دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و هشتم، مهر و آبان ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

طرح‌بندی گراف: تبدیل طرح یک‌پشته به طرح دوصف

سپهر مرادی[۱]، زاهد رحمتی[۲*]

[۱و۲] دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۷/۱۸   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۳/۱۱

چکیده

طرح‌بندی یک گراف یافتن ترتیبی خطی به رئوس آن و بخش‌بندی یال‌های آن به صف‌ها یا پشته‌ها با توجه به ترتیب اتخاذ شده می‌باشد. در این مقاله هدف ما پیدا کردن یک رابطه میان طرح پشته و طرح صف یک گراف دلخواه است و یک روش برای تبدیل این دو طرح به یکدیگر ارائه خواهیم کرد. الگوریتمی ارائه می‌کنیم که طرح یک‌پشته هر گرافی را به به طرح دوصف آن گراف تبدیل می‌کند و درستی الگوریتم را اثبات می‌کنیم. این روش، بطور مسقیم و بدون در نظر گرفتن گراف اصلی و خواص آن، طرح پشته‌ی یک گراف را تبدیل به یک طرح صف می‌کند. به عنوان نتیجه، این روش می‌تواند کمک کند که اگر برای دسته‌ای خاص از گراف‌ها عدد پشته محدود داشته باشیم، ممکن است بدون تحلیل مستقیم طرح صف برای این دسته از گراف‌ها به عدد صف مناسب و محدودی دست بیابیم. بنابراین الگوریتم ارائه شده در اینجا انگیزه‌ای برای یافتن الگوریتم‌های مشابه برای تبدیل طرح‌های خطی به یکدیگر و یافتن پارامترهای محدود کننده بهتر و بهینه‌تر برای آن‌ها خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: طرح‌بندی گراف، ترسیم گراف، طرح پشته گراف، طرح صف گراف.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: zrahmati@aut.ac.ir

۱- مقدمه

مسائل طرح‌بندی گراف[۲]، یک دسته‌ی بخصوص از مسائل بهینه‌سازی ترکیبیاتی می‌باشند که هدف یافتن طرحی خطی[۳] برای گراف ورودی است، بطوریکه پارامتری مشخص به بهینه‌ترین حالت برسد. منظور از ایجاد طرحی خطی برای یک گراف، نام‌گذاری رئوس گراف با اعداد صحیح غیرتکراری و یا به عبارتی دیگر تعریف تابع نگاشت یک به یک از رئوس گراف به اعداد طبیعی می‌باشد.

طیف وسیعی از مسائل مرتبط در دیگر زمینه‌های علمی وجود دارند، که می‌توان آن‌ها را به صورت مسائل حوزه‌ی گراف، مدلسازی نمود و از روش‌های حوزه‌ی مسائل گراف، برای حل آن‌ها و یا نیل به جوابی بهینه‌تر بهره برد. از جمله مسائلی که می‌توان آن‌ها را با مسائل مرتبط با طرح‌بندی گراف مدلسازی کرد و با یافتن طرح‌بندی مناسب، به راه‌حلی مناسب برای مسئله‌ی اولیه دست یافت، می‌توان بهینه‌سازی شبکه، طراحی مدارهای VLSI، بازیابی اطلاعات، تحلیل عددی، زیست‌شناسی محاسباتی، تئوری گراف، زمانبندی و حتی باستان‌شناسی را نام برد. اکثر مسائل طرح‌بندی گراف در دسته مسائل غیرچندجمله‌ای کامل[۴] قرار می‌گیرند، با این وجود در بسیاری از کاربردهای آن‌ها جواب‌های دست یافتی تخمینی نیز از نظر بهینگی کافی بوده و می‌توان از الگوریتم‌های تقریبی و اکتشافی برای یافتن جواب بهره برد.

یک طرح پشته از یک گراف شامل یک ترتیب خطی بر روی رئوس گراف و عمل اختصاص هر یال به یک پشته[۵] می‌شود، به نحوی که هیچ دو یالی از یک پشته در محلی غیر از رئوس ابتدایی و انتهایی با هم برخوردی نداشته باشند. مفهوم طرح پشته برای گراف با مفهوم ساختار داده پشته در علم کامپیوتر مطابقت دارد و می‌توان مسئله طرح‌بندی را به کمک آن مدل‌سازی نمود، بدین صورت که اگر رئوس گراف را روی خط قرار دهیم و از سمت چپ به راست به ترتیب آن‌ها را پیمایش کنیم، در صورتی که رأس ابتدایی یالی مشاهده شد به مفهوم ورود آن یال به یک پشته و در صورتی که رأس انتهایی آن مشاهده شد، به منزله‌ی خروج آن یال از پشته می‌باشد. حال باید ترتیب رئوس بر روی خط و اختصاص یال‌ها به پشته‌ها بنحوی باشد، که ترتیب ورود و خروج یال‌ها از پشته‌ها با ذات ساختار داده پشته مطابقت داشته باشد. کمترین تعداد پشته‌ی مورد نیاز برای طرح‌بندی یک گراف به روش پشته را، عدد پشته‌ی[۶] آن گراف می‌نامند.

ریشه مسائل طرح‌بندی پشته در ابتدا با نام طرح‌بندی کتاب برای گراف مطرح شد، که مفهومی کاملا مشابه با مفهوم طرح‌بندی پشته می‌باشد، اما قوانین و مشخصه‌های آن با عبارات دیگری بیان شده‌اند. در مسئله طرح‌بندی کتاب برای یک گراف، تمام رئوس گراف روی محور اصلی (ستون فقرات) کتاب قرار گرفته و هر یال باید درون یک نیم صفحه که توسط محور کتاب محدود شده است قرار بگیرد. همچنین درون هر صفحه از کتاب هیچ دو یالی نباید با یکدیگر برخورد داشته باشند. کمترین تعداد صفحه مورد نیاز برای طرح‌بندی یک گراف را، ضخامت کتاب[۷] آن گراف می‌نامند. معادل مفاهیم بیان شده به ترتیب در طرح‌بندی پشته همان ترتیب‌دهی به رئوس، پشته‌ها و عدد پشته گراف می‌باشند. این مسئله در ابتدا در دهه‌ی ۷۰ توسط Ollmann[19] بیان شد و رفته رفته طی سال‌ها مقالات و نتایج قابل توجهی برای آن ارائه گشت.

