاسبه طیف اساسی بی‌تاثیر می‌باشند). فرض کنید
 تبدیلات خطی کسری $\varphi_{n_1+1}, \varphi_{n_1+2}, \dots, \varphi_n$ درون
 زنجیرهای ماکزیمال $(C_{\varphi_{n_1+1}}, C_{\varphi_{n_1+2}}, \dots, C_{\varphi_{n_1+m_1}})$ ،
 $(C_{\varphi_{n_1+m_1+1}}, C_{\varphi_{n_1+m_1+2}}, \dots, C_{\varphi_{n_1+m_1+m_2}})$
 \dots و
 $(C_{\varphi_{n_1+m_1+\dots+m_{k-1}+1}}, \dots, C_{\varphi_{n_1+m_1+\dots+m_{k-1}+m_k}})$
 باشند که به ترتیب طول هر کدام از آن‌ها m_1, m_2, \dots, m_k
 و $m_k = n - n_1 - m_1 - \dots - m_{k-1}$ می‌باشد. قرار دهید
 $N = \max\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$
 S^{N+1} فشرده است، واضح است که S^{N+1} ترکیبی خطی از
 عملگرهای ترکیبی می‌باشد. به عبارت دیگر

$$S^{N+1} = \sum_{i_j \in \{n_1+1, \dots, n\}} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_{N+1}} C_{\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{i_{N+1}}}$$

اگر $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots$ و $\varphi_{i_{N+1}}$ همگی عضوی از یک
 زنجیر ماکزیمال باشند آن‌گاه طبق گزاره ۹.۲،
 $C_{\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{i_{N+1}}}$ فشرده است. حال بدون کاسته شدن از
 کلیت فرض کنید φ_{i_1} و φ_{i_2} در دو زنجیر ماکزیمال

بنابراین با استفاده از قضیه قبل نتیجه حاصل می‌شود. \square

نتیجه ۱۲.۲. اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ ، ψ_i و φ_i شرایط گزاره ۵.۲ را دارا باشند، آنگاه

$$\begin{aligned} & \sigma_e(C_{\psi_1, \varphi_1} + C_{\psi_2, \varphi_2} + \dots + C_{\psi_n, \varphi_n}) \setminus \{0\} \\ &= \bigcup_{i \in I} \sigma_e(\psi_i(\zeta_i)C_{\varphi_i}), \end{aligned}$$

که در آن φ_i دارای یک نقطه ثابت در ζ_i باشد: $i \in I$

اثبات. برای هر $1 \leq j \leq n$ که $\varphi_j(\zeta_j) = \eta_j$ و

$\eta_j \neq \zeta_j$ ، واضح است که φ_j درون یک و فقط یک

زنجیر ماکزیمال به طول 1 قرار می‌گیرد. لذا φ_i ها

شرایط نتیجه ۱۱.۲ را دارا می‌باشند. پس با توجه به

نتیجه ۱۱.۲ مطلب اثبات می‌شود. \square

Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

فهرست منابع

[11] J. A. Deddens, Analytic Toeplitz and composition operators, *Canad. J. Math.* 24 (1972), 859-865.

[12] M. Fatehi and M. Haji Shaabani, Certain nontrivially essentially self-adjoint weighted composition operators on H^2 and A_2 , *Complex Variables and Elliptic Equations*. 59 (2014), 1626-1635.

[13] M. Fatehi and M. Haji Shaabani, Some essentially normal weighted composition operators on the weighted Bergman spaces, *Complex Variables and Elliptic Equations*. 60 (2015), 1205-1216.

[14] M. Fatehi and M. Haji Shaabani, Normal, cohyponormal and normaloid weighted composition operators on the Hardy and weighted Bergman spaces, *Journal of the Korean Mathematical Society*. 54 (2017), 599–612.

[15] M. Fatehi and M. Haji Shaabani, Norms of hyponormal weighted composition operators on the Hardy and weighted Bergman Spaces, *Operators and Matrices*. 12 (2018), 997–1007.

[16] M. Fatehi, M. Haji Shaabani and D. Thompson, Quasinormal and Hyponormal Weighted Composition Operators on H^2 and A_2 with Linear Fractional Compositional Symbol, *Complex Anal. Oper. Theory*, 12 (2018), 1767–1778.

[17] M. Fatehi, Complex symmetric weighted composition operators, *Complex Variables and Elliptic Equations*, to appear.

[18] G. Gunatillake, Spectrum of a compact weighted composition operator, *Proc. Amer. Math. Soc.* 135 (2) (2007), 461-467.

[1] P. S. Bourdon, Spectra of some composition operators and associated weighted composition operators, *J. Operator Theory* 67 (2012), 537-560.

[2] P. S. Bourdon, Spectra of composition operators with symbols in $S(2)$, *J. Operator Theory* 75 (2016), 21-48.

[3] P. S. Bourdon and S. Narayan, Normal weighted composition operators on the Hardy space $H^2(U)$, *J. Math. Anal. App.* 367 (2010), 278-286.

[4] J. G. Caughran and H. J. Schwartz, Spectra of compact composition operators, *Proc. Amer. Math. Soc.* 51 (1975), 127-130.

[5] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1978.

[6] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1990.

[7] C. C. Cowen, Composition operators on H^2 , *J. Operator Theory* 9 (1983), 77-106.

[8] C. C. Cowen and E. Ko, Hermitian weighted composition operators on weighted Hardy spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 362 (2010), 5771-5801.

[9] C. C. Cowen, E. Ko, D. Thompson and F. Tian, Spectra of some weighted composition operators on H^2 , *Acta Sci. Math. (Szeged)* 82 (2016), 221-234.

[10] C. C. Cowen and B. D. MacCluer, *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*. *Studies in Advanced*

[19] G. Gunatillake, Invertible weighted composition operators, *J. Funct. Anal.* 261 (2011), 831-860.

[20] O. Hyvarinen, M. Lindstrom, I. Nieminen, and E. Saukko, Spectra of weighted composition operators with automorphic symbols, *J. Funct. Anal.* 265 (2013), 1749-1777.

[21] H. Kamowitz, The spectra of composition operators on H^p , *J. Funct. Anal.* 18 (1975), 132-150.

[22] T. L. Kriete, B. D. MacCluer and J. L. Moorhouse, Toeplitz- composition C^* -algebras, *J. Operator Theory.* 58 (2007), 135-156.

[23] R. Lim, L. H. Khoi, Complex symmetric weighted composition operators $H_\gamma(D)$, *J. Math. Anal. Appl.* 464 (2018), 101-118.

[24] S. K. Narayan, D. Sievewright and D. Thompson, Complex symmetric composition operators on H_2 , *J. Math. Anal. Appl.* 443 (2016), 625-630.

[25] E. A. Nordgren, Composition operators, *Canad. J. Math.* 20 (1968), 442-449.

[26] J. H. Shapiro, *Composition Operators and Classical Function Theory*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[27] D. Thompson, Normaloid weighted composition operators on H_2 . *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 467 (2018), 1153-1162.