

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال هشتم، شماره سی و هفتم، مرداد و شهریور ۱۴۰۱

شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

مدل سازی ریاضی جریان سیال و انتقال گرما روی یک سطح کشسان در محیط متخلخل

محمود زرینی*

استادیار گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آیت الله بروجردی، بروجرد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۱۰/۱۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۱۰/۲۷

چکیده

در پژوهش حاضر، جریان سیال و انتقال گرما روی سطح کشسان در محیط متخلخل مورد مطالعه قرار گرفت؛ و یک مدل ریاضی برای معادلات لایه مرزی سطح کشسان آن بر اساس معادلات ناویر-استوکس به صورت معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و شرایط مرزی ارائه گردید؛ که این معادلات با استفاده از تغییر متغیرهای خاصی به شکل معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط مرزی تغییر یافت؛ و با روش عددی پرتابی، شرایط مرزی مدل به شرایط اولیه تبدیل شد. در نهایت، یک جواب تحلیلی برای سرعت جریان سیال به دست آمد و برای یافتن انتقال گرما، معادله انرژی با استفاده از روش عددی رونگ- کوتا حل گردید.

واژه‌های کلیدی: محیط متخلخل، انتقال گرما، سطح کشسانی، روش پرتابی، جریان سیال.

۱- مقدمه

یک محیط متخلخل تشکیل شده از یک سیستم ناهمگن ساخته شده از یک ماتریس جامد با فضای خالی پر شده توسط سیالات می‌باشد. بسترهای ناپیوسته از ذرات کوچک، توری‌های فلزی، شبکه‌های تشکیل یافته از فوم... به دلیل دارا بودن این ویژگی‌ها، مشخصه‌های انتقال حرارتی بسیار خوبی را از یک سو و سبک تر و کم حجم‌تر شدن مبدل‌ها را از سوی دیگر فراهم می‌آورند تحلیل انتقال حرارت در محیط متخلخل در محدوده وسیعی از کاربردها مورد نیاز می‌باشد محیط متخلخل می‌تواند شکل طبیعی (صخره‌ها، ماسه، بسترها، اسفنج‌ها، چوب‌ها) یا ساختگی (گلوله‌های کاتالیتی، فتیله‌ها، عایق‌ها) داشته باشد محیط متخلخل و بررسی پدیده انتقال در آن، جایگاه ویژه‌ای در فناوری و صنعت دارد. این اهمیت باعث شده که در سال‌های اخیر محققان توجه ویژه‌ای را به بررسی پارمترهای تأثیرگذار بر انتقال حرارت در محیط‌های متخلخل داشته باشند. به عنوان مثال کاربردی در زمینه استفاده از محیط متخلخل، می‌توان به مبدل‌های زیر زمینی برای ذخیره آب‌های زیر زمینی، انرژی، بازیابی و کنترل دمای راکتورها، خنک کاری قطعات الکترونیکی، عایق‌های حرارتی، فرآیند فیلتراسیون، مبدل‌های حرارتی، خنک‌کاری تجهیزات الکترونیکی، کلکتورهای خورشیدی اشاره کرد. وجود مباحثی چون فیلتراسیون، آکوستیک، احتراق و عایق‌های

حرارتی در محیط متخلخل سبب شده، بررسی و شبیه‌سازی جریان و انتقال حرارت در محیط متخلخل بیش از پیش مورد توجه محققان زمینه هوا فضا قرار گیرد. مطالعه انتقال گرما، حرارت و جریان سیال در محیط متخلخل در سال‌های اخیر خیلی مورد توجه قرار گرفته است. در این موارد و کاربردهای بیشتر را می‌توان در مراجع [۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷] یافت.

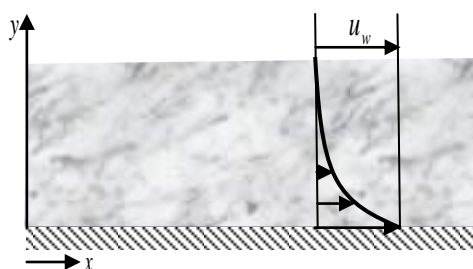
ساکیدیس [۶] اولین شخصی بود که برای مطالعه جریان سیال تراکم‌ناپذیر بر روی لایه مرزی سطح جامد متحرک با سرعت ثابت پیش قدم شد سپس گوپتا [۳] مسأله کشسانی با دمای سطح ثابت را مورد مطالعه قرار داد.

کرین [۲] به مطالعه جریان لایه مرزی ناشی از حرکت یک سطح کشسانی در خلاف جهت سیال پرداخته است. او یک راه حل را برای جریان لایه مرزی یکنواخت با یک ورق کشسانی متحرک با سرعت‌های متغیر خطی با فاصله از یک نقطه ثابت را به فرم تحلیلی ارائه داد.

