

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال هشتم، شماره سی و هفتم، مرداد و شهریور ۱۴۰۱

شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

## روش شبه‌طیفی لژاندر برای حل معادلات دیفرانسیل تاخیری از نوع پانتوگراف چندگانه

محمد هادی نوری اسکندری<sup>۱\*</sup>، مصطفی محمودی<sup>۲</sup>، جواد وحیدی<sup>۳</sup>، مهدی قوتمند<sup>۴</sup>

<sup>(۱و۲و۴)</sup> دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

<sup>(۳)</sup> دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۲/۰۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۶/۱۵

### چکیده

معادلات دیفرانسیل تاخیری کاربردهای وسیعی در علوم و مهندسی به خود اختصاص داده است. هنگامی که این معادلات غیرخطی باشند، معمولاً نمی‌توان جواب دقیق را محاسبه کرد. بنابراین یافتن یک جواب عددی با دقت بالا برای این معادلات ضروری است. در این مقاله یک روش عددی بر مبنای چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته برای حل معادلات دیفرانسیل تاخیری از نوع پانتوگراف چندگانه ارائه می‌دهیم. در این روش از نقاط هم محلی لژاندر-گوس-لوباتو برای گسسته‌سازی مساله استفاده کرده و مساله را به یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌کنیم. از حل این مساله برنامه‌ریزی غیرخطی یک جواب تقریبی برای معادله دیفرانسیل اصلی بدست می‌آوریم. شدنی بودن مساله برنامه‌ریزی غیرخطی و همگرایی جواب تقریبی بدست آمده به جواب دقیق را بررسی می‌نماییم. بعلاوه با حل چندین مثال عددی و مقایسه روش با برخی از روش‌های موجود، کارایی و قابلیت روش پیشنهادی را نشان می‌دهیم.

**واژه‌های کلیدی:** معادلات دیفرانسیل تاخیری پانتوگراف چندگانه، روش شبه طیفی لژاندر، آنالیز همگرایی.

## ۱- مقدمه

در دهه‌های گذشته، روش‌های مختلفی برای حل انواع خاصی از معادلات دیفرانسیل تأخیری پانتوگراف چندگانه ارائه شده است. داوری‌فر و رشیدی‌نیا در [۴] یک روش هم‌محلی ارائه کرده‌اند تا جواب تقریبی از معادلات دیفرانسیل تأخیری پانتوگراف چند گانه با ضرایب متغیر و با شرایط اولیه داده شده را بدست آورند. یوزباشی و سزر در [۲۲] نویسندگان یک روش هم‌محلی لژاندر جهت حل معادلات دیفرانسیل تأخیری پانتوگراف چندگانه براساس تکنیک‌های تصحیح باقی‌مانده ارائه کرده‌اند. همچنین در [۲۳] یک روش تقریب نمایی برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری پانتوگراف تعمیم‌یافته ارائه شده است. یانگ و توحیدی در [۲۱] روش هم‌محلی طیفی لژاندر را برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری پانتوگراف چند گانه با مسائل مقادیر مرزی بکار برده‌اند. یو در [۲۵] روش تکرار متغیر را جهت حل معادلات دیفرانسیل تأخیری پانتوگراف چند گانه بکار برده است. در [۷] روش آشفستگی هموتویی را برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری پانتوگراف چند گانه با ضرایب متغیر بکار رفته است. سزر و همکاران در [۱۸] یک جواب تقریبی از معادلات پانتوگراف چندگانه با ضرایب متغیر با استفاده از چندجمله‌ای‌های تیلور معرفی کرده‌اند. همچنین در [۱۲] روش‌های رانگ-کوتا برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری پانتوگراف چند گانه بکار برده شده است. جیانگ و همکاران در [۱۱] روش گالرگین ناپیوسته را برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری پانتوگراف چند گانه مورد استفاده قرار داده‌اند. یوزباشی در [۲۴] یک روش عددی برای حل یک سیستم از معادلات دیفرانسیل تأخیری پانتوگراف چند گانه با شرایط ترکیبی پیشنهاد شده است.

محمودی و همکاران در [۱۴، ۱۵] روش شبه طیفی لژاندر را برای حل معادلات دیفرانسیل و

دیفرانسیل-انتگرال تأخیری مورد استفاده قرار داده است. جعفری و همکاران در [۱۰] روش شبه طیفی لژاندر را برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری پانتوگراف بکار برده‌اند. دهقان و شاکری [۵] روش تجزیه آدومیان را برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری که از الکتروپنایمیک منشا می‌گیرند ارائه کرده‌اند. صداقت و همکاران [۱۷] همچنین یک طرح عددی برای حل معادله پانتوگراف پیشنهاد کردند. این روش شامل گسترش جواب‌های تقریبی مورد نیاز به عنوان عناصر چندجمله‌ای‌های چبیشف تغییر یافته می‌باشد. صادقی و همکاران [۱۶] یک جواب عددی از معادلات دیفرانسیل تأخیری با استفاده از روش مرکب لژاندر را پیشنهاد کردند. لی و چی [۱۳] معادلات دیفرانسیل تأخیری نامتناهی را بررسی کردند و یک راه حل تحلیلی برای رده‌ای از آن‌ها پیشنهاد کرده‌اند. در [۱۹] یک روش اختلال هموتویی برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری ارائه شده است. بهراوی و همکاران در [۲] روش شبه طیفی ژاکوبی را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل تأخیری-زمانی برگر ارائه کرده‌اند. الهاواری و الشامی در [۶] ترکیبی از روش‌های اسپلاین-طیفی را برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترای تأخیری معرفی کردند. وی و چن در [۲۰] روش‌های هم‌محلی طیفی لژاندر را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل-انتگرال ولترای تأخیری پانتوگراف بکار برده‌اند. بلور و بوسلسال در [۱] یک رویکرد عددی جدیدی براساس چند جمله‌ای‌های تیلور هم‌محلی پیوسته برای حل عددی معادلات دیفرانسیل-انتگرال تأخیری بکار برده‌اند.