طرح صف مفهوم دوگان طرح پشته می‌باشد که بطور مشابه تعریف می‌شود. تفاوت در اینجاست که

[2] Graph embedding
[3] Linear layout
[4] NP-Complete
[5] Stack

[6] Stack number
[7] Book thickness

هیچ دو یالی از یک صف[8] که در رئوس ابتدایی و انتهایی مشترک نیستند نباید همپوشانی داشته باشند و یا به عبارت دیگر، هیچ یالی از یک صف نباید کاملا درون یالی از همان صف قرار گیرد. مفهوم طرح صف برای گراف نیز با مفهوم ساختار داده صف در علم کامپیوتر مطابقت دارد و برای مدل‌سازی مسئله‌ی طرح‌بندی با مفهوم ساختار داده صف، باید رئوس گراف را روی خط قرار دهیم و از سمت چپ به راست به ترتیب آن‌ها را پیمایش کنیم، در صورتی که رأس ابتدایی یالی مشاهده شد به مفهوم ورود آن یال به یک صف و در صورتی که رأس انتهایی آن مشاهده شد، به منزله‌ی خروج آن یال از صف می‌باشد. حال باید ترتیب رئوس بر روی خط و اختصاص یال‌ها به صف‌ها بنحوی باشد که ترتیب ورود و خروج یال‌ها از صف‌ها با ذات ساختار داده صف مطابقت داشته باشد. کمترین تعداد صف مورد نیاز برای طرح‌بندی یک گراف به روش صف را، عدد صف[9] آن گراف می‌نامند. مفهوم طرح صف اولین بار توسط Heath و همکاران [12] در سال ۱۹۹۲ معرفی و ارائه شد.

در حالت کلی‌تر، طرح‌های پشته و صف به طرح‌های ترکیبی تعمیم داده می‌شود: در این نوع طرح‌بندی، هر یال با توجه به ترتیبی یکتا برای رئوس گراف می‌تواند به یک صف و یا پشته اختصاص یابد، اما باید تمام یال‌ها درون هر صف و یا پشته از قانون مربوط به صف و یا پشته، که در بالا بیان شد، پیروی کنند. اگر گرافی را با تعداد s پشته و q صف به صورت ترکیبی طرح‌بندی کنیم، یک طرح s-پشته و q-صف برای آن یافته‌ایم. برای اولین بار Heath و Rosenberg در سال ۱۹۹۲ فرضیه‌ای مبنی بر قابل طرح‌بندی بودن تمام گراف‌های مسطح با یک پشته و یک صف را مطرح ساختند[12]، اما در سال ۲۰۱۸ این فرضیه توسط Sergey Pupyrev نقض گردید[4].

مسئله‌ی مورد تحقیق در اینجا بررسی امکان وجود و یا عدم وجود یک الگوریتم برای تبدیل طرح پشته‌ی داده شده یک گراف به طرح صف همان گراف با تعداد ثابتی صف می‌باشد. هدف ما یافتن رابطه‌ای میان طرح‌های صف و پشته و همچنین الگوریتمی برای تبدیل طرح صف به طرح پشته و یا بالعکس است. اگر بتوان ثابت نمود طرح‌های پشته را می‌توان با ضریبی ثابت به طرح‌های صف تبدیل کرد، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت حد بالایی ثابت برای دسته‌هایی که تاکنون عدد صفی ثابت برای آن‌ها یافت نشده است، ارائه کرده‌ایم. ثابت شده است گراف‌هایی که با یک پشته قابل طرح‌بندی هستند در دسته‌ی گراف‌های مسطح برونی[10] قرار می‌گیرند[18]، همچنین عدد صف این دسته از گراف‌ها بطور مستقل یافت شده و برابر ۲ می‌باشد[12]. در این پژوهش ما هر طرح پشته هر گرافی را به طرحی صف همان گراف تبدیل می‌کنیم و رابطه‌ای کوچک را میان این مفاهیم برقرار کنیم.

بطور دقیق‌تر، فرض می‌کنیم طرح پشته‌ای از یک گراف موجود است که با یک پشته ترسیم شده است. در این مقاله، یک الگوریتم ارائه می‌کنیم که طرح صف همان گراف را تولید می‌کند و اثبات می‌کنیم که این طرح صف بیشتر از تعداد ثابتی صف نخواهد داشت و برای گراف اولیه معتبر می‌باشد. بخش ۲ تعاریف و مفاهیم مورد نیاز را رسمی‌تر بیان می‌کند. در بخش ۳ مرور کامل‌تری روی کارهای گذشته خواهیم داشت و در بخش ۴ الگوریتم خودمان را شرح داده و درستی آن را اثبات می‌کنیم. بخش ۵ نتیجه‌گیری را بیان می‌کند.

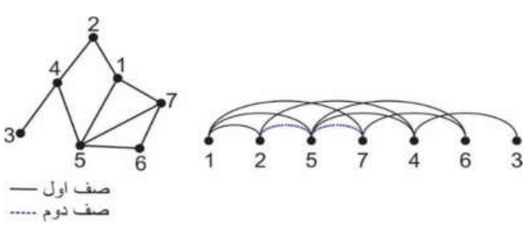
---

[8] Queue
[9] Queue number
[10] Outerplanar

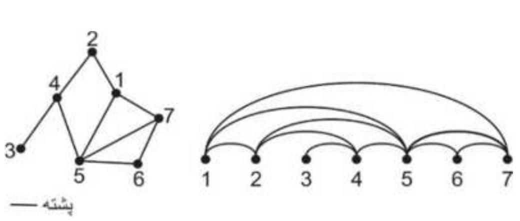
۲- تعاریف و مفاهیم

یک گراف شامل یک مجموعه ناتهی از رئوس و مجموعه‌ای از یال‌ها بین این رئوس می‌باشد. گراف را به صورت $G = (V, E)$ نمایش می‌دهیم که V مجموعه ناتهی از رئوس گراف و E مجموعه‌ی یال‌های گراف می‌باشد که می‌تواند تهی نیز باشد. به هر نوع ترسیم گراف در فضای دو بعدی و یا سه بعدی طرح‌بندی گراف می‌گویند، گاهی هدف از طرح‌بندی گراف حصول نتایجی می‌باشد که در طرح جدید آن گنجانده است. برای مثال می‌توان گراف کامل با ۴ رأس را طوری رسم کرد که مسطح باشد و از این طریق ویژگی مسطح بودن آن را نشان داد. برای طرح‌بندی یک گراف بصورت صف در ابتدا باید تمام رئوس را روی یک خط در فضای سه بعدی قرار داد، یا به عبارت دیگر باید ترتیبی برای تمام رئوس گراف مشخص نماییم. سپس هر یال بین رئوس را باید بنحوی به یک صف اختصاص دهیم بطوریکه هیچ یالی درون یک صف، یال دیگری از همان صف را بطور کامل پوشش ندهد، به عبارت دیگر اگر یال‌ها را بصورت $e_1: (s_1, q_1)$ و $e_2: (s_2, q_2)$ نامگذاری کنیم هیچ دو یالی از یک صف نباید وجود داشته باشند که $s_1 > s_2$ و $q_1 < q_2$ یا $s_1 < s_2$ و $q_1 > q_1$، در این صورت می‌گوییم برای گراف داده شده طرح صف معتبری بوجود آورده‌ایم. برای هر گرافی کمترین تعداد صف مورد نیاز برای بوجود آوردن طرح صف معتبر آن گراف را، عدد صف آن گراف می‌نامیم. شکل ۱ مثالی از طرح صف گراف را نشان می‌دهد که یال‌های گراف سمت چپ را به دو صف اختصاص می‌دهد. یال‌های که با خطچین نمایش داده شده‌اند به صف دوم اختصاص داده می‌شوند.