در مطالعه حاضر، جریان سیال و انتقال دما به صورت دم و بازدم روی صفحه کشسان در محیط متخلخل مورد بررسی خواهد شد.

۲- شرح مسأله

مسأله جریان اولیه روی صفحه کشسان را می‌توان شبیه به جریان لایه مرزی سیال نیوتنی نشان داده شده در شکل ۱ در نظر گرفت:



شکل ۱: نمودار جریان

و تبدیلات بدون بعد زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\eta = \sqrt{\frac{a}{\nu}} y, \psi(x, y) = \sqrt{a\nu} x f(\eta) \quad (5)$$

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$

که ν غلظت جنبشی می‌باشد در نتیجه دستگاه معادلات (۳-۱) به صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر در می‌آید:

$$f''' + f f'' - f'^2 - k_1 f' = 0 \quad (6)$$

$$\theta'' + \text{Pr} f \theta' = 0 \quad (7)$$

و شرایط مرزی جدید به فرم زیر خواهند بود:

$$f = f_w, f' = 1, \theta = 1 \text{ at } \eta = 0$$

$$f' \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0 \text{ as } \eta \rightarrow \infty \quad (8)$$

معادلات (۶) و (۷) معادلات دیفرانسیل معمولی غیر خطی نسبت به متغیر η هستند و $k_1 = \frac{\mu}{\rho a k}$ پارامتر نفوذپذیری و $\text{Pr} = \frac{\mu}{\alpha \rho}$ عدد پرانتل^۲ می‌باشند.

مؤلفه‌های سرعت u و v به صورت زیر می‌باشند:

$$u = u_w f'(\eta), \quad v = -\sqrt{\frac{a\mu}{\rho}} f(\eta)$$

برای حل معادله (۶) با توجه به مسائل زوال، فرض می‌کنیم که جواب تحلیلی آن به صورت تابع $f(\eta) = A + B e^{c\eta}$ باشد که A, B و C ثابت‌های دلخواه می‌باشند و برای یافتن آنها طبق شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$f'(\eta)|_{\eta \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \rightarrow \lim_{\eta \rightarrow \infty} BC e^{c\eta} = 0$$

$$\rightarrow C < 0$$

در نتیجه، با جایگذاری تابع f و مشتقاتش در

به منظور تخمین تأثیر سرعت و انتقال گرمای سطح کشسان روی سیال ساکن در محیط متخلخل، مفروضات زیر را لحاظ می‌کنیم:

۱. جریان یکنواخت و آرام

۲. جریان دو بعدی

۳. سیال تراکم ناپذیر

با توجه به معادلات ناویر-استوکس می‌توان معادله‌های بقای جرم، اندازه حرکت و انرژی را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\mu_e}{k} u + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3)$$

شرایط مرزی استفاده شده عبارت است از:

$$u = u_w = ax, v = v_w, T = T_w \text{ at } y = 0$$

$$u \rightarrow 0, T \rightarrow T_\infty \text{ as } y \rightarrow \infty \quad (4)$$

که u و v به ترتیب مؤلفه‌های سرعت در جهت محورهای x و y در محیط متخلخل، v_w انتقال جرم روی سطح ورق، k ضریب هدایت حرارتی، ρ چگالی، μ غلظت، T دمای داخلی لایه مرزی، $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ ضریب نفوذ گرمایی محیط متخلخل اشباع و μ_e ضریب غلظت آن می‌باشند ($\mu_e \approx \mu$). در اینجا، سرعت محوری سطح کشسان به صورت $u_w = ax$ در نظر گرفته شده است.

برای حل معادلات (۳-۱) نسبت به شرایط مرزی (۴)، تابع دو متغیره جریان $\psi(x, y)$ طوری تعریف می‌شود که:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

² Prandtl number

معادله (۶) داریم:

$$A = f_w - \frac{1}{C}, \quad B = \frac{1}{C} \quad (9)$$

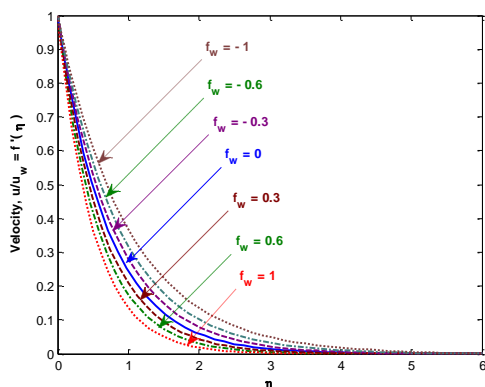
$$C = \frac{-f_w - \sqrt{f_w^2 + 4(1+k_1)}}{2}$$

برای حل معادله (۷) با شرایط مرزی، ابتدا از روش پرتابی^۳ استفاده می‌کنیم تا به صورت شرایط اولیه تبدیل شود سپس به کمک روش رونگ-کوتای مرتبه چهار جواب تقریبی عددی آن را می‌یابیم [۸، ۹].