در این مقاله یک روش شبه طیفی لژاندر برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری از نوع پانتوگراف چند گانه ارائه کرده و همگرایی روش را بررسی می‌نماییم. همچنین با حل چند مثال عددی کارایی روش را نشان داده و به مقایسه روش پیشنهادی با

سایر روش‌ها می‌پردازیم. تقریب می‌زنیم که  $\bar{f}_j$  ها ضرایبی نامعین می‌باشند

و  $L_j(\cdot)$  ها چندجمله‌ای‌های لاگرانژ هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$L_j(r) = \prod_{i=0, i \neq j}^M \frac{r-r_i}{r_j-r_i}, \quad j=0,1,\dots,M \quad (4)$$

در اینجا  $\{r_j\}_{j=0}^M \in [0,R]$  نقاط لژاندر - گاوس -

لوباتو انتقال یافته هستند. توجه داریم که

$$L_j(r_k) = \begin{cases} 1, & j=k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

$$f(r_k) \square f^M(r_k) = \bar{f}_k. \quad (5)$$

توجه داریم که

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} f(r_k) \square \frac{df^M}{dr}(r_k) &= \sum_{j=0}^M \bar{f}_j L_j(r_k) \\ &= \sum_{j=0}^M \bar{f}_j D_{kj}. \end{aligned} \quad (6)$$

اکنون با استفاده از روابط (۳) و (۵) مسئله بهینه سازی (۲) را با مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی زیر تقریب می‌زنیم

$$\text{Minimize } I = \|\bar{f}_0 - \gamma\|^2$$

$$\text{Subject to } \sum_{j=0}^M \bar{f}_j D_{kj} = a(r_k) \bar{f}_k$$

$$+ b_1(r_k) \sum_{j=0}^M \bar{f}_j L_j(q_1 r_k) \quad (7)$$

$$+ b_2(r_k) \sum_{j=0}^M \bar{f}_j L_j(q_2 r_k) + \dots$$

$$+ b_L(r_k) \sum_{j=0}^M \bar{f}_j L_j(q_L r_k)$$

$$+ g(r_k), \quad k=1,2,\dots,M,$$

با حل مسئله بهینه سازی غیرخطی (۷) جواب

تقریبی نقطه‌ای  $(\bar{f}_0^*, \bar{f}_1^*, \dots, \bar{f}_M^*)$  را بدست می‌آوریم و بنابراین

## ۲- پیاده‌سازی یک روش شبه‌طیفی برای معادلات دیفرانسیل تاخیری از نوع پانتوگراف چندگانه

در این مقاله معادله دیفرانسیل تاخیری از نوع پانتوگراف چند گانه زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} f'(r) = a(r)f(r) + b_1(r)f(q_1 r) \\ \quad + b_2(r)f(q_2 r) + \dots \\ \quad + b_L(r)f(q_L r) \\ \quad + g(r), \quad 0 \leq r \leq R, \\ f(0) = \gamma, \end{cases} \quad (1)$$

که  $a(\cdot), b_1(\cdot), b_2(\cdot), \dots, b_L(\cdot)$  و  $g(\cdot)$  توابعی مشتق پذیر و معین هستند،  $f(\cdot)$  تابعی مجهول،  $\gamma$  برداری با مولفه‌های ثابت است و  $0 < q_1 < q_2 < \dots < q_L < 1$  همچنین فرض

می‌کنیم که سیستم (۱) دارای یک جواب است.

اکنون ابتدا مساله بهینه‌سازی زیر را برای حل سیستم (۱) پیشنهاد می‌کنیم

$$\text{Minimize } I = \|f(0) - \gamma\|^2$$

$$\text{Subject to } f'(r) = a(r)f(r)$$

$$+ b_1(r)f(q_1 r) \quad (2)$$

$$+ b_2(r)f(q_2 r) + \dots$$

$$+ b_L(r)f(q_L r)$$

$$+ g(r), \quad 0 \leq r \leq R,$$

واضح است که هر جواب سیستم (۱) یک جواب

بهینه برای مسئله (۲) می‌باشد. همچنین چون

سیستم (۱) دارای یک جواب می‌باشد، مسئله (۲)

یک مسئله شدنی است و دارای یک جواب بهینه

می‌باشد. جواب بهینه مسئله (۲) را به صورت

$$f(r) \square f^M(r) = \sum_{j=0}^M \bar{f}_j L_j(r), \quad 0 \leq r \leq R, \quad (3)$$

که  $\{r_k\}_{k=0}^M$  نقاط لژاندر-گوس-لوباتو انتقال یافته هستند و  $L$  ثابت و مستقل از  $M$  است.

$$f^M(r) = \sum_{j=0}^M \bar{f}_j^* L_j(r), \quad 0 \leq r \leq R, \quad (A)$$

یک جواب تقریبی پیوسته برای سیستم (۱) می‌باشد.

### ۳- آنالیز همگرایی

در این بخش، آنالیز همگرایی روش پیشنهادی را بررسی می‌کنیم. مسئله (۷) را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\begin{aligned} \text{Minimize } I &= \|\bar{f}_0 - \gamma\|^2 \\ \text{Subject to } & \left\| \sum_{j=0}^M \bar{f}_j D_{kj} - a(r_k) \bar{f}_k \right. \\ & - b_1(r_k) \sum_{j=0}^M \bar{f}_j L_j(q_1 r_k) \\ & - b_2(r_k) \sum_{j=0}^M \bar{f}_j L_j(q_2 r_k) - \dots \\ & \left. - b_L(r_k) \sum_{j=0}^M \bar{f}_j L_j(q_L r_k) - g(r_k) \right\|_{\infty} \\ & \leq (M-1)^{\frac{3}{2}-\beta}, \quad k=1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (9)$$

لم ۳-۱: [] برای هر تابع  $\eta(\cdot) \in W^{m, \infty}$  که  $m$  بزرگتر مساوی ۲ است، یک چند جمله‌ای  $p_N(\cdot)$  از درجه حداکثر  $N$  وجود دارد به طوری که  $\|\eta(\cdot) - p_N(\cdot)\|_{\infty} \leq CC_0 N^{-m}$ ، مستقل از  $N$  است و  $C_0 = \|\eta\|_{W^{m, \infty}}$ .

