دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال نهم، شماره چهل و دوم، خرداد و تیر ۱۴۰۲
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

بررسی نسبت بهینه آموزش بر پایه ریاضی‌کاری و ریاضی‌فهمی به کمک تحلیل پوششی داده‌ها و تقریب چندجمله‌ای درونیاب نوع آموزش

اسماعیل یوسفی[۱]، محسن رستمی مال خلیفه[۲]، محمد مقاصدی[۳*]، محمدحسین بهزادی[۴]

(۱و۲و۴) گروه ریاضی، دانشکده علوم و فناوری‌های همگرا، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
(۳) گروه ریاضی، دانشکده علوم، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۵/۲۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۸/۰۶

چکیده

در این مقاله ابتدا نگاهی کوتاه به مفهوم یادگیری و تاریخچه‌ی یادگیری پرداخته شد، سپس تعریفی برای آموزش به روش ریاضی کاری و آموزش به روش ریاضی فهمی ارائه شد. مراحل یادگیری به صورت اشاره‌وار معرفی شد. ما یادگیری را به صورت دو پالس معرفی کردیم که هر پالس نیز شامل دو مرحله است. پالس اول مربوط به ناتوانی و پالس دوم مربوط به توانایی است. این مراحل را برای آموزش ریاضی با بیان مثال، برای هر مرحله یادگیری مورد بررسی قرار دادیم. برای تعیین نسبت بهینه آموزش به دو روش ریاضی کاری و ریاضی فهمی، ابتدا چهار مثال برای چهار مرحله آموزش طراحی شد، سپس این دو روش برای کلاس‌های مختلف آموزش ریاضی عمومی دانشجویان فنی و مهندسی در دانشگاه آزاد به کار گرفته شد. داده‌های به‌دست آمده را به کمک تحلیل پوششی داده‌ها تحلیل کردیم. ورودی‌ها ریاضی‌کاری و ریاضی‌فهمی است. خروجی‌ها یادگیری در پالس اول و یادگیری در پالس دوم است که در نهایت به نسبت بهینه استفاده از هر دو روش در یک کلاس آموزشی رسیده‌ایم، سپس برای جدول بهینه، با استفاده از درونیابی توابع چندمتغیره، ضابطه‌ای برای دونوع آموزش ارائه دادیم که به صورت یک تابع دومتغیره است. در این تابع، دامنه درصد آموزش به هر دو روش است و برد کارایی است. در نهایت از روی ضابطه تابع و یا نمودار تابع می‌توان تعیین کرد نسبت آموزش به هر دو روش بیان شده، چقدر کارایی دارد.

واژه‌های کلیدی: یادگیری، ناتوانی ناآگاهانه، ناتوانی آگاهانه، توانایی آگاهانه، توانایی ناآگاهانه، ریاضی‌کاری، ریاضی‌فهمی، نسبت بهینه، تحلیل پوششی داده‌ها، درونیابی، تقریب توابع، چند متغیره.

---

* عهده‌دار مکاتبات: Email: savizasadi@pnu.ac.ir

۱- مقدمه

یادگیری یکی از مهمترین موضوع آموزش است که تا چند دهه قبل، زیاد جدی گرفته نمی‌شد و به عنوان یک مهارت مورد توجه نبود. اما اکنون بیشتر به اهمیت یادگیری پی‌برده‌اند. در واقع یادگیری یعنی هم کسب دانش است و هم ایجاد تغییر در رفتار و عواطف با استفاده از آن دانش[۲]. یادگیری در انسان می‌تواند بخشی از فرایند تحصیل، توسعه فردی و تمرینات باشد که ممکن است هدفمند یا به وسیله انگیزش انجام شود[۱]. در واقع اگر یادگیری به تغییر رفتار منتهی نشود، یادگیری اتفاق افتاده نیافتاده است[۳]. مردم و حتی دانشمندان خیال می‌کردند همه چیز به هوش و IQ و استعداد خدادادی بستگی دارد، غافل از آن‌که یادگیری مهم‌تر از هوش و استعداد خدادادی است. یادگیری همان هوش و استعداد نیست. هوش و استعداد فاکتورهای میزان توانایی‌در یک زمینه هستند، اما یادگیری یک فرایند است[۵]. بخش زیادی از مطالعات اولیه درباره یادگیری توسط رفتارگرایان انجام شد. آن‌ها اعتقاد داشتند که پایه اساسی هر نوع یادگیری، روابط ساده‌از نوع شرطی‌سازی است[۹]. هرگنهان و السون گفته‌اند یادگیری یکی از مهم‌ترین زمینه‌ها در روانشناسی امروز و در عین حال یکی از مشکل‌ترین مفاهیم برای تعریف کردن است. روان‌شناسی چون هانس، معتقد بود آن‌چه که به نظر می‌رسد، تابع برنامه زیستی فطری است، می‌تواند تحت تأثیر رویدادهای محیطی قرار گیرد. به اعتقاد بسیاری از پژوهشگران، فرایندهای حافظه جزیی از فرایند یادگیری است و بدون وجود حافظه و مشکل در حافظه، یادگیری رخ نخواهد داد. همچنین یادگیری می‌تواند تغییرات رفتاری باشد و نمود رفتاری داشته باشد[۶]. در صورتی که فرایندهای حافظه کاملا ذهنی هستند. یادگیری به معنای متصل کردن تجربه‌های جدید به دانسته‌ها و تجربه‌های پیشین است. از سوی دیگر، کلاود برنارد بیان می کند که دانسته‌ها مانع یادگیری می‌شوند[۵]. یکی از روش‌هایی که باعث می‌شود تا دانسته‌های قبلی مانعی بر سر راه یادگیری ما نباشند، این است که تمرین کنیم تا حد امکان موقع یادگیری، پیش‌داوری، تجزیه و تحلیل و قضاوت نکنیم[۸]. مثلا اگر داریم موضوع جدیدی را یاد می‌گیریم و می‌خوانیم، وقتی مطلبی که خواندیم تمام شد، آن زمان در موردش فکر کنیم و مصداق پیدا کنیم. اگر دیدیم موضوعات و کتاب‌هایی که می‌خوانیم، در جهت تایید دانسته‌ها و باورهای قبلی ما هستند، باید بررسی کنیم که آیا واقعا داریم یاد می‌گیریم یا در یک دور باطل قرار گرفته‌ایم؟

