دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir

سال دهم، شماره چهل و نهم، مرداد و شهریور ۱۴۰۳

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

گراف‌های اشتراکی خطی ایده‌آل‌های یک مجموعه جزئاً مرتب

سهیلا خجسته*

گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۸/۱۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۱/۲۹

چکیده

فرض کنید $(P,\leq)$ یک مجموعه جزئاً مرتب اتمیک با کوچکترین عنصر ۰ باشد. گراف اشتراکی ایده‌آل‌های P که با $G(P)$ نشان داده می‌شود، گرافی است که مجموعه رئوس آن تمام ایده‌آل‌های غیربدیهی P است و دو رأس متمایز آن مانند I,J مجاورند اگر و تنها اگر $I\cap J\neq\{0\}$. مکمل گراف $G(P)$ با $\Gamma(P)$ نشان داده می‌شود. همچنین، گراف خطی گراف دلخواهی مانند G که با $L(G)$ نشان داده می‌شود، گرافی است که مجموعه رئوسش برابر با مجموعه یال‌های گراف G است و دو رأس آن مجاورند اگر و تنها اگر یال‌های متناظر آنها در G برخورد داشته باشند. در این مقاله، تمام مجموعه‌های جزئاً مرتب P که $G(P)$ یا $\Gamma(P)$ متناظر با آنها، گراف خطی است را مشخص می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که $\Gamma(P)$ گراف خطی است اگر و تنها اگر $|Atom(P)|=1$ یا $Atom(P)=\{a_1,a_2\}$ به قسمی که $|\{a_1\}^u\backslash\{a_2\}^u|, |\{a_2\}^u\backslash\{a_1\}^u|\leq 2$ یا $|Atom(P)|=3$ و $P=Atom(P)\cup\{0\}$ یا اینکه $|Atom(P)|=3$ و عددی طبیعی مانند n موجود است که $P=Atom(P)\cup\{0\}\cup\{b_1,\dots,b_n\}$ و برای هر $a\in Atom(P)$ ، $\{b_1,\dots,b_n\}\subseteq\{a\}^u$.

واژه‌های کلیدی: مجموعه جزئاً مرتب، گراف اشتراکی، مکمل گراف اشتراکی، گراف خطی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:s_khojasteh@liau.ac.ir

۱- مقدمه

مقالات زیادی در باب گراف‌های وابسته به ساختارهای جبری از قبیل شبکه‌ها، مجموعه‌های جزئاً مرتب، گروه‌ها، حلقه‌ها و مدول‌ها به چاپ رسیده است. برای نمونه می‌توان به مراجع [۱ − ۷]، [۱۰ − ۱۳]و [۱۵] اشاره کرد. یکی از مهم‌ترین این گراف‌ها، گراف اشتراکی است. ویژگی‌های متعدد گراف اشتراکی ایده‌آل‌های یک مجموعه جزئاً مرتب و مکمل آن در مقالات [۲]، [۳] و [۱۲] بررسی شده است.

در یک مجموعه جزئاً مرتب $(P, \leq)$ با کوچکترین عنصر ۰، عنصر $a \in P$ ، $a \neq ۰$ ، یک اتم نامیده می‌شود هرگاه رابطه $۰ \leq x \leq a$ ، ایجاب کند که $x = ۰$ یا $x = a$. مجموعه تمام اتم‌های P با $\mathrm{Atom}(P)$ نشان داده می‌شود. یک زیرمجموعه غیرتهی از P مانند I را یک ایده‌آل می‌نامیم هرگاه به ازای عناصر دلخواه $x, y \in P$ ، روابط $x \in I$ و $y \leq x$ ، نتیجه دهد $y \in I$. فرض کنید S یک زیرمجموعه P باشد. مجموعه تمام کران‌های بالا و پایین S به ترتیب با S^u و S^l مشخص می‌شوند. به عبارت دیگر

$$S^u = \{x \in P | s \leq x, \forall s \in S\}$$
$$S^l = \{x \in P | x \leq s, \forall s \in S\}$$

همچنین به ازای هر عنصر دلخواه a از P کران بالا و پایین $\{a\}$ را به ترتیب با $\{a\}^u$ و $\{a\}^l$ نشان می‌دهیم. برای مطالعه بیشتر درباره مجموعه‌های جزئاً مرتب کتاب [۱۴] به علاقمندان پیشنهاد می‌شود.