قضیه ۳-۱: فرض کنید  $\beta \geq 2$  و  $f(\cdot) \in V^{\beta, \infty}$  یک یک جواب برای مسئله (۲) باشد. عدد صحیح و مثبت مانند  $M_1$  وجود دارد به طوری که برای هر  $M_1 > M_1$  مسئله (۹) دارای یک جواب شدنی  $\bar{f} = (\bar{f}_0, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_M)$  است که در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$\|f(r_k) - \bar{f}_k\|_{\infty} \leq L(M-1)^{1-\beta}, \quad k=0, 1, \dots, M,$$

اثبات: با استفاده از لم ۳-۱ یک چند جمله‌ای  $p(\cdot)$  از درجه  $(m-1)$  و ثابت  $C_1$  مستقل از  $M$  وجود دارد به طوری که

$$\|f^{\dot{}}(r) - p(r)\|_{\infty} \leq C_1(M-1)^{1-\beta}.$$

تعریف می‌کنیم

$$f^M(r) = \int_0^r p(\tau) d\tau + f(0), \quad r \geq 0.$$

بنابراین داریم

$$f^M(r) = p(r), \quad f^M(0) = f(0).$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \|f(r) - f^M(r)\|_{\infty} &= \left\| \int_0^r (f^{\dot{}}(s) - p(s)) ds \right\|_{\infty} \\ &\leq \int_0^r \|f^{\dot{}}(s) - p(s)\|_{\infty} ds \quad (10) \\ &\leq C_1(M-1)^{1-\beta} \int_0^r ds \\ &\leq C_1 R (M-1)^{1-\beta}. \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه بالا،  $f(r_k)$  و  $\bar{f}_k$  برای  $k=0, 1, \dots, M$  در یک مجموعه فشرده مانند  $\Omega \subseteq \square^m$  قرار دارند. چون  $f^M(\cdot)$  یک چند جمله‌ای از درجه کمتر یا مساوی  $M$  است، داریم

$$\sum_{j=0}^M \bar{f}_j D_{kj} = f^{\dot{}}(r_k). \quad (11)$$

بنابراین با توجه به روابط (۱۰) و (۱۱) برای  $k=1, 2, \dots, M$  داریم،

$$f_M^*(r) = \sum_{k=0}^M \bar{f}_k^* L_k(r), \quad r \in [0, R], \quad (13)$$

که  $L_k(\cdot)$ ،  $k = 0, 1, \dots, M$  چند جمله‌ای‌های لاگرانژ هستند. در اینجا مجموعه‌ای از جواب‌های گسسته  $\{\bar{f}_0^*, \bar{f}_1^*, \dots, \bar{f}_M^*\}_{M=M_1}^\infty$  و مجموعه‌ای از توابع  $\{f_M^*(\cdot)\}_{M=M_1}^\infty$  را داریم.

**فرض ۳-۱:** فرض می‌کنیم مجموعه  $\{\bar{f}_0^*, \bar{f}_1^*, \dots, \bar{f}_M^*\}_{M=M_1}^\infty$  زیر دنباله‌ای به‌طور یکنواخت همگرا به  $\{f_0^\infty, q(\cdot)\}$  دارد که  $q(\cdot)$  تابعی پیوسته و  $f_0^\infty \in \square^n$  است.

**قضیه ۳-۲:** اگر  $\{\bar{f}_0^*, \bar{f}_1^*, \dots, \bar{f}_M^*\}_{M=M_1}^\infty$  یک دنباله‌ای از جواب‌های بهینه مسئله (۹) و  $\{f_M^*(\cdot)\}_{M=M_1}^\infty$  دنباله چندجمله‌ای‌های درونیاب متناظر آن‌ها باشد که در فرض ۳-۱ صدق کند آنگاه  $f^*(r) = \int_0^r q(\tau) d\tau + f_0^\infty$ ،  $0 \leq r \leq R$ ، (۱۴) یک جواب بهینه برای مسئله (۲) است.

**اثبات:** با استفاده از فرض ۳-۱ یک دنباله  $\{f_{M_i}^*(\cdot)\}_{i=1}^\infty$  از دنباله  $\{f_M^*(\cdot)\}_{M=M_1}^\infty$  وجود دارد به‌طوری که  $\lim_{i \rightarrow \infty} M_i = \infty$  و  $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{M_i}^*(\cdot) = q(\cdot)$  با استفاده از رابطه (۱۴) و فرض ۳-۱ داریم  $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{M_i}^*(\cdot) = f^*(\cdot)$ .