ما یادگیری به زبان ساده به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

یادگیری تغییر نسبتاً پایداری است که بر اساس تجربه ایجاد می‌شود.

یادگیری دارای مفهوم بسیار گسترده‌ای است که به شکل‌های دگرگونی، عادت‌شکنی، ایجاد علاقه، نگرش‌های نو، درک ارزش و پیش‌داوری نمایان می‌شود. شیوه ترکیب و کاربرد معلومات در استدلال، تفکر، نظریه‌پردازی، حل مساله، احساس و دگرگونی‌هایی که در کل شخصیت به وجود می‌آیند همه از یادگیری نشات می‌گیرد[۱۲]. اما ادوارد تولمن (Edward Tolman) بین عملکرد و یادگیری تمایز قائل شد. وی با طرح مفهوم یادگیری نهفته(Latent learning)، بیان داشت که یادگیری ممکن است بلافاصله خود را در عملکرد فرد نشان ندهد[۶]. برخی یادگیری را دگرگونی‌های نسبتا پایدار در توانایی، گرایش یا ظرفیت پاسخ‌دهی بیان می‌کنند. در این نوع نگرش، یادگیری پیش از تغییر رفتار پدید می‌آید[۱۹]. یادگیری دارای انواعی مختلفی است که یکی از آنها، یادگیری از طریق بینش یا بصیرت (Insight Learning) است. این نوع یادگیری زمانی صورت می‌گیرد که یادگیرنده چگونگی روابط اجزاء یا عناصر موجود در یک پدیده

را درک نموده و نسبت به کل مجموعه اشراف پیدا کند. این نوع یادگیری مؤثرترین و پایدارترین نوع یادگیری است. در این نوع یادگیری، یادگیرنده با ادراک دقیق پدیده‌ها و شناخت روابط میان اجزا و یا عناصر یک پدیده، فرصت کشف و آفرینندگی ذهنی را می‌یابد[۷]. این نوع یادگیری در آموزش ریاضیات بسیار مهم است. اختلاف میان مهارت‌های الگوریتمی و شناخت ادراکی عمیق از فرایند آموزش، جای خالی روش‌هایی برای ایجاد روابط درونی، برنامه‌ریزی شده بین مفاهیم و الگوریتم‌ها را برجسته می‌کند. اتصال و ارتباط مفاهیم ریاضی با یکدیگر و کاربرد آنها در حل مسائل، زمینه‌ی سازماندهی ذهنی و تشکیل طرحواره های مناسب در ذهن یادگیرندگان را فراهم می‌کنند. تفاوت میان انجام ریاضی و یادگیری مفهومی آن باعث می‌شود تا یادگیرندگان توانایی شناخت مفاهیم و کاربرد آنها در موقعیت‌های مختلف را داشته باشند[۳].

۲- مراحل یادگیری

ما یادگیری را به دو پالس ناتوانی و توانایی دسته‌بندی می‌کنیم که هر پالس شامل دو مرحله است. بنابراین یادگیری چهار مرحله دارد.

پالس اول		پالس دوم	
مرحله اول: ناتوانی ناآگاهانه	مرحله دوم: ناتوانی آگاهانه	مرحله سوم: توانایی آگاهانه	مرحله چهارم: توانایی ناآگاهانه

۲-۱. ناتوانی ناآگاهانه

در این مرحله فرد توانایی انجام مهارت را ندارد و البته نمی‌داند که این توانایی را ندارد، در واقع نمی‌داند که نمی‌داند. این بدترین مرحله برای یادگیرنده است، زیرا خیال می‌کند که کارش خوب است و نمی‌داند که بسیاری از نکات را بلد نیست و یا تسلط ندارد. در واقع نمی‌داند که چه چیزی را نمی‌داند و باعث می‌شود فرد سمت یادگیری نرود.

به عنوان مثال کودکی را در نظر بگیرید که فکر می‌کند می‌تواند راه برود یا فکر می‌کند، که می‌تواند خودش با قاشق خودش غذا بخورد چون می‌بیند همه این کار را به راحتی انجام می‌دهد[۳].