برای طرح‌بندی یک گراف به صورت پشته، همانند طرح صف باید رئوس گراف را روی یک خط در فضا قرار داده و ترتیبی برای آن‌ها تعریف کنیم. سپس باید تمام یال‌ها را طوری به پشته‌ها اختصاص دهیم، که هیچ دو یالی از یک پشته در محلی غیر از رئوس با یکدیگر تلاقی نداشته باشند و یا به عبارت دیگر اگر یال‌ها را بصورت $e_1: (s_1, q_1)$ و $e_2: (s_2, q_2)$ نامگذاری کنیم، نباید $s_1 < s_2$ و $q_1 < q_2$ یا $s_1 > s_2$ و $q_1 > q_2$ باشد. اگر طرحی با ویژگی‌های ذکر شده برای یک گراف ایجاد نماییم، می‌گوییم آن گراف بصورت صف طرح‌بندی شده و به حداقل تعداد پشته مورد نیاز برای طرح‌بندی آن، عدد پشته گراف می‌گوییم. در شکل ۲ طرح پشته شامل تنها یک پشته است، یعنی تمام یال‌ها را می‌توان با اختصاص دادن به یک پشته ترسیم کرد.



شکل ۱. طرح دو صف برای گراف سمت چپ



شکل ۲. طرح یک پشته برای گراف سمت چپ

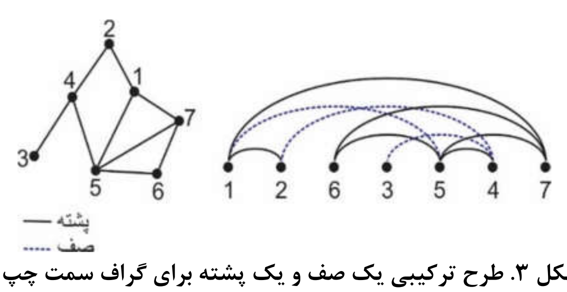
طرح‌بندی پشته و صف یک گراف به صورت ترکیبی با پشته و صف، مشابه طرح‌بندی‌های پشته و یا صف می‌باشد، در ابتدا نیاز است ترتیبی برای رئوس تعیین کنیم، که برای پشته و صف بصورت مشترک و یکسان استفاده می‌شود. سپس هر یال را با توجه به ترتیب مشخص شده برای رئوس، به یک پشته و یا صف اختصاص می‌دهیم، بطوریکه قوانین مربوط به یال‌های درون یک پشته و همچنین صف برای تمام صف‌ها و پشته‌ها رعایت شده باشد. شکل ۳ مثالی از طرح ترکیبی پشته و صف گراف سمت راست را نشان می‌دهد. یال‌های که با خط‌چین مشخص شده‌اند به صف و یال‌های عادی به پشته اختصاص داده می‌شوند.

۳- مروری کامل‌تر بر کارهای گذشته

مفهوم کتاب به عنوان یک فضای توپولوژیک در دهه‌ی ۱۹۶۰ میلادی توسط C. A. Persinger و Gail Atneosen معرفی شد [21]. Atneosen در بخشی از کار خود، طرح‌بندی گراف‌ها در کتاب را مطرح و بررسی کرد. اما نوع طرح‌بندی که مورد مطالعه‌ی او قرار گرفت، مشابه دیگر طرح‌بندی‌های گراف در فضاهای توپولوژیک بود، در اینگونه طرح‌بندی رئوس با نقاطی مجزا و یال‌ها از طریق خم‌ها نمایش داده می‌شوند، همچنین تنها نقطه‌ی مجاز برای تلاقی دو یال روی نقاط رأس می‌باشد. در اوایل دهه‌ی ۱۹۷۰ میلادی، Paul C. Kainen و Teylor Ollmann نوعی طرح‌بندی با محدودیت‌های بیشتر را توسعه دادند، که در بیشتر تحقیقات آتی مورد استفاده قرار گرفت [19]. آن‌ها در طرح‌بندی خود، رئوس گراف را به قرارگیری بر روی محور کتاب (ستون فقرات) و یال‌ها را به قرارگیری در تنها یکی از صفحه‌ها محدود کردند.

سال ۱۹۸۷ مقاله‌ای توسط Lenwood S. Heath ارائه شد، که حد بالایی ۱ را برای طرح‌بندی پشته‌ی گراف‌های مسطح برونی اثبات کرده و همچنین بیان می‌دارد هر گرافی که بتوان آن را با یک پشته طرح بندی نمود، یک گراف مسطح برونی است [14].

همچنین ثابت شد گراف‌هایی که عدد پشته‌ی آن‌ها حداکثر ۲ باشد، زیرگراف‌هایی از گراف‌های مسطح همیلتونی[11] هستند که شامل گراف‌های دوبخشی مسطح و سری-موازی‌ها[12] می‌شوند[18]. مطالعه‌ی عدد پشته‌ی حالت کلی گراف‌های مسطح، توسط Leighton در دهه‌ی ۸۰ با مطرح کردن سوالی مبنی بر این که آیا عدد پشته گراف‌های مسطح کوچک‌تر از عددی ثابت است ، آغاز شد. اولین پاسخ مثبت به این سوال توسط Buss و Shor ارائه شد، که با الگوریتمی بازگشتی[13] طرح کتاب هر گراف مسطحی را با ۹ صفحه بدست می‌آوردند[15].



شکل ۳. طرح ترکیبی یک صف و یک پشته برای گراف سمت چپ

[11] Hamiltonian planar graphs
[12] Series-Parallel graphs
[13] Recursive algorithm

این حد بالایی توسط Heath به عدد ۷ بهبود یافت[16]، او روش پوست کندن گراف[14] را برای طرح‌بندی معرفی کرد. بطور کلی این روش در ابتدا عدد سطح هر رأس گراف را که بر روی مرز خارجی قرار دارد، صفر در نظر گرفته و با حذف این رئوس، عدد سطح رئوسی را که روی مرز خارجی قرار می‌گیرند را برابر ۱ قرار می‌دهد و بطور کلی عدد سطح رأس را n در نظر میگیرد، اگر بعد از حذف تمام رئوس با عدد سطح 1 n رأس مذکور بر روی مرز خارجی گراف قرار بگیرد. به سادگی متوجه می‌شویم که مجموعه رئوس روی مرز خارجی هر سطح، یک گراف مسطح برونی را تشکیل می‌دهند و با توجه به الگوریتم‌های اثبات شده‌ی گذشته، می‌توان آن‌ها را با یک پشته طرح‌بندی نمود. بنابراین چالش اصلی طرح بندی یال‌های اتصال بین سطح‌های پیاپی گراف بود، که با یک الگوریتم ساده آن‌ها را با ۶ پشته طرح‌بندی کرد. سپس Yannakakis در سال ۱۹۸۹ موفق شد با همان روش پوست کندن گراف و یا به عبارتی دیگر سطح‌بندی رئوس گراف و معرفی روشی جدید اما در عین حال ساده برای اختصاص یال‌های بین سطحی به پشته‌ها تعداد پشته مورد نیاز برای طرح‌بندی گراف‌های مسطح را به عدد ۵ کاهش دهد. سپس با ترکیب روشی پیچیده‌تر و روش پوست کندن گراف، با استفاده از تعریف دقیق برای حالت‌های متفاوت از قرارگیری یال‌ها در بین سطوح و اختصاص هر یال به یک پشته موفق به اثبات حد بالایی ۴ عدد پشته برای طرح‌بندی گراف‌های مسطح شد[13]. حد پایینی تعداد پشته‌ی مورد نیاز برای طرح‌بندی گراف‌های مسطح در ابتدا توسط Goldner و Harary عدد ۳ بیان و با معرفی کوچکترین گراف حداکثر مسطح[15] که غیرهمیلتونی بود اثبات شد. بعد از آن در سال ۲۰۲۰ حد پایینی ۴ برای طرح‌بندی به روش پشته برای گراف‌های مسطح توسط Bekos و همکارانش ارائه و اثبات شد [1]. مفهوم طرح صف اولین بار توسط Lenwood S. Heath و Arnold L. Rosenberg در سال ۱۹۹۲ معرفی و ارائه شد [12]. این مفهوم ساختاری شناخته شده برای گراف‌ها می‌باشد، که کاربردهای متنوعی شامل نظریه پیچیدگی، طراحی VLSI، بیوانفورماتیک، زمانبندی فرآیندهای موازی، محاسبات ماتریسی، مرتب‌سازی جایگشت و ترسیم گراف دارند. در ابتدا ۳ انگیزه برای بررسی طرح‌های صف گراف مطرح شد:

- **مقایسه‌ی صف‌ها و پشته‌ها**. صف‌ها و پشته‌ها به عنوان مکانیزم‌هایی برای محاسبات به دلیل شبیه‌سازی به ترتیب روش‌های اولین ورودی، اولین خروجی[16] و آخرین ورودی، اولین خروجی[17] در ظاهر از نظر قدرت دوگان یکدیگر بنظر می‌رسند. احتمال درستی این استدلال سطحی، در مورد استفاده از صف‌ها و پشته‌ها برای جایگشت‌های ثابت[20] قوت می‌گیرد، اما برای استفاده از صف و یا پشته برای پیاده‌سازی ماشین تورینگ از آنجایی که به استفاده از یک صف و یا دو پشته نیاز داریم شک و تردید بر نادرست بودن این استدلال افزون می‌گردد.
- **روش طراحی دیوزن‌ها**. در مبحث دیوزن‌ها [17]، یک آرایه از پردازنده‌های ارتباطی بر روی یک خط فرضی قرار داده می‌شوند، و تعدادی سخت‌افزار از نوع صف و یا پشته در طول تمام خط به عنوان راه‌های اطلاعاتی، ارتباط‌هایی را بین این پردازنده‌ها بوجود می‌آورند. این ارتباط‌ها بین پردازنده‌ها بنحوی پیاده‌سازی می‌شوند که پردازنده‌های معیوب نادیده گرفته می‌شوند و تمام پردازنده‌های سالم مورد استفاده قرار می‌گیرند. اگر پردازنده‌ها و ارتباط بین آن‌ها را یک گراف بدون جهت ساده در نظر بگیریم،

[14] Graph peeling
[15] Maximal planar

[16] FIFO
[17] FILO

این مسئله به مسئله‌ی طرح‌بندی گراف به روش صف و یا پشته تبدیل می‌گردد.

- **زمانبندی پردازنده‌های موازی**. مدل ساده‌ی زمانبندی محاسبات موازی در یک روش مستقل از ساختار را در نظر بگیرید. یک مسئله‌ی محاسباتی را که باید زمانبندی شود، به عنوان یک گراف بدون دور مدل می‌کنیم، در این گراف رئوس محاسبات و یال‌های بین آن‌ها وابستگی‌های بین محاسبات را نشان می‌دهند. یک رأس محاسباتی تا زمانیکه تمام رئوس وابسته قبل از آن در گراف بدون دور محاسبه نشده باشند، نمی‌تواند محاسبه گردد. وظایف محاسبات زمانی که آماده‌ی انجام محاسبه شدند، در یک صف اولین ورودی، اولین خروجی پردازنده قرار می‌گیرند. هر پردازنده در دسترس، اولین محاسبه‌ی در صف را در اختیار گرفته و برای اطلاعات ورودی مورد نیاز برای هر محاسبات یک ساختار داده از نوع اولین ورودی، اولین خروجی نیز در نظر می‌گیریم.

طرح‌های صف، برای تعداد زیادی از زیردسته‌های گراف‌های مسطح، با عدد صف متناهی تعریف و اثبات شده است، برای مثال: هر گرافی که بتوان با یک صف آن را طرح‌بندی کرد، یک گراف مسطح با طرح سطوح طبقاتی مسطح[18] خواهد بود. تمام درخت‌ها عدد صف یک، گراف‌های مسطح برونی عدد صف برابر ۲، گراف‌های سری-موازی عدد صفی حداکثر برابر ۴ و گراف‌های مسطح ۳ درختی[19] نهایتا عدد صفی برابر ۷ خواهند داشت. همینطور برای گراف‌های دیگری حد پارامتری تعیین ثابت شده است، برای مثال، عدد صف گراف کامل با n رأس کوچکتر از $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ می‌باشد. همچنین ثابت شده است، گراف‌هایی با تعداد m یال عدد صف از مرتبه‌ی $O(\sqrt{m})$ دارند. برای گراف‌هایی که عدد عرض درخت[20] محدودی دارند عدد صف ثابت و محدودی ارائه شده، بطور دقیق‌تر گراف با عدد عرض درخت W عدد صف برابر $O(2^{W})$ خواهد داشت. حدهای بهبود یافته‌ای نیز برای گراف‌هایی با عرض مسیر[21] محدود، پهنای باند محدود و یا عرض مسیر لایه‌ای محدود ارائه و اثبات گشته است.

با وجود تمام این پیشرفت‌ها برای یافتن بیشترین عدد صف دسته‌های گراف، عدد صفی متناهی برای گراف‌های مسطح طی سه دهه یافت نشد. در سال ۲۰۱۳، Di Battista و همکارانش موفق شدند ثابت کنند گراف‌های مسطح عدد صفی از مرتبه $O(\log n^{4})$ دارند[8] و پس از آن در سال ۲۰۱۵، Dujmovi´c ثابت کرد این حد بالا را می‌توان به $O(\log n)$ کاهش داد[7]. ساده‌ترین گراف‌هایی که تا سال پیش محدود بودن عدد صف آن‌ها نامشخص و اثبات نشده باقی مانده بود، گراف‌های مسطح بودند. یکی از مهم‌ترین مسائلی که از زمان پیدایش این نوع مسائل طرح‌بندی گراف با صف از ۲۷ سال پیش مطرح بوده، محدود بودن تعداد صف گراف‌های مسطح و یا نا محدود بودن آن بود. این مسئله برای اولین بار توسط Heath و همکارانش مطرح شد، که فرضیه‌ای مبنی بر محدود بودن عدد صف گراف مطرح کردند. محدود بودن عدد صف گراف‌های مسطح در سال ۲۰۲۰ توسط Vida Dujmović و همکارانش اثبات شد و عدد ۴۹ به عنوان حد بالایی این محدودیت ارائه دادند. آن‌ها همچنین عدد ۳۱ را به عنوان حد بالایی عدد صف گراف‌های مسطح دوبخشی بیان و اثبات کردند.