اثبات در دو بخش انجام می‌شود، در بخش اول نشان می‌دهیم که  $f^*(\cdot)$  یک جواب شدنی برای مسئله (۲) است و در بخش دوم ثابت می‌کنیم که  $f^*(\cdot)$  یک جواب بهینه برای مسئله (۲) می‌باشد. برای اثبات بخش اول، فرض کنیم که  $f^*(\cdot)$  در

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=0}^M \bar{f}_j D_{kj} - a(r_k) f(r_k) - b_1(r_k) f(q_1 r_k) \right. \\ & \quad \left. - b_2(r_k) f(q_2 r_k) - \dots - b_L(r_k) f(q_L r_k) - g(r_k) \right\|_\infty \\ & \leq \left\| f^M(r_k) - f(r_k) \right\|_\infty + \left\| a(r_k) f^M(r_k) \right. \\ & \quad \left. - a(r_k) f(r_k) \right\|_\infty + \left\| b_1(r_k) f^M(q_1 r_k) \right. \\ & \quad \left. - b_1(r_k) f(q_1 r_k) \right\|_\infty + \left\| b_2(r_k) f^M(q_2 r_k) \right. \\ & \quad \left. - b_2(r_k) f(q_2 r_k) \right\|_\infty + \dots + \left\| b_L(r_k) f^M(q_L r_k) \right. \\ & \quad \left. - b_L(r_k) f(q_L r_k) \right\|_\infty \\ & \leq \left\| p(r_k) - f(r_k) \right\|_\infty + \left\| a(r_k) \right\|_\infty \left\| f^M(r_k) \right. \\ & \quad \left. - f(r_k) \right\|_\infty + \left\| b_1(r_k) \right\|_\infty \left\| f^M(q_1 r_k) \right. \\ & \quad \left. - f(q_1 r_k) \right\|_\infty + \left\| b_2(r_k) \right\|_\infty \left\| f^M(q_2 r_k) \right. \\ & \quad \left. - f(q_2 r_k) \right\|_\infty + \dots + \left\| b_L(r_k) \right\|_\infty \left\| f^M(q_L r_k) \right. \\ & \quad \left. - f(q_L r_k) \right\|_\infty \\ & \leq C_1 (M-1)^{1-\beta} + \alpha_1 C_1 R (M-1)^{1-\beta} \\ & \quad + \alpha_2 C_1 R (M-1)^{1-\beta} + \dots + \alpha_{L+1} C_1 R (M-1)^{1-\beta} \\ & = C_1 (M-1)^{1-\beta} (1 + \alpha_1 R + \alpha_2 R + \dots + \alpha_{L+1} R), \end{aligned}$$

که  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{L+1}$  کران بالایی برای توابع پیوسته  $a(\cdot), b_1(\cdot), \dots, b_L(\cdot)$  روی بازه  $[0, R]$  می‌باشند و در نتیجه با انتخاب  $M_1 \in \square$  به‌طوری که

$$C_1 (1 + \alpha_1 R + \alpha_2 R + \dots + \alpha_{L+1} R) \leq (M_1 - 1)^{\frac{1}{2}},$$

به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=0}^M \bar{f}_j D_{kj} - a(r_k) f(r_k) - b_1(r_k) f(q_1 r_k) \right. \\ & \quad \left. - b_2(r_k) f(q_2 r_k) - \dots \right. \\ & \quad \left. - b_L(r_k) f(q_L r_k) - g(r_k) \right\|_\infty \\ & \leq (M-1)^{\frac{3}{2}-\beta}, \quad k = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (12)$$

برای هر  $M \geq M_1$ .

اگر  $\bar{f}^* = (\bar{f}_0^*, \bar{f}_1^*, \dots, \bar{f}_M^*)$  یک جواب بهینه برای مسئله (۹) باشد، تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} 0 &= \|f^{**}(0) - \gamma\|^2 \leq \|f^*(0) - \gamma\|^2 \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \|f_{M_i}^*(0) - \gamma\|^2 = \|\tilde{f}_0^* - \gamma\|^2 \\ &\leq \|\tilde{f}_0^* - \gamma\|^2 = \|f^{**}(0) - \gamma\|^2 = 0. \end{aligned}$$

بنابراین  $\|f^*(0) - \gamma\|^2 = 0$  و  $f^*(\cdot)$  یک جواب بهینه برای مسئله (۲) است.

#### ۴- مثال‌های عددی

در این بخش، کارایی روش ارائه شده را با حل چند مثال معادلات دیفرانسیل تاخیری از نوع پانتوگراف چند گانه نشان می‌دهیم. در اینجا خطای مطلق را با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم

$$E^M(r_k) = \|f^M(r_k) - f^*(r_k)\|, \quad k = 0, 1, \dots, M,$$

که  $f^*(\cdot)$  و  $f^M(\cdot)$  به ترتیب جواب تقریبی و دقیق هستند. برای حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی بدست آمده از دستور FMINCON در نرم‌افزار متلب استفاده می‌کنیم. توجه شود که حداقل مقدار  $M$  را می‌توان بدین صورت تعیین کرد که اگر دقت جواب تقریبی مورد نظر  $\varepsilon$  باشد، داشته باشیم  $\text{Max}\{E^M(r_k) : k = 0, 1, \dots, M\} \leq \varepsilon$ . همچنین می‌توان از خطای مانده به جای  $E^M$  نیز برای تعیین حداقل مقدار  $M$  استفاده کرد.

#### مثال ۴-۱: معادله دیفرانسیل تاخیری پانتوگراف

چند گانه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \dot{f}(r) = f(r) + f(r/2) + f(r/4) + f(r/8) \\ \quad + g(r), \quad 0 \leq r \leq 1, \\ f(0) = 1, \end{cases}$$

که  $g(r) = e^r$  را طوری انتخاب می‌کنیم که  $f(r) = e^r$  جواب دقیق مسئله باشد. شکل ۱ جواب دقیق و تقریبی را برای  $M = 10$  نشان می‌دهد. خطاهای مطلق برای  $M = 6, 8, 10$  در شکل ۲ و جدول ۱

محدودیت‌های مسئله (۲) صدق نکنند. بنابراین یک

$\bar{r} \in [0, R]$  وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned} &f^*(\bar{r}) - a(\bar{r})f^*(\bar{r}) - b_2(\bar{r})f^*(q_2\bar{r}) - \dots \\ &\quad - b_L(\bar{r})f^*(q_L\bar{r}) - g(\bar{r}) \neq 0, \end{aligned}$$