در آموزش ریاضی، این مرحله می تواند به صورت زیر ظاهر شود. فرض کنید از دانشجو خواسته می شود در مورد همگرایی یا واگرایی انتگرال زیر بحث کنید.

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x}{x^2-1}\,dx$$

در این مرحله یادگیری، دانشجو تصور می‌کند با انتگرال تابع فرد در بازه متقارن روبه‌رو شده است، پس نتیجه می‌گیرد جواب انتگرال صفر است و می‌نویسد انتگرال همگراست. در واقع دانشجو ناتوانی ناآگاهانه در مبحث انتگرال ناسره دارد، یعنی "نمی‌داند که نمی‌داند" ابتدا باید رفتار تابع را از نظر پیوستگی در بازه انتگرال‌گیری بررسی کند.

۲-۲. ناتوانی آگاهانه

این مرحله فرد توانایی انجام مهارتی را ندارد ولی متوجه می‌شود که این توانایی را ندارد، در واقع "می‌داند که نمی‌داند". فرد این مرحله آگاه می‌شود که باید مهارت‌های خود را بهبود ببخشد و برای این کار اقدام می‌کند. در این مرحله احساس نیاز به یادگیری در فرد پدیدار می‌شود. مثل کسی که متوجه می شود برای یادگیری رانندگی نیاز است آموزش ببیند[۲].

این مرحله در آموزش ریاضی برای همان مثال همگرایی یا واگرایی انتگرال، به صورت زیر می‌تواند ظاهر شود:

در این حالت دانشجو متوجه نقاط $x=-1$ و $x=1$ در بازه انتگرال‌گیری می‌شود که ریشه‌های مخرج هستند و نقاط ناپیوستگی مجانبی تابع در فاصله انتگرال‌گیری می‌باشند، از این‌رو به صورت زیر عمل می‌کند:

$$\int_{-1}^{1}\frac{2xdx}{x^2-1}=\int_{-1}^{0}\frac{2xdx}{x^2-1}+\int_{0}^{1}\frac{2xdx}{x^2-1}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{2xdx}{x^2-1}+\lim_{\delta\to0^+}\int_{0}^{1-\delta}\frac{2xdx}{x^2-1}=\lim_{\varepsilon\to0^+}ln|x^2-1|]_{-1+\varepsilon}^{0}+\lim_{\delta\to0^+}ln|x^2-1|]_{0}^{1-\delta}=-\lim_{\varepsilon\to0^+}ln|\varepsilon^2-2\varepsilon|+\lim_{\delta\to0^+}ln|\delta^2-2\delta|$$

و از ادامه حل باز می‌ماند، زیرا با حالت مبهم $\infty-\infty$ روبه‌رو می‌شود و نمی‌تواند رفع ابهام کند، چون متغیرها یکسان نیستند نمی‌تواند از دانسته هایش در مورد محاسبه حد استفاده کند. همان‌طور که می‌بینیم نتوانست جواب مساله را به دست آورد، یعنی "می‌داند که نمی‌داند". در واقع به این بینش می‌رسد که دانش او در مورد انتگرال‌های ناسره کافی نیست، پس به آموزش بیشتر نیاز دارد.

۲-۳. توانایی آگاهانه

در این مرحله فرد توانایی انجام مهارت را با آگاهی به‌دست می‌آورد، در واقع می‌داند که می‌داند. این مرحله، سخت‌ترین مرحله است، زیرا فرد به‌صورت آگانه می‌کوشد تا مهارت را یاد بگیرد و آن را تبدیل به عادت کند و در خیلی مواقع، این مرحله از ادامه دادن و یادگیری یک مهارت بخاطر سخت بودنش انصراف می‌دهد. به عنوان مثال یادگیری رانندگی را در نظر بگیرید، زمانی که در این مرحله قرار می‌گیرد، با رانندگی ارتباط برقرار کرده است، اما بر تمام حرکات خود خودآگاه است و نیاز به تمرکز و تلاش زیادی دارد. در این حالت فکر فرد متمرکز به همان کار خواهد شد و در حین انجام آن کار، دیگر نمی‌تواند به چیز دیگری فکر کند[۲].

در آموزش ریاضی، برای همان مثال انتگرال ناسره، دانشجو به قضایای همگرایی و واگرایی انتگرال‌های ناسره رجوع می‌کند و یاد می‌گیرد که هرگاه در جمع دو انتگرال، یکی از انتگرال‌ها واگرا باشد، انتگرال مورد نظر واگرا خواهد بود. بنابراین انتگرال را به صورت زیر می‌نویسد:

$$\int_{-1}^{1}\frac{2xdx}{x^2-1}=\int_{-1}^{0}\frac{2xdx}{x^2-1}+\int_{0}^{1}\frac{2xdx}{x^2-1}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{2xdx}{x^2-1}+\lim_{\delta\to0^+}\int_{0}^{1-\delta}\frac{2xdx}{x^2-1}$$

در این صورت فقط یکی از حدها را بررسی می‌کند. چون حاصل حد انتگرال اول بی‌نهایت می‌شود نتیجه می‌گیرد انتگرال واگراست. در واقع در این حالت "می‌داند که می‌داند".