اکنون به تعاریف و نمادهای اساسی از نظریه گراف که در این مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت می‌پردازیم. گراف G از دو مجموعه $V(G)$ و $E(G)$ تشکیل شده است. $V(G)$ یک مجموعه ناتهی است که آن را مجموعه رئوس G می‌نامند و $E(G)$ مجموعه ایست از زوج‌های نامرتب از رئوس G که آن را مجموعه یال‌های G می‌نامند. برای نشان دادن اینکه $\{a, b\} \in E(G)$ ، از نماد $a - b$ استفاده می‌کنیم. گراف کامل به گرافی اطلاق می‌شود که هر دو رأس آن با هم مجاور باشند. گرافی که هیچ یالی نداشته باشد گراف پوچ نامیده می‌شود. گراف کامل n رأسی و گراف پوچ n رأسی به ترتیب با K_n و $\overline{K_n}$ مشخص می‌شوند. گراف G را همبند گویند هرگاه بین هر دو رأس متمایز آن یک مسیر وجود داشته باشد و در غیر اینصورت آن را ناهمبند می‌گویند. مسیر n رأسی و دور n رأسی را به ترتیب با P_n و C_n نشان می‌دهیم. گراف G را یک گراف t بخشی می‌نامیم هرگاه مجموعه رئوس آن به t مجموعه $X_۱, X_۲, \ldots, X_t$ افراز گردد به قسمی که به ازای $i = ۱, \ldots, t$ هیچ یالی هر دو سرش در مجموعه X_i نباشد. گرافی t بخشی که به ازای هر دو عدد متمایز i, j که $۱ \leq i, j \leq t$ تمام رئوس X_i به تمام رئوس X_j وصل باشد را گراف t بخشی کامل می‌نامیم. گراف t بخشی کامل با بخش‌های $X_۱, X_۲, \ldots, X_t$ که به ازای $۱ \leq i \leq t$ ، داریم $|X_i| = r_i$ ، را با $K_{r_۱, \ldots, r_t}$ نشان می‌دهیم. مکمل گراف G که با $\overline{G}$ مشخص می‌شود، گرافی است با مجموعه رئوس $V(G) = V(\bar{G})$ و دو رأس آن مجاورند اگر و تنها اگر در G مجاور نباشند. الحاق دو گراف $G_۱$ و $G_۲$ که با $G_۱ \vee G_۲$ نشان داده می‌شود گرافی است با مجموعه رئوس

$$V(G_۱ \vee G_۲) = V(G_۱) \cup V(G_۲)$$

و مجموعه یال‌های

$$E(G_۱ \vee G_۲) = E(G_۱) \cup E(G_۲) \cup \{(x, y) | x \in V(G_۱), y \in V(G_۲)\}$$

رأسی که هیچ یالی به آن متصل نباشد را رأس ایزوله می‌نامیم. زیر گرافی از G که مجموعه رئوس آن $\emptyset \neq H \subseteq V(G)$ و مجموعه یال‌هایش برابر مجموعه یال‌هایی از G باشد که دو سر آن در H است را زیر گراف القایی توسط H می‌نامیم. گراف تک دور گرافی است همبند که تنها شامل یک دور است. گراف خطی گراف G که با $L(G)$ نشان داده می‌شود، گرافی است با مجموعه رئوس $E(G)$ و دو رأس متناظر با یال‌های a, b با هم مجاورند هرگاه a, b در G در یک رأس

تلاقی داشته باشند. برای مطالعه بیشتر نظریه گراف علاقمندان می‌توانند به کتاب [۸]مراجعه نمایند.
در این مقاله، تمام مجموعه‌های جزئاً مرتب P که گراف اشتراکی ایده‌آل‌های آنها گراف خطی یا مکمل یک گراف خطی است را مشخص خواهیم کرد.

۲-گراف‌های اشتراکی خطی

این بخش را با تعریف زیر آغاز می‌کنیم.

تعریف۲-۱[۱]. گراف اشتراکی ایده‌آل‌های P که با$G(P)$ نشان داده می‌شود، گرافی است که رئوس آن ایده‌آل‌های غیربدیهیP است و دو رأس آن مانند I, J مجاورند اگر و تنها اگر $I \cap J \neq \{0\}$.
گراف $G(P)$ توسط افخمی و خشیارمنش در مقاله[۱] تعریف شده است. در سرتاسر این مقاله فرض می‌کنیم که$|P| \geq 3$. زیرا در غیر اینصورت مجموعه رئوس $G(P)$ و به طور معادل مجموعه رئوس گراف مکمل آن، مجموعه تهی است.
در ادامه، قضیه کلیدی ۲-۲ که به مرجع [۹] بر می‌گردد را به کار می‌بریم.