از آنجایی که مجموعه  $\{r_k\}_{k=0}^\infty$  در بازه  $[0, R]$

چگال هستند  $[\lambda]$  یک زیر دنباله  $k_{M_i}$  وجود دارد

به طوری که  $0 < k_{M_i} < M_i$  و  $\lim_{i \rightarrow \infty} r_{k_{M_i}} = \bar{r}$

بنابراین

$$\begin{aligned} &f^*(\bar{r}) - a(\bar{r})f^*(\bar{r}) - b_1(\bar{r})f^*(q_1\bar{r}) \\ &\quad - b_2(\bar{r})f^*(q_2\bar{r}) - \dots \\ &\quad - b_L(\bar{r})f^*(q_L\bar{r}) - g(\bar{r}) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} (f_{M_i}^*(r_{k_{M_i}}) - a(r_{k_{M_i}})f_{M_i}^*(r_{k_{M_i}}) \\ &\quad - b_1(r_{k_{M_i}})f_{M_i}^*(q_1r_{k_{M_i}}) \\ &\quad - b_2(r_{k_{M_i}})f_{M_i}^*(q_2r_{k_{M_i}}) - \dots \\ &\quad - b_L(r_{k_{M_i}})f_{M_i}^*(q_Lr_{k_{M_i}}) - g(r_{k_{M_i}})) \neq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

از طرفی  $\lim_{i \rightarrow \infty} (M_i - 1)^{\frac{3}{2} - \beta} = 0$  بنابراین با استفاده

از محدودیت‌های مسئله (۹)، داریم

$$\begin{aligned} &\lim_{i \rightarrow \infty} (f_{M_i}^*(r_{k_{M_i}}) - a(r_{k_{M_i}})f_{M_i}^*(r_{k_{M_i}}) \\ &\quad - b_1(r_{k_{M_i}})f_{M_i}^*(q_1r_{k_{M_i}}) - b_2(r_{k_{M_i}})f_{M_i}^*(q_2r_{k_{M_i}}) \\ &\quad - \dots - b_L(r_{k_{M_i}})f_{M_i}^*(q_Lr_{k_{M_i}}) - g(r_{k_{M_i}})) = 0, \end{aligned}$$

که با رابطه (۱۵) در تناقض است. بنابراین  $\{f^*(\cdot)\}$

یک جواب شدنی برای مسئله (۲) است. حال بخش

دوم اثبات را ارائه می‌کنیم. فرض کنیم  $\beta \geq 2$

$f^{**}(\cdot) \in V^{\beta, \infty}$  یک جواب بهینه برای مسئله (۲)

باشد. لذا دنباله‌ای از جواب‌های شدنی

$$\{\tilde{f} = (\tilde{f}_0^*, \tilde{f}_1^*, \dots, \tilde{f}_M^*)\}_{M=M_1}^\infty$$

وجود دارد به طوری که به  $f^{**}(\cdot)$  به طور یکنواخت

همگرا می‌شوند. بنابراین با استفاده از بهینگی

$$f^{**}(\cdot) \text{ و } \bar{f}^* = (\bar{f}_0^*, \bar{f}_1^*, \dots, \bar{f}_M^*) \text{ داریم}$$

نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که وقتی  $M$  افزایش می‌یابد خطا به صفر میل می‌کند.

**مثال ۴-۲:** معادله دیفرانسیل تاخیری پانتوگراف چندگانه زیر را در نظر بگیرید.

نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که وقتی  $M$  افزایش می‌یابد خطا به صفر میل می‌کند.

**مثال ۴-۲:** معادله دیفرانسیل تاخیری پانتوگراف چندگانه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} f'(r) = \frac{1}{2}f(r) + \frac{1}{2}e^{\frac{r}{2}}f\left(\frac{r}{2}\right) + \frac{3}{8}rf\left(\frac{r}{3}\right) \\ \quad + g(r), \quad 0 \leq r \leq 1, \\ f(0) = 0, \end{cases}$$

**مثال ۴-۴:** معادله دیفرانسیل تاخیری پانتوگراف چندگانه زیر را در نظر بگیرید [۹، ۱۸].

$$\begin{cases} f'(r) = -f(r) - e^{-0.5r} \sin(0.5r)f(0.5r) \\ \quad - 2e^{-0.75r} \cos(0.5r) \sin(0.25r) \\ \quad \times f(0.25r), \quad 0 \leq r \leq 1, \\ f(0) = 1, \end{cases}$$

که  $g(r)$  طوری انتخاب می‌شود که جواب دقیق مسئله  $f(r) = e^{-r} \sin r$  باشد. شکل ۳ جواب دقیق و تقریبی را برای  $M = 8$  نشان می‌دهد. خطاهای مطلق برای  $M = 6, 8, 10$  در شکل ۴ و جدول ۲ نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که با افزایش  $M$  خطا به سمت صفر میل می‌کند.

که  $f(r) = e^{-r} \cos(r)$  جواب دقیق مسئله است. شکل ۷ جواب دقیق و تقریبی را برای  $M = 9$  نشان می‌دهد. خطاهای مطلق برای  $M = 6, 9, 12$  در شکل ۸ و جدول ۴ نشان داده شده است و ملاحظه می‌شود که با افزایش  $M$  خطا به صفر میل می‌کند. همچنین مقایسه خطاهای مطلق روش پیشنهادی با روش چندجمله‌ای برنشتاین [۹] و روش چندجمله‌ای تیلور [۱۸] در جدول ۵ نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که خطای روش پیشنهادی کمتر و روش کارا تر است.

**مثال ۴-۳:** معادله دیفرانسیل تاخیری پانتوگراف چندگانه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} f'(r) = f(r) + f(r/2) + f(r/4) + f(r/8) \\ \quad + f(r/16) + g(r), \quad 0 \leq r \leq 1, \\ f(0) = 1, \end{cases}$$

$g(r)$  را طوری انتخاب می‌کنیم که

جدول ۱: خطاهای مطلق با مقادیر مختلف  $M$  برای مثال ۴-۱.