۲-۴. توانایی ناآگاهانه

در این مرحله فرد توانایی انجام کار را به دست می‌آورد و آنقدر تمرین کرده است که به صورت ناخودآگاه و از روی عادت به فعالیت می‌پردازد. بنابراین در این مرحله شخص، مهارت را به صورت ناخودآگاه انجام می‌دهد. مانند کسی که به خوبی رانندگی را یاد گرفته است به‌صورت ناخودآگاه رانندگی می‌کند و از رانندگی لذت می برد.

در آموزش ریاضی، مثلا برای همان انتگرال بیان شده، دانشجو با انتگرال ناسره به تعداد زیادی مواجعه شده است و به این بینش رسیده است که هر دو نوع p-انتگرال‌های نوع اول و دوم در حالت p=1 واگرا هستند و این انتگرال را با انتگرال تابع $f(x)=1/x$ همرفتار در نظر می‌گیرد، پس بدون این‌که روی مساله فکر کند به‌صورت ناخودآگاه تشخیص می‌دهد انتگرال واگرا است.

۳- آموزش به دو روش ریاضی کاری و ریاضی فهمی

۳-۱. تعریف ریاضی‌کاری

هر عملی که بر اساس مهارت در یادگیری ریاضی بدون در نظر داشتن مفاهیم انجام شود را ریاضی‌کاری می‌نامیم.

آموزش به روش ریاضی کاری در برگیرنده تمرین و تکرار حل مسائل نمونه است به‌طوری‌که یادگیرنده با مشاهده یک مساله، به حل مسائل شبیه به این مساله و الگوی حل مسائل قبل رجوع می‌کند و برای این مساله، راه حل مسائل پیشین را انجام می‌دهد. در این نوع آموزش بیشتر به مهارت در حل مسئله می‌پردازیم تا این‌که به تحلیل و بررسی در مورد ساختار و نوع مساله و شرایط وجود جواب مساله بپردازیم. مهم‌ترین عامل در یادگیری این نوع آموزش تمرین و تکرار حل مختلف است. در واقع هرگاه تعداد زیادی مساله همسان بدون آن که نکته خاصی در آن لحاظ شود را حل کنیم، یک عمل ریاضی‌کاری انجام داده‌ایم. آموزش به روش ریاضی‌کاری به تقویت مراحل یادگیری کمک می‌کند بنابراین با ایجاد مسائل مختلف در کلاس، به حل مساله مورد نظر خواهیم رسید. در این نوع آموزش، تنوع مسائل زیاد است و باعث می‌شود دانشجو با مسائل متنوعی روبه‌رو شود. پس شیوه‌ای که برای حل یک مساله اتخاذ می‌کنیم، از حل مسائل نمونه قبل استفاده کنیم، نمونه‌ای از یادگیری به روش ریاضی‌کاری است.

به عنوان مثال، انتگرال ناسره بیان شده را در نظر بگیرید. هرگاه دانشجو روش حل مساله را به صورت بیان شده در حالت دوم بنویسد و مانند حالت سوم که بیان شد نتیجه بگیرد انتگرال واگرا است، یعنی ریاضی‌کاری انجام داده است. در حقیت، دانشجو مسائل شبیه به این نوع انتگرال ناسره را قبلا دیده است و با ایجاد شباهت این مسئله با مسائل قبل، توانست جواب این سوال را به دست آورد.

۳-۲. تعریف ریاضی فهمی

هر عملی که بر اساس مفاهیم ریاضی برای یادگیری انجام شود را ریاضی فهمی می‌نامند.

این روش آموزش، بر پایه یادگیری از نوع بینش یا بصیرت صورت می‌گیرد. در این نوع آموزش سعی می‌کنیم یادگیرنده را به سمت درک و فهم ریاضی سوق دهیم به طوری که نسبت به کل مطالب مبحث مورد نظر تسلط پیدا کند. همان‌طور که بیان شد، این نوع یادگیری مؤثرترین و پایدارترین نوع یادگیری است.

به عناون مثال، بررسی همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره را در نظر می‌گیریم. یک دیدگاه ریاضی فهمی برای تدریس این مفهوم مراحل زیر طی می‌شود:

گام اول: انتگرال ناسره چیست؟

گام دوم: همگرایی و واگرایی چیست؟

گام سوم: دسته‌بندی انتگرال های ناسره از نوع اول، دوم، سوم.

گام چهارم: دسته‌بندی انتگرال ناسره های خاص مانند p – انتگرال، انتگرال نمایی یا هندسی و ...

گام پنجم: قضایای مر بوط به همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های ناسره

گام ششم: حل مسائل نمونه

روش اجرا

برای اجرای روش، یازده کلاس درس ریاضی عمومی ۱ دانشجویان فنی و مهندسی دانشگاه‌های هم سطح استان تهران و استان البرز را در نظر گرفتیم. در هر کلاس ۲۰ دانشجو را با استفاده از پیش آزمون که در یک سطح علمی یکسان بودند، انتخاب کردیم. با استفاده از آزمون کولموگروف اسپیرونوف (Kolmogorov–Smirnov *test*)، نرمال بودن داده‌ها را بررسی شد. به کمک آزمون آنالیز واریانس آزمون تحلیل واریانس (ANOVA) بررسی شد که نمرات کلاس‌ها از نظر عملکرد در یک سطح هستند و نتیجه شد که میانگین نمره پیش آزمون اختلاف معناداری ندارد. اساتید به گونه ای انتخاب شدند که سابقه تدریس یکسان داشته باشند، از مراجع تدریس یکسان استفاده کنند، نوع مدرک تحصیلی و نوع آموزش یکسان باشد. آموزش در کلاس‌های دانشگاه، با نسبت‌های مختلف آموزش به روش ریاضی‌کاری و آموزش به روش ریاضی‌فهمی