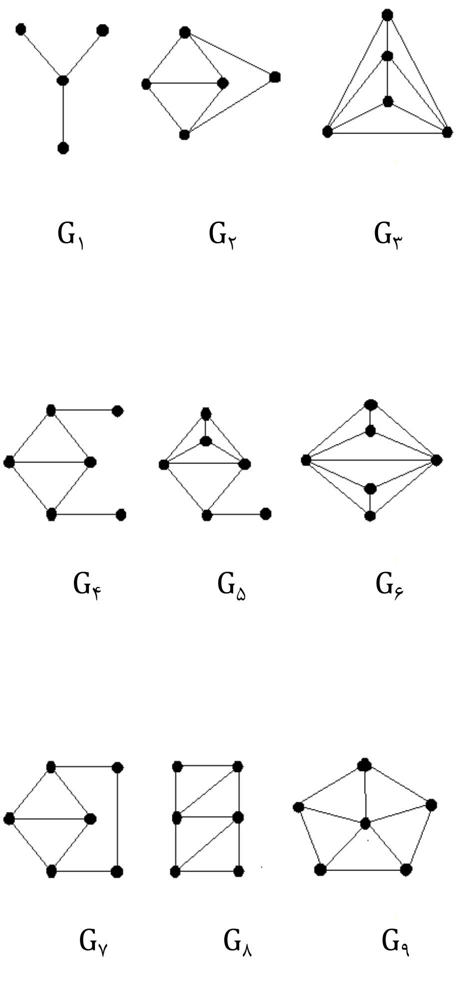
قضیه ۲-۲. یک گراف، گراف خطی است اگر و تنها اگر شامل زیرگراف القایی یکریخت با هیچ یک از گراف‌های شکل ۱ نباشد.

لم۲-۳. فرض کنیدP یک مجموعه جزئاً مرتب دارای0 باشد. اگر $G(P)$ گراف خطی باشد، آنگاه یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:
۱- $|Atom(P)| = 1,2$.
۲- $|Atom(P)| = 3$ و همچنین $P = Atom(P) \cup \{0\}$.

برهان. به برهان خلف فرض کنید $a_1, a_2, a_3, a_4 \in Atom(P)$ یا اینکه $a_1, a_2, a_3 \in Atom(P)$ و $P \neq Atom(P) \cup \{0\}$. توجه می‌کنیم که $\{0, a_1, a_2, a_3\}$ به ازای $|Atom(P)| = 3$ یک رأس$G(P)$ است، زیرا $P \neq Atom(P) \cup \{0\}$.
اکنون زیرگراف القایی روی رئوس$\{0, a_1\}$، $\{0, a_2\}$، $\{0, a_3\}$ و $\{0, a_1, a_2, a_3\}$ با$K_{1,3}$ یکریخت است که طبق قضیه ۲-۲ تناقض است.□

لم۲-۴. فرض کنیدP یک مجموعه جزئاً مرتب دارای0 باشد که $|Atom(P)| = 1$. آنگاه عدد صحیح مثبتی مانند t موجود است به قسمی که $G(P) = L(K_{1,t})$.

شکل ۱.

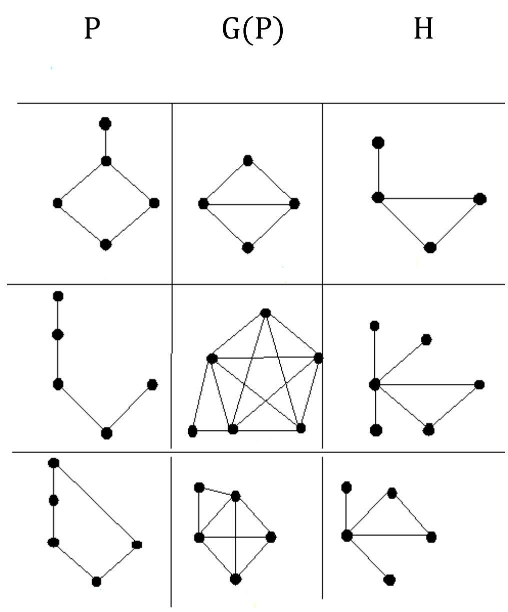


برهان. واضح است که تنها اتم P عضو تمام رئوس $G(P)$ است و لذا $G(P)$ گرافی کامل است و حکم به صورت بدیهی بدست می‌آید. □

لم۲-۵. فرض کنید P یک مجموعه جزئاً مرتب دارای ۰ باشد که $\mathrm{Atom}(P) = \{a_1, a_2\}$. آنگاه $G(P)$ گراف خطی است اگر و تنها اگر $P = \{0, a_1, a_2\}$ یا $|P| = 4$ یا $|P| = 5$ و P یکی از مجموعه‌های جزئاً مرتب موجود در شکل ۲ است.