ابزار اساسی برای اثبات حد بالایی عدد صف مطرح شده در مقاله‌ی مذکور، ابزاری به نام تفکیک لایه‌ای[22] می‌باشد، همچنین این موضوع که برای هر گراف مسطحی یک تفکیک رأسی و یک لایه‌بندی موجود است، بطوریکه هر بخش تعداد محدودی رأس در هر لایه و گراف ضریب آن عرض درخت

[18] Arched-level planar graph
[19] Planar 3-trees
[20] Treewidth
[21] Pathwidth
[22] Layered partition

محدودی دارد، به اثبات این فرضیه‌ی مطرح شده کمک شایانی نمود. همچنین آن‌ها نتایج بدست آمده را برای گراف‌هایی با عدد دسته‌ی اویلر محدود نیز تعمیم دادند. علاوه بر این ثابت شد هر دسته بسته‌ای از گراف‌ها چنین تفکیک‌پذیری لایه‌ای را دارا هستند، اگر برخی از گراف‌های اوج در آن دسته‌ها نباشند.

همچنین در سال ۲۰۲۰، Laura Merker و Torsten Ueckerdt مفاهیم جدیدی برای طرح بندی پشته و صفحه گراف‌ها را بیان کردند[3]. مفاهیم تعریف شده شامل عدد پشته‌ی محلی و عدد صف محلی گراف می‌باشد، این مفاهیم مشابه مفاهیم اصلی بیان شده می‌باشند. مشابه قبل چیدمانی برای رئوس بر روی خط طرح باید تعیین گردد و هر یال را به یک صف و یا پشته اختصاص داد بطوریکه یال‌های متصل به هر رأس، در کمترین تعداد صف و یا پشته باشند، به عبارت دیگر به دنبال کاهش تعداد صف و یا پشته با تمرکز بر تک رأس‌ها هستیم. این مفهوم بسیار مرتبط با چگالی گراف[23] می‌باشد و ممکن است از مفهوم کلاسیک طرح‌بندی پشته و صف فاصله بگیرد.

آن‌ها در این مقاله ابزارهایی را برای محدود کردن حد بالایی و حد پایینی عدد صف محلی گراف‌هایی با عرض درخت برابر با k ارائه کرده‌اند. اثبات شده است هر گرافی با عدد عرض درخت برابر با k حد بالایی عدد صف محلی‌ای برابر با $k+1$ و حد پایینی برابر با $\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil+1$ را دارا می‌باشد و این اعداد برای گراف با عدد عرض درخت ۲ برابر با هم خواهند بود و برابر با ۲ و ۳ می‌باشد. همچنین بیان می‌دارند، نتایج حاصل تحقیات بر حد بالایی عدد صف محلی گراف‌های مسطح برابر با ۳ یا ۴ دلالت دارد.

برای سنجش قدرت طرح صف در برابر طرح پشته به عدد صف و عدد پشته برای هر دسته از گراف‌ها توجه می‌شود و اگر برای مثال دسته‌ای از گراف‌ها عدد صف محدود و عدد پشته نامحدود داشته باشند، تفسیر ما از این موضوع قدرتمندتر بودن طرح صف از طرح پشته برای آن دسته خواهد بود و بالعکس. می‌دانیم که عدد پشته گراف می تواند بسیار بزرگ‌تر از عدد صف آن باشد، برای مثال Heath و همکارانش اثبات کردند، عدد صف گراف‌های همینگ[24] سه‌گانه با تعداد n رأس حداکثر از مرتبه $O(\log n)$ و عدد پشته‌ی آن‌ها حداقل از مرتبه‌ی $\Omega\left(n^{\frac{1}{9}-\varepsilon}\right)$ می‌باشد. با این اوصاف کماکان این مسئله که آیا عدد صف گراف، تابعی از عدد پشته‌ی آن است و یا خیر حل نشده باقی مانده است.

در سال ۱۹۹۲، Heath و Rosenberg در مقاله‌ای فرضیه‌ی قابل طرح‌بندی بودن گراف‌های مسطح با یک صف و یک پشته به صورت ترکیبی را مطرح کردند[12]، که این فرضیه توسط Pupyrev در سال ۲۰۱۷ با ارائه‌ی مثال نقض رد شد[4]. طبق بررسی‌ها برای گراف‌هایی با تعداد رأس کوچک‌تر و یا برابر با ۱۸ طرحی با یک صف و یک پشته می‌توان ساخت، اما این درحالی است که گرافی با ۱۱ عدد رأس وجود دارد، که حداقل ۳ پشته برای طرح بندی آن فقط با پشته و همچنین گرافی با ۱۴ عدد رأس وجود دارد، که حداقل ۳ عدد صف برای طرح‌بندی آن فقط با صف مورد نیاز است، که این موضوع به نوعی نشان‌دهنده قدرت طرح‌های ترکیبی در مقایسه با طرح‌های صف و یا پشته می‌باشد.

---

[23] Graph density

[24] Hamming graphs

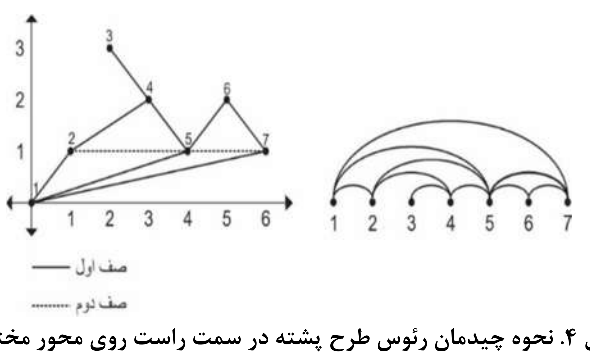
۴- الگوریتم تبدیل طرح یک‌پشته به طرح دو-صف

در ابتدا طرح یک پشته‌ی گراف را که به عنوان ورودی الگوریتم داده شده، در نظر می‌گیریم. سپس اولین رأس از سمت چپ خط طرح پشته را بر روی نقطه (۰,۰) محور مختصات دوبعدی قرار می‌دهیم. حال برای تمام رئوس گراف عدد سطح آن‌ها را محاسبه می‌کنیم. عدد سطح برابر طول کوتاهترین مسیر از هر رأس به رأس قرار گرفته در مرکز مختصات، یعنی نقطه‌ی (۰,۰) با توجه به گراف اصلی داده شده می‌باشد.