انجام شد. مثلا در یک کلاس صفر درصد آموزش به روش ریاضی‌کاری و ۱۰۰ درصد آموزش به روش ریاضی‌فهمی، در کلاس دیگر، ۱۰ درصد آموزش بر مبنای ریاضی‌کاری و ۹۰ درصد آموزش بر مبنای ریاضی‌فهمی، و به همین ترتیب نهایتا، در کلاس آخر، ۱۰۰ درصد آموزش بر مبنای ریاضی‌کاری و صفر درصد آموزش بر مبنای ریاضی‌فهمی انجام شد. برای ارزشیابی در هر مرحله آموزش، چهار سوال از هر چهار رده طراحی شد. جواب‌هایی را برای نتیجه‌گیری مورد قبول قرار دادیم که روش حل مربوط‌به‌آن رده باشد. به‌عنوان نمونه، چهاررده سوال ازمبحث انتگرال معین به صورت زیر طراحی شد.

مثال نمونه۱-۴. حاصل هر یک از انتگرال‌های زیر را بیابید.

$$\int_{-1}^{1}[2x]dx$$
$$\int_{0}^{1}x^3e^{x^2}dx$$
$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$$
$$\int_{-1}^{1}(2+x)\sqrt{1-x^2}dx$$

در قسمت (۱) دانشجویی که ناتوانایی ناآگاهانه دارد، جواب را به صورت زیر می‌نویسد:

$$\int_{-1}^{1}[2x]dx=\int_{-1}^{0}-1dx+\int_{0}^{1}0dx$$
$$=-x|_{-1}^{0}=1$$

می‌نویسد که اشتباه است. در واقع این سوال برای حالت ریاضی فهمی است. اگر دانشجو مفهوم جزء صحیح را درست درک نکرده باشد انتظار چنین جوابی را داریم. در حقیقت دانشجو باید عبارت داخل جزء صحیح را بین دو عدد متوالی قرار می‌داد و از آن‌جا متوجه می‌شد که می‌بایست انتگرال را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کرد:

$$\int_{-1}^{-1/2}-2dx+\int_{-1/2}^{0}-1dx$$
$$+\int_{0}^{1/2}0dx+\int_{1/2}^{1}1dx$$

در قسمت (۲) دانشجویانی که ناتونایی آگاهانه دارند، دو دسته راه حل ارائه می‌دهند. یک دسته از دانشجویان با استفاده از روش تغییر متغیر راه حل زیر را می نویسید و متوجه می‌شود که با این روش نمی‌تواند مساله را حل کند.

$$u=x^3, du=3x^2dx$$

دسته دوم از روش جزءبه‌جزء استفاده می‌کنند و راه حل زیر را ارائه می‌دهند و از ادامه حل باز می‌مانند.

$$u=x^3, du=3x^2dx,$$
$$dv=e^{x^2}, v=?$$

در واقع دانشجو باید ابتدا تغییر متغیر $\mathrm{x}^2=t$ استفاده کند و انتگرال را به‌صورت $\int_0^1 te^tdt$ تبدیل کند سپس با استفاده از روش جزءبه‌جز جواب را به‌دست می‌آورد.

در قسمت (۳) دانشجویی که توانایی آگاهانه دارد، ابتدا به زوج بودن تابع زیر علامت انتگرال توجه می‌کند و انتگرال را به‌صورت $2\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ بازنویسی می‌کند. با توجه به روابط بین توابع مثلثاتی، قرار می‌دهد $x=sin\,\theta$ یا $x=cos\theta$.

در واقع این نوع سوال هر دو نوع آموزش ریاضی کاری و ریاضی فهمی را شامل می شود، زیرا دانشجو از یک سو باید با مفاهیم توابع مثلثاتی آشنا باشد و بتواند مقادیر توابع مثلثاتی را به ازای مقادیر حدهای انتگرال تعیین کنید(ریاضی فهمی)، از سوی دیگر باید مسائل این چنینی را قبلا حل کرده باشد (ریاضی کاری).

در قسمت (۴) دانشجویی که توانایی ناآگاهانه دارد، به صورت ناخوآگاه جواب π می‌نویسد، زیرا به صورت ناخوداگاه مفهوم انتگرال را وقتی تابع زیر علامت انتگرال در فاصله انتگرال‌گیری مثبت است مساحت مدنظر قرارمی‌دهد، از طرفی جواب انتگرال تابع فرد در بازه متقارن را صفر در نظر می‌گیرد،

بنابراین جواب را به‌صورت زیر در ذهن خود می‌نویسد:

$$\int_{-1}^{1}(2+x)\sqrt{1-x^2}dx$$
$$= 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx +$$
$$\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}dx$$