$r$	$M = 6$	$M = 8$	$M = 10$
0.2	$5.21 \times 10^{-8}$	$2.36 \times 10^{-11}$	$3.89 \times 10^{-14}$
0.4	$1.81 \times 10^{-7}$	$4.79 \times 10^{-11}$	$2.63 \times 10^{-14}$
0.6	$1.33 \times 10^{-6}$	$1.54 \times 10^{-9}$	$1.17 \times 10^{-12}$
0.8	$1.90 \times 10^{-6}$	$1.93 \times 10^{-9}$	$1.35 \times 10^{-12}$
1.0	$2.33 \times 10^{-6}$	$2.51 \times 10^{-9}$	$1.73 \times 10^{-12}$

جدول ۲: خطاهای مطلق با مقادیر مختلف  $M$  برای مثال ۴-۲.

$r$	$M = 6$	$M = 8$	$M = 10$
0.2	$2.34 \times 10^{-7}$	$8.51 \times 10^{-11}$	$5.62 \times 10^{-13}$
0.4	$6.68 \times 10^{-7}$	$1.41 \times 10^{-10}$	$4.16 \times 10^{-13}$
0.6	$4.81 \times 10^{-6}$	$3.54 \times 10^{-9}$	$1.69 \times 10^{-11}$
0.8	$6.28 \times 10^{-6}$	$4.03 \times 10^{-9}$	$1.77 \times 10^{-11}$
1.0	$6.93 \times 10^{-6}$	$4.67 \times 10^{-9}$	$2.09 \times 10^{-11}$

جدول ۳: خطاهای مطلق با مقادیر مختلف  $M$  برای مثال ۴-۳.

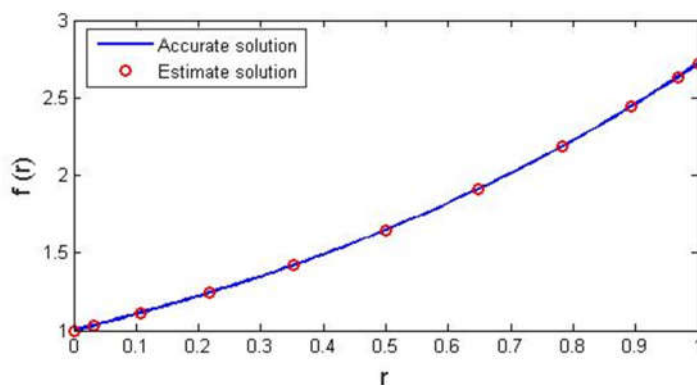
$r$	$M = 6$	$M = 9$	$M = 12$
0.2	$2.58 \times 10^{-8}$	$1.51 \times 10^{-13}$	$7.24 \times 10^{-16}$
0.4	$7.70 \times 10^{-8}$	$9.33 \times 10^{-13}$	$3.80 \times 10^{-15}$
0.6	$6.96 \times 10^{-7}$	$7.41 \times 10^{-12}$	$1.62 \times 10^{-14}$
0.8	$9.98 \times 10^{-7}$	$1.44 \times 10^{-11}$	$4.17 \times 10^{-14}$
1.0	$1.23 \times 10^{-6}$	$1.73 \times 10^{-11}$	$5.62 \times 10^{-14}$

جدول ۴: خطاهای مطلق با مقادیر مختلف  $M$  برای مثال ۴-۴.

$r$	$M = 6$	$M = 9$	$M = 12$
0.2	$8.60 \times 10^{-8}$	$5.49 \times 10^{-12}$	$1.23 \times 10^{-15}$
0.4	$2.24 \times 10^{-7}$	$8.12 \times 10^{-11}$	$9.33 \times 10^{-15}$
0.6	$1.31 \times 10^{-6}$	$2.04 \times 10^{-10}$	$1.17 \times 10^{-14}$
0.8	$1.30 \times 10^{-6}$	$1.45 \times 10^{-10}$	$1.02 \times 10^{-14}$
1.0	$9.90 \times 10^{-7}$	$1.15 \times 10^{-10}$	$7.94 \times 10^{-14}$

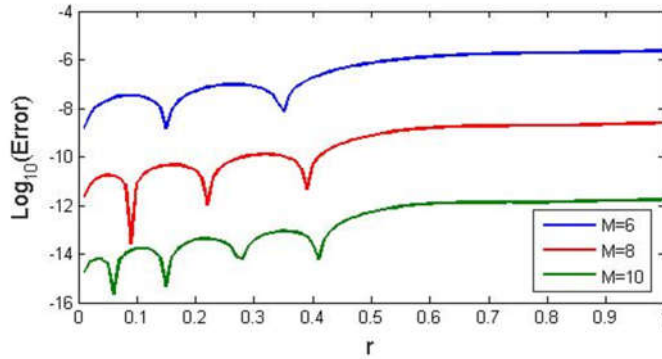
جدول ۵: مقایسه خطاهای مطلق روش پیشنهادی برای مثال ۴-۴ با روش‌های دیگر.