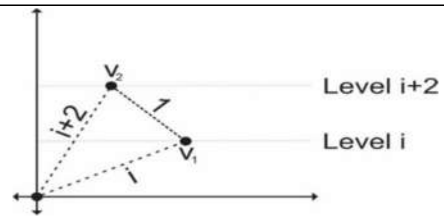
حال تمام نقاط گراف را با توجه به موقعیت آن‌ها بر روی خط طرح پشته و عدد سطح آن‌ها بر صفحه‌ی مختصات قرار می‌دهیم. برای هر رأس موقعیت آن از سمت چپ بر روی خط طرح پشته، معادل مولفه‌ی X آن در محور مختصات می‌باشد و ترتیب رئوس در هر سطح Y مطابق با ترتیب رئوس در طرح پشته‌ی اولیه می‌باشد و عدد سطح آن معادل مولفه‌ی Y می‌باشد. پس از قراردهی رئوس در صفحه‌ی مختصات تمام یال‌ها را رسم می‌کنیم. (شکل۴)

هر یالی که دو رأس با مولفه‌ی Y یکسان را به یکدیگر متصل می‌نماید، در صف ۱ و دیگر یال‌ها که رئوس با مولفه‌ی Y متفاوت را به هم متصل می‌نماند، در صف ۲ قرار می‌دهیم. در پایان رئوس را با توجه به مولفه‌ی X و Y از کوچک به بزرگ مطابق با روش لغت‌نامه بر روی خط طرح صف مورد نظر قرار می‌دهیم. مولفه X اولویت بالاتری در چیدمان دارد. طرح صف بدست آمده، طرحی معتبر و صحیح برای گراف داده شده خواهد بود.

اثبات درستی الگوریتم: در قدم اول نیاز داریم تا اثبات کنیم یال‌ها در صفحه‌ی مختصات دو بعدی تنها می‌توانند رئوس در یک سطح مولفه‌ی Y و یا با مولفه‌های Y متوالی را به یکدیگر متصل نمایند. طبق برهان خلف فرض می‌کنیم این فرضیه صحیح نمی‌باشد و یالی وجود دارد که دو رأس با مولفه‌های Y با اختلاف ۲ را به یکدیگر متصل نموده است. اگر مولفه‌ی Y یک رأس برابر a و مولفه‌ی Y رأس دیگر برابر b باشد و همینطور داشته باشیم $b = a + 2$، به این معنی خواهد بود که کوتاهترین مسیر از رأس اول به اولین رأس، طولی برابر a و کوتاهترین مسیر از رأس دوم به رأس اول طولی برابر $a + 2$ دارد. بدلیل آنکه بین رأس اول و رأس دوم از طریق یال مذکور اتصال برقرار می‌باشد، مسیری از رأس دوم به رأس اول و سپس به رأس ابتدایی وجود دارد، که طول آن یک واحد بیشتر از طول مسیر کوتاهترین مسیر از رأس اول به رأس ابتدایی می‌باشد، بنابراین طول کوتاهترین مسیر برای رأس دوم حداکثر برابر $a + 1$ است، که با فرضیات در تناقض می‌باشد، بنابراین فرض مطرح شده ابتدایی مبنی بر عدم وجود یال بین رئوس با اختلاف مولفه‌ی Y بیشتر از ۱ صحیح می‌باشد. (شکل۵)



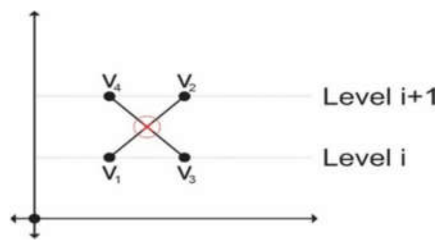
شکل ۴. نحوه چیدمان رئوس طرح پشته در سمت راست روی محور مختصات



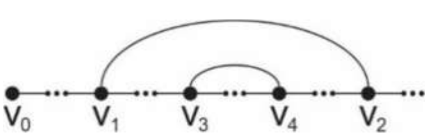
شکل ۵. عدم وجود یال بین رئوس با اختلاف سطح بیشتر از یک

حال به اثبات عدم وجود برخورد بین یال‌های بین سطحی (به یال‌هایی که رئوس با مولفه‌ی Y متفاوت را به یکدیگر متصل می‌کنند، یال‌های بین سطحی می‌گوییم) می‌پردازیم. بار دیگر از برهان خلف برای اثبات این فرضیه استفاده می‌کنیم، فرض می‌کنیم دو یال $e_1 = (v_1, v_2)$ و $e_2 = (v_3, v_4)$ با یکدیگر برخورد دارند. همچنین فرض می‌کنیم رئوس v_1 و v_3 مولفه‌ی Y کوچکتری نسبت به رئوس v_2 و v_4 دارند و همچنین مولفه‌ی X رأس v_1 کوچکتر از مولفه‌ی X رأس v_3 می‌باشد، بنابراین دو یال مذکور تنها در حالتی با یکدیگر برخورد خواهند داشت که مولفه‌ی X رأس v_4 کوچکتر از مولفه‌ی X رأس v_2 باشد. حال این دو جفت رأس و یال‌های اتصال دهنده‌ی آن‌ها را در طرح پشته‌ی اولیه در نظر می‌گیریم. از آنجاییکه مولفه‌ی X رئوس مستقیماً همان محل قرارگیری رئوس بر روی خط طرح پشته بوده است و تنها یک پشته داشته‌ایم، ۶ حالت جایگشت متفاوت برای رئوس روی خط طرح پشته خواهیم داشت که هر کدام را بررسی می‌کنیم. (شکل۶)

حالت اول: در این حالت فرض می‌کنیم رئوس بصورت $v_1 < v_3 < v_4 < v_2$ بر روی خط طرح پشته قرار گرفته‌اند. می‌دانیم رئوس v_1 و v_3 رأس‌های میانی هستند و باید مسیری از این رئوس به رأس ابتدایی v_0 وجود داشته باشد، اما همانطور که در شکل مشخص است، بدلیل وجود تنها یک پشته و بسته شدن تمام مسیرها چنین مسیری برای رأس v_3 نمی‌تواند وجود داشته باشد، بنابراین فرض خلف تناقض دارد و برخورد یال‌ها در این حالت ممکن نمی‌باشد. (شکل۷)



شکل ۶. عدم وجود برخورد بین یال‌های بین سطحی



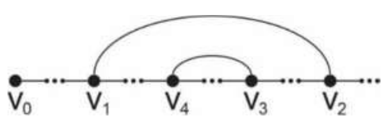
شکل ۷. طرح پشته‌ی حالت اول

حالت دوم: در این حالت فرض می‌کنیم رئوس بصورت $v_1 < v_4 < v_3 < v_2$ بر روی خط طرح پشته قرار گرفته‌اند. از آنجاییکه باید مسیری از رئوس میانی به رأس ابتدایی v_0 وجود داشته باشد، اما همانطور که در شکل مشخص است، چنین مسیری برای رأس v_1 وجود ندارد، بنابراین فرض خلف تناقض دارد و برخورد یال‌ها در این حالت نیز ممکن نمی‌باشد. (شکل۸)

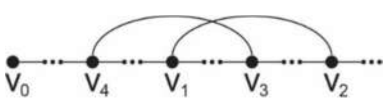
حالت سوم: در این حالت فرض می‌کنیم رئوس بصورت $v_4 < v_1 < v_3 < v_2$ بر روی خط طرح پشته قرار گرفته‌اند. در این حالت یال‌های e_1 و e_2 با یکدیگر برخورد خواهند داشت، بنابراین فرض خلف تناقض دارد و برخورد یال‌ها در این حالت ممکن نمی‌باشد. (شکل۹)