$= 2($مساحت نیم دایره شعاع یک$)+0=\pi$

نتایج آزمون‌ها در جدول گردآوری شدکه هر دو حالت آموزش به روش ریاضی‌کاری و آموزش به روش ریاضی‌فهمی در جدول ۱ نشان داده شد. در این جدول، ستون اول نوع کلاس‌های آموزشی بیان شده است. ستون دوم، نسبت آموزش ریاضی به روش ریاضی کاری در یازده کلاس مختلف دانشگاه است. ستون سوم نسبت آموزش ریاضی به روش ریاضی فهمی است. ستون‌های ۶،۵،۴ و ۷ به ترتیب میانگین پاسخ صحیح از ۲۰ دانشجوی هرکلاس برای چهار رده سوال‌های مطرح شده است.
با استفاده از مدل CCR مضربی ماهیت خروجی، در تحلیل پوششی داده ها، مورد ارزیابی عملکرد قرار گرفت. مدل CRR از معروف‌ترین مدل‌ها در تحلیلی پوششی داده می‌باشد به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \max \quad & \varphi \\ \text{s.}t. \quad & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} \le x_{io} \qquad i=1,\dots,m \\ & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} \ge \varphi y_{ro} \qquad r=1,\dots,s \\ & \lambda_j \ge 0 \end{aligned}$$

با توجه به ورودی و خروجی‌های (داده های مسئله) که ورودی به دو بخش ریاضی کاری و ریاضی فهمی طبقه‌بندی شده‌اند و به‌صورت درصد می‌باشد از این مدل برای بررسی ارزیابی عملکرد داده‌ها استفاده شد. به عنوان مثال، ریاضی فهمی ۱۰ درصد باشد آنگاه ریاضی کاری ۹۰ درصد می‌باشد. پس می‌توان مجموع ریاضی فهمی و ریاضی کاری را ۱ در نظر گرفت. بنابراین با توجه به این موضوع، استفاده از مدل CCR ماهیت ورودی مفید فایده نخواهد شد، به همین منظور از مدل CCR ماهیت خروجی استفاده شد. منظور از خروجی‌ها در این مقاله نتایج و دست آوردهای دانش‌آموختگان از آزمون می‌باشد که نهایتاً یادگیری را مورد بررسی قرار می‌دهد.
از نکات حائز اهمیت در انتخاب این مدل برای ارزیابی عمکرد ۱۱ کلاس آموزش درس ریاضی عمومی ۱ این است که، (۱) همه دانش آموختگان کنار هم مورد ارزیابی قرار می‌گیرند، فقط با یک معیار معدل، تراز و غیره مورد ارزیابی قرار نخواهند گرفت. (۲) بررسی می‌کنیم که هر دانش آموخته در کدام آزمون به چه میزان فعالیت و یا درک مناسب نسبت به آن مبحث را نداشته است. پس می توان نقاط ضعف دانش آموخته را یافته و آن را تقویت کرد. (۳) ایرادی در معدل و تراز وجود دارد در این نوع ارزیابی وجود ندارد چون‌که در معدل‌گیری یا ترازبندی شاید سوالات به گونه طراحی شده باشد که هیچ یک از دانش آموختگان به معدل یا تراز مناسب نرسیده باشد، ولی در این مدل تمامی دانش‌آموختگان با هم تحت ارزیابی قرار می‌گیرند به‌طوری که بهترین و بدترین نتیجه از بین افرادی که در آزمون شرکت کرده‌اند یافت می‌شود نه صرفا درصد جواب‌های صحیح یک دانش‌آموخته. نتایج بدست آمده از این مدل مربوط تمام دانش آموختگان در شرایط یکسان می‌باشد.
نتایج به دست آمده از مدل فوق مقادیری بیشتر ۱ خواهد داد که با معکوس کردن آنها از مدل CCR مضربی، ماهیت خروجی جدول نتایج در بازه بین ۰ تا ۱ قرار خواهد گرفت و چون نتایج در یک بازه کراندار بین ۰ تا ۱ محدود میشود، نتایج خیلی شفاف‌تر خواهد بود. لازم به ذکر است که کارایی ۱ بهترین و کارایی صفر بدترین می‌باشد.
در جدول ۱ تعداد دانشجویانی که به سوالات پاسخ درست داده‌اند به هر دو روش آموزش ریاضی کاری

و ریاضی فهمی برای چهار رده سوال نشان داده شده است. پاسخ‌های درست دانشجویان برای آموزش با درصدهای متفاوت آموزش ریاضی کاری و آموزش ریاضی فهمی را به همراه ارزیابی عملکرد با استفاده تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) نشان دادیم.
با توجه به نتایج به دست آمده از ارزیابی عملکرد دانشجویان این مهم دست یافته شد که آموزش در حالتی که ۷۰٪ ریاضی کاری و ۳۰٪ ریاضی فهمی است، کارایی ۰.۹۸ دارد، یعنی بهترین عملکرد را بین یازده کلاس داشته‌اند.
اکنون می‌خواهیم با استفاده از درونیابی توابع دومتغیره، تقریبی برای تابع آموزش به دو روش ریاضی‌کاری و ریاضی‌فهمی ارائه دهیم به‌طوری‌که ورودی نسبت آموزش به دو روش بیان شده و خروجی کارایی باشد. این تقریب به ما کمک کند تا اگر آموزش را مثلا به نسبت ۶۵٪ ریاضی‌کاری و ۳۵٪ ریاضی فهمی در نظر بگیریم، چه انتظاری در

یادگیری خواهیم داشت. از روش درونیابی شپارد برای تقریب تابع استفاده کردیم. درونیابی شپارد یک روش کلی برای درونیابی توابع چند متغیره است. فرض کنید نقاط گره‌ای متمایز

$$p_i = (x_i, y_i), \quad 1 \le i \le n$$

مقادیر $f(p_i)$ را تولید کرده باشند، در واقع تابع $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ را باید تعیین کنیم که نقاط p_i را تبدیل به $f(p_i)$ کند.