$r$	روش تیلور [۱۸] با $N = 7$	روش برنشتاین [۹] با $N = 6$	روش پیشنهادی با $M = 6$
0.2	$4.06 \times 10^{-8}$	$1.89 \times 10^{-6}$	$8.60 \times 10^{-8}$
0.4	$5.19 \times 10^{-6}$	$6.23 \times 10^{-7}$	$2.24 \times 10^{-7}$
0.6	$8.84 \times 10^{-5}$	$1.35 \times 10^{-6}$	$1.31 \times 10^{-6}$
0.8	$6.60 \times 10^{-4}$	$1.51 \times 10^{-6}$	$1.30 \times 10^{-6}$
1.0	$3.13 \times 10^{-3}$	$4.77 \times 10^{-5}$	$9.90 \times 10^{-7}$

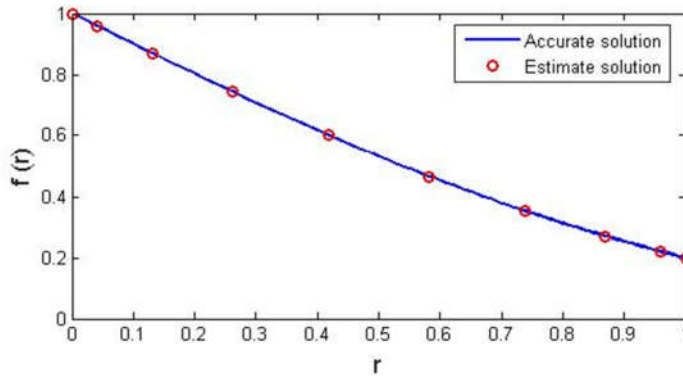


شکل ۱: جواب‌های دقیق و تقریبی با  $M=10$  برای مثال ۴-۱.

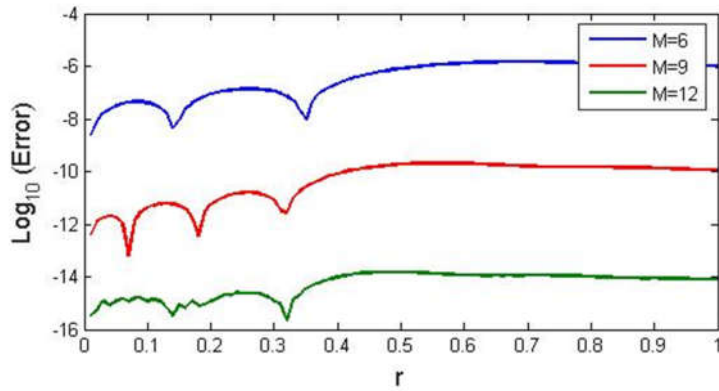




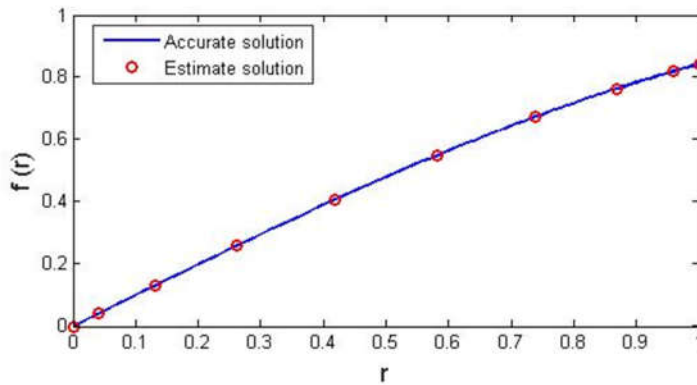
شکل ۲: خطاهای مطلق برای مثال ۴-۱.



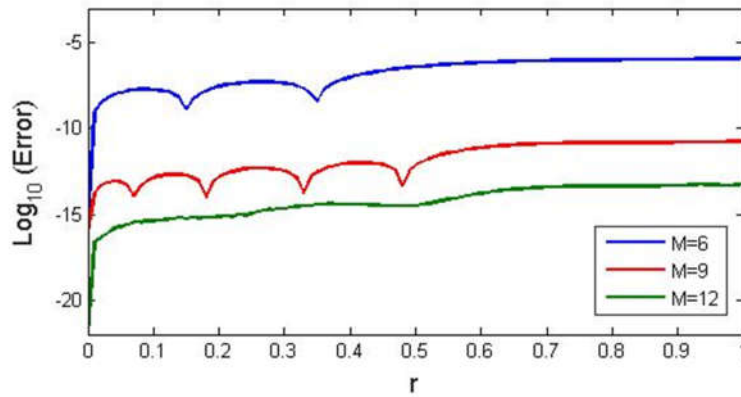
شکل ۳: جواب‌های دقیق و تقریبی با  $M=8$  برای مثال ۴-۲.



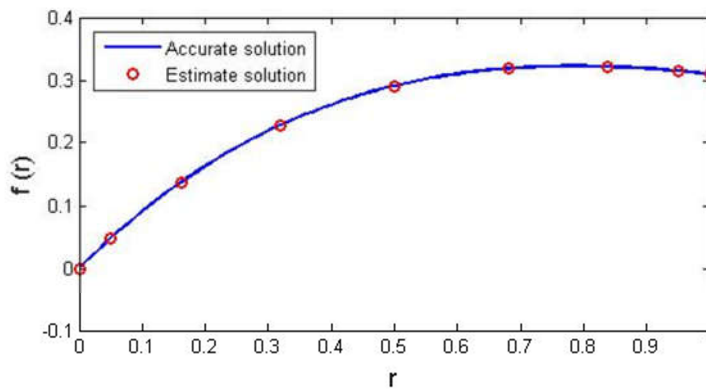
شکل ۴: خطاهای مطلق برای مثال ۴-۲.



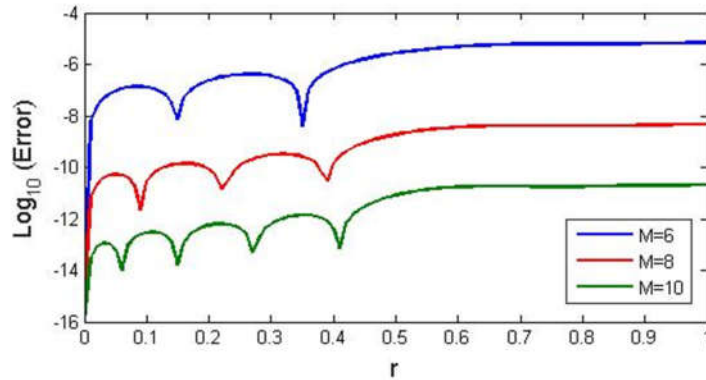
شکل ۵: جواب‌های دقیق و تقریبی با  $M=9$  برای مثال ۳-۴.