حالت چهارم: در این حالت فرض می‌کنیم رئوس بصورت $v_4 < v_1 < v_2 < v_3$ بر روی خط طرح پشته قرار گرفته‌اند. در این حالت نیز همانطور که در شکل مشخص است، مسیری از رأس v_1 به رأس v_0 نمی‌تواند وجود داشته باشد، بنابراین فرض خلف تناقض دارد و برخورد یال‌ها در این حالت ممکن نمی‌باشد. (شکل۱۰)

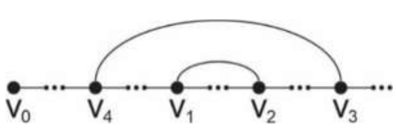
حالت پنجم: در این حالت فرض می‌کنیم رئوس بصورت $v_1 < v_4 < v_2 < v_3$ بر روی خط طرح پشته قرار گرفته‌اند. در این حالت یال‌های e_1 و e_2 با یکدیگر برخورد خواهند داشت، بنابراین فرض خلف تناقض دارد و برخورد یال‌ها در این حالت ممکن نمی‌باشد. (شکل۱۱)



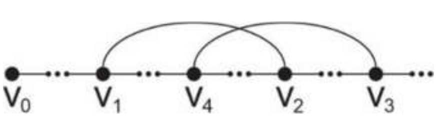
شکل ۸. طرح پشته‌ی حالت دوم



شکل ۹. طرح پشته‌ی حالت سوم



شکل ۱۰. طرح پشته‌ی حالت چهارم



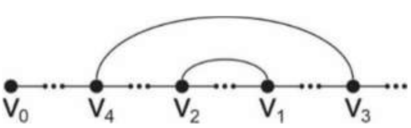
شکل ۱۱. طرح پشته‌ی حالت پنجم

حالت ششم: در این حالت فرض می‌کنیم رئوس بصورت $v_4 < v_2 < v_1 < v_3$ بر روی خط طرح پشته قرار گرفته‌اند. در این حالت نیز همانطور که در شکل مشخص است، مسیری از رأس v_1 به رأس v_0 نمی‌تواند وجود داشته باشد، بنابراین فرض خلف تناقض دارد و برخورد یال‌ها در این حالت ممکن نمی‌باشد. (شکل۱۲)

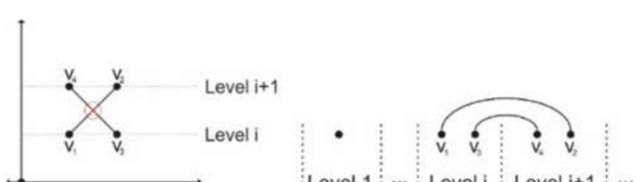
بنابراین اثبات گشت در محور مختصات دو بعدی هیچ دو یال بین سطحی‌ای با یکدیگر مگر در نقاط رئوس برخوردی نخواهند داشت. با توجه به نحوه‌ی چیدمان رئوس بر روی خط طرح صف، بدلیل آنکه در ابتدا رئوس با عدد سطح کمتر قرار می‌گیرند، دو یال بین سطحی تنها در صورتی همدیگر را پوشش می‌دهند که در محور مختصات دو بعدی همدیگر را در نقطه‌ای غیر از رئوس قطع نمایند و با توجه به این که اثبات شد چنین برخوردی نمی‌تواند وجود داشته باشد و همچنین تمام یال‌های بین سطحی به صف ۲ اختصاص یافته‌اند، نتیجه می‌گیریم این صف معتبر بوده و از قانون اولین ورودی، اولین خروجی پیروی می‌نماید. (شکل۱۳)

حال برای اثبات معتبر بودن صف ۱ به بررسی یال‌های درون این صف می‌پردازیم. با توجه به این که تنها یال‌هایی در این صف قرار می‌گیرند، که رئوس ابتدایی و انتهایی آن‌ها مولفه‌ی Y مشابهی داشته باشند و رئوس با مولفه‌ی Y یکسان بر روی خط طرح صف بطور متوالی قرار می‌گیرند، بنابراین یال‌های رئوس با مولفه‌های Y متفاوت همپوشانی نخواهند داشت و کافیست تنها برای یال‌های متصل کننده رئوس با عدد سطح i ثابت کنیم، یال‌های اتصال بین رئوس با یک عدد سطح دلخواه با یکدیگر همپوشانی ندارند. با توجه به نحوه‌ی چیدمان رئوس بر روی خط طرح صف، می‌دانیم ترتیب رئوس با مولفه‌ی Y یکسان نسبت به یکدیگر با ترتیب آن‌ها در خط طرح پشته‌ی داده شده یکسان و مشابه می‌باشد.

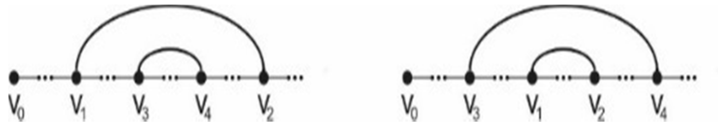
حال مجدد از روش برهان خلف برای اثبات درستی این بخش از الگوریتم استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم دو یال $e_1 = (v_1, v_2)$ و $e_2 = (v_3, v_4)$ با یکدیگر در طرح صف همپوشانی دارند. فرض می‌کنیم عدد سطح رئوس بصورت $v_1<v_2$ و $v_3<v_4$ باشد، همانند قبل در یک گراف همبند از هر رأس میانی به رأس ابتدایی باید مسیری وجود داشته باشد، اما همانطور که در شکل مشخص است، در هر دو حالت جایگشت برای رئوس v_1 و یا v_3 مسیری به رأس v_0 نمی‌تواند وجود داشته باشد. بنابراین فرض خلف تناقض دارد و نتیجه می‌گیریم هیچ دو یالی در صف اول وجود ندارد که همپوشانی داشته باشند و صف اول نیز از قانون اولین ورودی، اولین خروجی پیروی کرده و برای گراف معتبر می‌باشد. (شکل۱۴)



شکل ۱۲. طرح پشته‌ی حالت ششم



شکل ۱۳. عدم وجود همپوشانی در صف دوم



شکل ۱۴ دو جایگشت ممکن برای دو یال e_1 و e_2

همینطور با توجه به الگوریتم و نحوه‌ی ساخت طرح صف گراف تمام رئوس دقیقا یک بار بر روی خط طرح صف قرار می‌گیرند، بنابراین با توجه به اینکه درستی هر دو صف اثبات شد، نتیجه می‌گیریم طرح صف که توسط الگوریتم ارائه شده ایجاد شده است طرحی معتبر و درست برای گراف می‌باشد.