تابع حقیقی $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ تحت شرط زیر در نظر بگیرید:

$$\varphi(p, q) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = q$$

که در آن p و q برای نمایش عناصر در $\mathbb{R}^2$ استفاده کردیم. در این صورت چند جمله‌ای درونیاب شپارد به صورت زیر است.

$$F(p) = \sum_{i=1}^{n} f(p_i) u_i$$

که

$$u_i(p) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\varphi(p, p_j)}{\varphi(p_i, p_j)}, \qquad 1 \le i \le n$$

جدول ۱. جدول فراوانی پاسخ صحیح تعداد دانشجویان در هر کلاس به آزمون‌ها به هر دو روش آموزش ریاضی کاری و ریاضی فهمی برای چهار رده سوال به همرا ارزیابی عملکرد با استفاده از DEA.

DMU	ریاضی کاری	ریاضی فهمی	سطح۱	سطح۲	سطح۳	سطح۴	DEA
۱	۰٪	۱۰۰٪	۱۶	۹	۷	۱۵	0.6601
۲	۱۰٪	۹۰٪	۱۵	۹	۸	۱۶	0.7015
۳	۲۰٪	۸۰٪	۱۶	۱۲	۱۱	۱۵	0.7317
۴	۳۰٪	۷۰٪	۱۵	۱۲	۱۲	۱۶	0.7676
۵	۴۰٪	۶۰٪	۱۵	۱۴	۱۳	۱۶	0.7721
۶	۵۰٪	۵۰٪	۱۴	۱۳	۱۳	۱۴	0.7901
۷	۶۰٪	۴۰٪	۱۶	۱۵	۱۴	۱۵	0.7645
۸	۷۰٪	۳۰٪	۱۸	۱۷	۱۷	۱۹	0.9828
۹	۸۰٪	۲۰٪	۱۵	۱۵	۱۸	۱۸	0.9741
۱۰	۹۰٪	۱۰٪	۱۴	۱۶	۱۷	۱۸	0.9650
۱۱	۱۰۰٪	۰٪	۱۴	۱۵	۱۸	۱۷	0.9516

حال اگر $\varphi(\mathrm{p},\mathrm{q}) = \|p-q\|^2$ در نظر بگیریم، با در نظر گرفتن $p = (x, y)$ و $p_i = (x_i, y_i)$ خواهیم داشت:

$$\varphi(p, p_i) = \|p - p_i\|^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$$

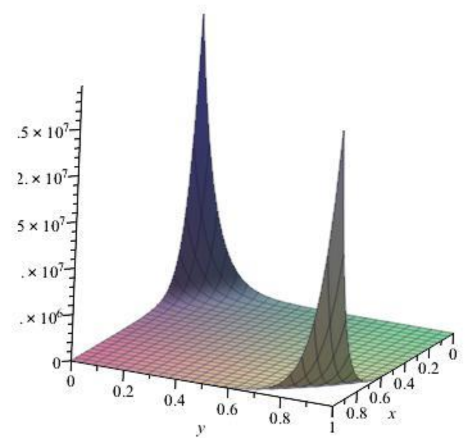
بنابراین چندجمله‌ای درونیاب عبارتست از:

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}{(x_i-x_i)^2+(y_i-y_i)^2}$$

چند جمله درونیاب را با استفاده از برنامه‌نویسی در نرم‌افزار میپل به دست آورده‌ایم که به دلیل طولانی بودن چندجمله‌ای از آوردن آن در این مقاله خودداری کردیم اما نمودار آن را در شکل ۱ نشان دادیم. با توجه به شکل و یا چند جمله درونیاب در می‌یابیم برای آموزش ۶۵٪ ریاضی کاری و 35٪ ریاضی فهمی، کارایی ۰.۸۳۷۶ خواهیم داشت.