شکل ۶: خطاهای مطلق برای مثال ۳-۴.



شکل ۷: جواب‌های دقیق و تقریبی با  $M=9$  برای مثال ۴-۴.



شکل ۸: خطاهای مطلق برای مثال ۴-۴.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله یک تکنیک عددی کارا و با دقت خوب برای تقریب جواب‌های معادلات دیفرانسیل تاخیری از نوع پانتوگراف چندگانه بر پایه روش‌های شبه طیفی ارائه کردیم. تقریبات درونیاب چندجمله‌ای در نقاط لژاندر-گوس-لوباتو برای تقریب جواب معادله می‌تواند استفاده شود. دیدیم که معادله قابل تبدیل به یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی است. بعلاوه همگرایی روش اثبات شد و نتایج عددی نیز کارایی و دقت بالای روش را در مقایسه با روش‌هایی مثل روش بسط تیلور و بسط برنشتاین برای تقریب جواب‌های این نوع معادلات تاخیری نشان داد.

- [9] O.R. Isika, Z. Guneyb and M. Sezera, Bernstein series solutions of pantograph equations using polynomial interpolation, *Journal of Difference Equations and Applications*, 18(3), 357-374 (2012).
- [10] H. Jafari, M. Mahmoudi, M. H. Noori Skandari, A new numerical method to solve pantograph delay differential equations with convergence analysis, *Advances in Difference Equations*, 2021(1):129, 1-12 (2021).
- [11] K. Jiang, Q. Huang, Xi. Xu, Discontinuous Galerkin Methods for Multi-Pantograph Delay Differential Equations, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 12(1), 189-211 (2020).
- [12] D. Li and M. Z. Liu, Runge–Kutta methods for the multi-pantograph delay equation, *Applied Mathematics and Computation*, 163, 383–395 (2005).
- [13] Xu. Lu, M. Cui, Analytic solutions to a class of nonlinear infinite delay differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 343(2), 724-732 (2008).
- [14] M. Mahmoudi, M. Ghovatmand, M. H. Noori Skandari, A New Convergent Pseudospectral Method for Delay Differential Equations, *Iranian journal of science and technology, Transactions A: science* 44 (6):1-9 (2020).
- [15] M. Mahmoudi, M. Ghovatmand, M. H. Noori Skandari, A novel numerical method and its convergence for nonlinear delay Volterra integro-differential equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 43(5), 2357-2368 (2019).
- [16] M. Sadeghi Hafshejani, S. Karimi Vanani and J. Sedighi Hafshejani, Numerical Solution of Delay Differential
- [1] A. Belloura, M. Bousselsal, Numerical solution of delay integro-differential equations by using Taylor collocation method, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 37(10), 1491-1506 (2014).
- [2] A. H. Bhrawy, L. M. Assas, M. A. Alghamdi, Fast spectral collocation method for solving nonlinear time-delayed Burgers-type equations with positive power terms, *Abstract and Applied Analysis*, 12 pages (2013).
- [3] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang, *spectral method in Fluid Dynamics*, Springer, New York (1988).
- [4] S. Davaeifar, J. Rashidinia, Solution of a system of delay differential equations of multi pantograph type, *Journal of Taibah University for science* 11, 1141-1157 (2017).
- [5] M. Dehghan, F. Shakeri, The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics, *Physica Scripta*, 78(6), 11 pages (2008).
- [6] H. M. EL-Hawary, K. A. EL-Shami, Numerical solution of Volterra delay integro-differential equations via spline/spectral methods, *International Journal of Differential Equations and Applications*, 12(3), 149-157 (2013).
- [7] X. Feng, An analytic study on the multi-pantograph delay equations with variable coefficients, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome*, 56(104) No. 2, 205-215 (2013).
- [8] G. Freud, *Orthogonal Polynomials*, Pergamon Press, Elmsford (1971).

equations, *Applied Mathematical Modelling*, 37(22), 9160-9173 (2013).

[24] S. Yuzbasi, An efficient algorithm for solving multi-pantograph equation systems, *Computers and Mathematics with Applications* 64, 589-603 (2012).

[25] Z.H. Yu, Variational iteration method for solving the multi-pantograph delay equation, *Physics Letters A* 372, 6475–6479 (2008).

Using Legendre Wavelet Method, *World Applied Sciences Journal*, 13, 27-33 (2011).

[17] S. Sedaghat, Y. Ordokhani, M. Dehghan, Numerical solution of the delay differential equations of pantograph type via chebyshev polynomials, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(12), 4815-4830 (2012).

[18] M. Sezer, S. yaçınbasb, N. ,Sahin, Approximate solution of multi-pantograph equation with variable Coefficients, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 214, 406-416 (2008).

[19] F. Shaker ,M. Dhegihan , Solution of delay differential equations via a homotopy perturbation method, *mathematical and computer modelling*, 48, 486-498 (2008).

[20] YX. Wei, YP. Chen ,Legendre spectral collocation methods for pantograph Volterra delay integro-differential equations ,*Journal of Scientific Computing*, 53(3), 672-688 (2012).

[21] Y. Yang, E. Tohidi, Numerical solution of multi-Pantograph delay boundary value problems via an efficient approach with the convergence analysis, *Computational and Applied Mathematics*, 38, 127 (2019).

[22] S. Yuzbasi, M. Sezer, Shifted Legendre approximation with the residual correction to solve pantograph-delay type differential equations, *Appl. Math. Model.* 39(21), 6529-6542 (2015).

[23] S. Yuzbasi, M. Sezer, An exponential approximation for solutions of generalized pantograph-delay differential