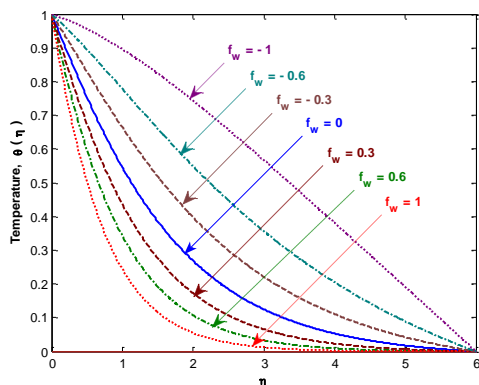
۳- شرح مسأله

همان طوری که گفته شد پارامترهای جریان از قبیل

سرعت و دمای سیال توسط معادلات (۶) و (۷) محاسبه شده‌اند و در محاسبه، به جای $\eta \rightarrow \infty$ از مقدار $\eta = 6$ استفاده شده است تغییرات سرعت $f'(\eta)$ و دمای $\theta(\eta)$ برای پارامترهای دم $f_w > 0$ و بازدم‌های $f_w < 0$ متفاوت و نفوذپذیری $k_1 = 1$ مشاهده شده است و همچنین تغییرات دما را برای تعدادی عدد پرانتل Pr رؤیت نموده‌ایم و نتایج در شکل‌های ۲-۴ نشان داده شده است نتایج نشان می‌دهد که سرعت $f'(\eta)$ و دمای $\theta(\eta)$ با افزایش η کاهش می‌یابد همچنین در شکل ۴ نشان داده شده است که با افزایش عدد پرانتل Pr، دما کاهش می‌یابد.

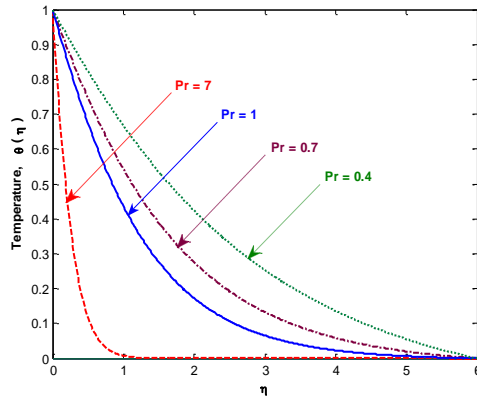


شکل ۲: تغییرات سرعت نسبت به η برای تعدادی f_w



شکل ۳: تغییرات دما نسبت به η برای $Pr = 1$ و تعدادی f_w

³ Shooting method



شکل ۴: تغییرات دما نسبت به η برای $f_w = 0.3$ و تعدادی Pr

نتیجه گیری

نتایج به دست آمده به خوبی حرکت جریان سیال و توزیع دمای داخل محیط متخلخل را نشان می‌دهد. در مدل حاضر، در محیط متخلخل بر روی یک سطح کشسانی، جریان سیال با روش تحلیلی و انتقال حرارت با روش‌های عددی رانگ-کوتای مرتبه ۴ و پرتابی مورد مطالعه قرار گرفته است. تغییرات سرعت $f'(\eta)$ و دمای $\theta(\eta)$ نسبت به پارامترهای متفاوت دم، بازدم، نفوذپذیری و عدد پراتل مشاهده شده است. سرعت با افزایش پارامترهای نفوذپذیری، دم و بازدم کاهش می‌یابد و دما با افزایش نفوذپذیری، دم و بازدم و عدد پراتل کاهش می‌یابد.

[1]. Y. Cao, S. Chen, A.J. Meir, Steady flow in a deformable porous medium, Wiley publisher, 2013.

[2]. L.J. Crane, Flow past a stretching plane, Z. Amgen. Math. Phys. Vol. 21, pp. 645–647, 1970.

[3]. P.S Gupta, A.S. Gupta, Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing, Can. J. Chem. Eng. Vol. 55, No. 6, pp. 744–746, 1977.

[4]. M. Kaviany, Principles of heat transfer in porous media, Second Edition, Springer; New York, 1999.

[5]. D. A. Nield, A. Bejan, Convection in porous media. 3rd ed. Springer, 2006.

[6]. B.C. Sakiadis, Boundary layer behavior on continuous solid surfaces: I. Boundary layer Equations for two-dimensional and axisymmetric flow, AICHE J., Vol. 7, No. 1, pp. 26–28, 1961.

[7]. H. Schlichting, Boundary Layer Theory, 8th Edition, Springer-Verlag Berlin, Germany, 2003.

[8]. J. Stoer, R. Bulirsch, Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, New York, 1993.

[۹]. زرینی محمود، محاسبات عددی، انتشارات پاد اندیشه، قم، ۱۳۹۲.