نتیجه‌گیری

انتخاب نوع آموزش دروس ریاضی در دانشگاه، خصوصا برای دانشجویان فنی و مهندسی، همواره چالش برانگیز بوده است. اینکه مدرس چه روشی را برای آموزش انتخاب کند بسیار مهم است. روش‌های معمول تدریس در آموزش ریاضی، در بسیاری از موارد با مشکل عدم یادگیری فراگیران مواجعه می‌شود. در این پژوهش، سعی شده تا یک نسبت مشخصی از تدریس به روش ریاضی کاری و تدریس به روش ریاضی فهمی برسیم که در عین نظم بخشی به ذهن یادگیرندگان، نحوه‌ی ارتباط بین مفاهیم ریاضی و کاربرد آنها در حل مسائل، را برای آنها مشخص کنیم. استفاده از هر دو روش ریاضی کاری و ریاضی فهمی در تدریس، می‌تواند تأثیر مثبتی در ارتقاء درک مفهومی یادگیرندگان داشته باشد. در واقع آموزش به نسبت درست و دقیق از هر دو روش ریاضی کاری و ریاضی فهمی، تأثیر بسیار مهمی در یادگیری فراگیران دارد. با توجه به نتایج به دست آمده از ارزیابی عملکرد دانشجویان، نسبت بهینه استفاده از هر دو روش ریاضی کاری و ریاضی فهمی برای دانشجویان فنی و مهندسی در درس ریاضی عمومی ۱، به صورت ۷۰ درصد ریاضی کاری و ۳۰ درصد ریاضی فهمی است. همچنین از روی چندجمله‌ای درونیاب دریافتیم که هرچه نسبت آموزش به ۷۰٪ ریاضی کاری و ۳۰٪ ریاضی فهمی نزدیکتر باشد، روش آموزش کارا خواهد بود.



شکل ۱. نمودار چندجمله درونیاب دو متغیره شپارد برای ورودی دو حالت آموزش و خروجی کارایی.

فهرست منابع

[۱] ع. ا. سیف، روانشناسی پرورشی نوین، ویرایش ششم، تهران، انتشارات دوران ۱۳۸۸.

[۲] کِن کِلمنتس، نرِیدا اف. اِلرتون، ترجمه: امیر حسین آشنا، پژوهش در آموزش ریاضی، گذشته، حال و آینده.

[۳] مریم عطاری دزفولی، هوشنگ اکبری، اسماعیل یوسفی، کاربرد نقشهی مفهومی و نمودار Vee در تعیین حجم با استفاده از انتگرا ل. دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات پژوهش‌های نوین در ریاضی، JNRM ،http://jnrm.srbiau.ac.ir, 33-40

[4] A Anderson, WT Seah, (2013). Facilitating mathematics Learning in different contexts: The values perspective, proceedings of the seventh International mathematics education and society conference (MES7), 193- 202, Africa.

[5] A Barzegarinegad, G Jahanshahloo, M Rostamy-Malkhalifeh, (2014). A full ranking for decision making units using ideal and anti-ideal points in DEA, The Scientific World Journal 2014.

[6] A Bishop, (2007). values in mathematics and science education. Mathematician and de Mathematician. social philosophical, and educational ramifications, 123-139. Rotterdam, The Netherlands, sense publishers

[7] A Bishop, Mathematical enculturation. A cultural perspective on mathematics education. Boston, MA. Kluwer Academic publishers.

[8] A Loukas & SH Robinson, (2004). examining the Moderating Role of perceived school climate in Eerty Adolescent Adjustment, Journal of Research on Adolescence, 14(2), 209 - 233.

[9] C Papanastasiou, (2000). Effects of Attitudes and Beliefs on mathematics achievement, studies in Educational Evaluation, 26 (1), 27-42.

[10] D Uzel & SM Uyangor, (2006). Attitudes of 7th class tudent stoward mathematics in realistic mathematics education International Mathematics Forum. 1, No 39, 1951-1959.

[11] E Haghi, M Rostamy-Malkhalifeh, MH Behzadi, A Shahvarani, (2020). Performance evaluation of schools' math education from a cultural, social and economic point of view by data envelopment analysis modeling , Measurement and Control 53 (3-4), 454-460, 2020.

[12] FH Lotfi, M Navabakhs, A Tehranian, M Rostamy-Malkhalifeh, (2007). Ranking bank branches with interval data—the application of DEA. International Mathematical Forum 2 (9), 429-440.

[13] GR Jahanshahloo, F Hosseinzadeh Lotfi, M Rostamy-Malkhalifeh, (2014). Using enhanced Russell model to solve inverse data envelopment analysis problems. The Scientific World Journal 2014.

[14] MH Behzadi, FH Lotfi, N Mahboudi, (2014). The study of teaching effective strategies on student's math achievements, Mathematics Education Trends and Research, academia.edu, 2014, 1-8.

[15] M Rostamy-Malkhalifeh, E Mollaeian,(2012).Evaluating performance supply chain by a new non-radial network

DEA model with fuzzy data, Science 9, 2012

[16] M Van den Heuvel-Panhuizen, (2000). Mathematics education in The Netherlands: A guided tour. Retrieved from http://www.fi.uu.nl/en.

[17] R Puran, MH Behzadi, A Shahvarani, FH Lotfi, (2017). The Effects of Training and Other Factors on Problem Solving in Students. European Journal of Contemporary Education, 2017, 6(3).

[18] S Mafakheri, M Rostamy-Malkhalifeh, A Shahvarani and MH Behzadi, (2013). The study of effect of the main factors on problem solving self-confidence using cooperative learning. Mathematics Education Trends and Research (2013) 1-7.

[19] S Mafakheri, M Rostamy-Malkhalifeh, A Shahvarani, MH Behzadi, (2013). The study of effect of the main factors on problem solving self-confidence using cooperative learning, Mathematics Education Trends and Research Journal 23, 2013.

[20] SS Salout, MH Behzadi, A Shahvarani and M Manuchehri,(2013). Student's conception about the relation of mathematics to real-life, Mathematics Education Trends and Research(2013)1-7.