۵- نتیجه‌گیری و کارهای آتی

الگوریتم حاصل از پژوهش، با دریافت یک طرح ۱ پشته از یک گراف، و تغییر چیدمان رئوس بر روی خط و اختصاص یال‌ها با توجه به ویژگی‌های آن‌ها، به طرحی صحیح متشکل از ۲ صف برای گراف دست می‌یابد. در این الگوریتم برخلاف کارهایی که در گذشته انجام شده است، سعی بر تبدیل طرح ۱ پشته به گراف و سپس بهره بردن از ویژگی‌های آن گراف و رسم یک طرح ۲ صف نمی‌باشد، بلکه طرح ۱ پشته بدون توجه به خود گراف اصلی، مستقیما تبدیل به طرح ۲ صف می‌گردد. بنابراین این روش برای تبدیل طرح‌هایی که اطلاعاتی در مورد گراف‌های آن‌ها نداریم، بسیار کارآمد بوده و ممکن است در یافتن عدد صف و یا پشته‌ی متناهی و یا بهبود آن‌ها برای دسته‌هایی از گراف‌ها مفید باشد.

در روش‌های گذشته برای تبدیل طرح‌ها به یکدیگر هدف یافتن عدد صف نبوده و با اطلاع از عدد صف و عدد پشته‌ی مشخص برای گراف و همچنین ویژگی‌های چنین گراف‌هایی، اقدام به تبدیل طرح‌ها صورت پذیرفته است و یا به عبارت دیگر طرح ۱ پشته با استفاده از اطلاعات گذشته، تبدیل به گراف شده و با استفاده از خصوصیات گراف و روش‌های اثبات شده طرح آن با ۲ صف بدست آمده است.

عدد صف یافت شده برای گراف‌های مسطح دوبخشی[25] در سال ۲۰۲۰ برابر ۳۱ اعلام و اثبات شد، با در نظر داشتن عدد پشته‌ی ۲ برای همین دسته از گراف‌ها، حد بالایی ۳۱ برای عدد صف آن‌ها کمی دور از انتظار بنظر می‌رسد و امید می‌رود بتوان طرح پشته‌ی این دسته از گراف‌ها را، با الگوریتم مشابهی به طرح صف با تعداد کمتری از صف تبدیل کرد. همچنین عدد پشته و صف گراف‌های مسطح نیز با یکدیگر اختلاف معنا داری داشته و حد پایینی برای این دسته از گراف‌ها فاصله زیادی با حد بالایی دارد، حدس ما بر این است که می‌توان با روشی مشابه این اختلاف را با یافتن حد پایینی و یا بالایی بهتر کاهش داد.

مسائلی که مرتبط با موضوع این پژوهش می‌باشند اما جوابی تاکنون برای آن‌ها بیان نشده است، به شرح زیر می‌باشد:

۱. حد بالایی برای عدد پشته‌ی گراف‌های مسطح دوبخشی برابر ۲ می‌باشد و کوچک‌ترین حد بالایی اثبات شده تاکنون برابر ۳۱ می‌باشد، آیا می‌توان الگوریتمی ارائه کرد که طرح پشته‌ی یک گراف دوبخشی مسطح را با استفاده از تعداد کمتر از ۳۱ عدد صف به طرح صف معادل تبدیل کرد؟

۲. حد بالایی برای عدد پشته‌ی گراف‌های مسطح برابر ۴ و بهترین حد بالایی صف برابر ۴۹ می‌باشد، الگوریتمی برای تبدیل طرح پشته‌ی این دسته از گراف‌ها به طرح صف معادل با استفاده از تعداد کمتری صف وجود دارد؟

۳. آیا می‌توان بدون در نظر گرفتن دسته‌ی گراف و تنها با در نظر داشتن تعداد پشته‌ی طرح داده شده،

[25] Bipartite planar

طرح صفی معتبر با تعداد صف مضرب ثابت از تعداد پشته‌ی استفاده شده در طرح داده شده ایجاد کرد؟

۴. الگوریتمی را می‌توان ارائه کرد که تمام طرح‌های پشته را به صورت بهینه و بدون محدودیت به طرح صف معتبر و معادل تبدیل نماید؟

۵. آیا می‌توان الگوریتم مشابهی را برای مفاهیم عدد پشته محلی و عدد صف محلی نیز بیان نمود و برای یک گراف طرح‌های آن‌ها را به یکدیگر تبدیل کرد؟

فهرست منابع

[1] Bekos, M. A., Kaufmann, M., Klute, F., Pupyrev, S., Raftopoulou, C., & Ueckerdt, T. (2020). Four Pages Are Indeed Necessary for Planar Graphs. arXiv preprint arXiv:2004.07630.

[2] Dujmović, V., Joret, G., Micek, P., Morin, P., Ueckerdt, T., & Wood, D. R. (2020). Planar graphs have bounded queue-number. Journal of the ACM (JACM), 67(4), 1-38.

[3] Merker, L., & Ueckerdt, T. (2020). The Local Queue Number of Graphs with Bounded Treewidth. arXiv preprint arXiv:2008.05392.

[4] Pupyrev, S. (2017, September). Mixed linear layouts of planar graphs. In International Symposium on Graph Drawing and Network Visualization (pp. 197-209). Springer, Cham.

[5] Dujmović, V., & Frati, F. (2016, September). Stack and queue layouts via layered separators. In International Symposium on Graph Drawing and Network Visualization (pp. 511-518). Springer, Cham.

[6] Wiechert, V. (2016). On the queue-number of graphs with bounded tree-width. arXiv preprint arXiv:1608.06091.

[7] Dujmović, V. (2015). Graph layouts via layered separators. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 110, 79-89.

[8] Di Battista, G., Frati, F., & Pach, J. (2013). On the queue number of planar graphs. SIAM Journal on Computing, 42(6), 2243-2285.

[9] Dujmović, V., & Wood, D. R. (2004). On linear layouts of graphs.

[10] Blankenship, R. L. (2003). Book embeddings of graphs.

[11] Ganley, J. L., & Heath, L. S. (2001). The pagenumber of k-trees is O (k). Discrete Applied Mathematics, 109(3), 215-221.

[12] Heath, L. S., & Rosenberg, A. L. (1992). Laying out graphs using queues. SIAM Journal on Computing, 21(5), 927-958.

[13] Yannakakis, M. (1989). Embedding planar graphs in four pages. Journal of Computer and System Sciences, 38(1), 36-67.

[14] Heath, L. S. (1987). Embedding outerplanar graphs in small books. SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods, 8(2), 198-218.

[15] Buss, J. F., & Shor, P. W. (1984, December). On the pagenumber of planar graphs. In Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing (pp. 98-100).

[16] Heath, L. (1984, October). Embedding planar graphs in seven pages. In 25th Annual Symposium onFoundations of Computer Science, 1984. (pp. 74-83). IEEE.

[17] Rosenberg, A. L. (1983). The Diogenes approach to testable fault-tolerant arrays of processors. IEEE Transactions on Computers,(10),902-910.

[18] Bernhart, F., & Kainen, P. C. (1979). The book thickness of a graph. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 27(3), 320-331.

[19] Ollmann, T., & Ho man, F., & Levow, R., & Thomas, R. (1973). On the book thicknesses of various graphs. Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing. Congressus Numerantium, vol. VIII, (pp. 459)

[20] Tarjan, R. (1972). Sorting using networks of queues and stacks. Journal of the ACM (JACM), 19(2), 341-346.

[21] Persinger, C. A. (1966). Subsets of n-books in E3. Pacific Journal of Mathematics,