برهان. فرض کنید $A = \{I \in V(G(P)) | a_1 \in I, a_2 \notin I\}$ و $B = \{I \in V(G(P)) | a_2 \in I, a_1 \notin I\}$ و $C = \{I \in V(G(P)) | a_1, a_2 \in I\}$. همچنین فرض کنید $|A| = m, |B| = n$ و $|C| = t$. اگر $t \geq 1$، آنگاه $G(P) = K_t \vee (K_m \cup K_n)$ و اگر C تهی باشد، آنگاه $G(P) = K_m \cup K_n$.

شکل ۲.



ابتدا فرض کنید $G(P)$ گراف خطی باشد. اگر $|P| \geq 6$، آنگاه طبق اصل لانه کبوتری، دو عنصر از P مانند b, c موجودند به قسمی که $b, c \in \{a_1\}^u$. در اینصورت ایده‌آل‌های $\{0, a_1, a_2\}, \{0, a_1, a_2\} \cup \{b\}^l$ و $\{0, a_1, a_2\} \cup \{c\}^l$ همگی عناصری از C هستند و لذا $G(P)$ دارای زیرگرافی یکریخت با G_3 در شکل ۱، است که تناقض است. پس $|P| \leq 5$. اکنون به راحتی نتیجه می‌شود که اگر $|P| = 5$، آنگاه P یکی از مجموعه‌های جزئاً مرتب موجود در شکل ۲ یا ۳ است. اگر P یکی از مجموعه‌های جزئاً مرتب موجود در شکل ۲ باشد، که طبق شکل ۲، در هر یک از حالات رابطه $G(P) = L(H)$ را داریم و در نتیجه $G(P)$ گرافی خطی خواهد بود. در مورد هر یک از مجموعه‌های جزئاً مرتب شکل ۳، ایده‌آل‌های $\{0, a_1, a_2\}$ و $\{0, a_1, a_2, b\}$ و $\{0, a_1, a_2, c\}$ عناصری از C هستند و مجددا $G(P)$ دارای زیرگرافی یکریخت با G_3 است که تناقض است. لذا اگر $|P| = 5$، آنگاه P یکی از مجموعه‌های جزئاً مرتب موجود در شکل ۲ است. اکنون فقط دو حالت $P = \{0, a_1, a_2\}$ و $|P| = 4$ می‌ماند. اگر $P = \{0, a_1, a_2\}$ آنگاه

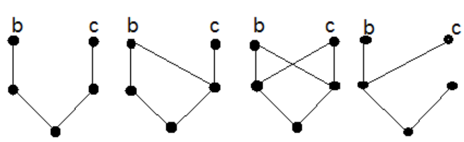
$$|A| = |B| = 1, |C| = 0$$

و داریم:

$$G(P) = K_1 \cup K_1 = L(K_2 \cup K_2)$$

همچنین اگر $|P| = 4$ آنگاه دو حالت زیر ممکن است:

شکل ۳.



حالت ۱. عنصری مانند $b \in P$ موجود است به قسمی که $P = \{b\}^l$. در این حالت $|A| = |B| = |C| = ۱$ و داریم:

$G(P) = P_۳ = L(P_۴)$

و لذا حکم برقرار است.

حالت ۲. به ازای هر عنصر مانند $b \in P$ رابطه $P \neq \{b\}^l$ را داریم. پس فقط مجموعه جزئاً مرتب شکل ۴ اتفاق می‌افتد که در این حالت گراف $G(P)$ رسم شده و رابطه $G(P) = L(H)$ برقرار است. لذا $G(P)$ گراف خطی است.

اثبات عکس لم واضح است.

لم ۲-۶. فرض کنید P یک مجموعه جزئاً مرتب دارای ۰ باشد که $Atom(P) = \{a_۱, a_۲, a_۳\}$ و $P = Atom(P) \cup \{۰\}$، آنگاه $G(P)$ گراف خطی است.

برهان. گراف $G(P)$ در شکل۵ رسم شده است. همچنین واضح است $G(P) = L(H)$ که در شکل۵ رسم شده است.□

قضیه ۲-۷. فرض کنید P یک مجموعه جزئاً مرتب دارای ۰ باشد. آنگاه $G(P)$ گراف خطی است اگر و تنها اگر یکی از حالات زیر اتفاق افتد:

۱- $|Atom(P)| = ۱$.

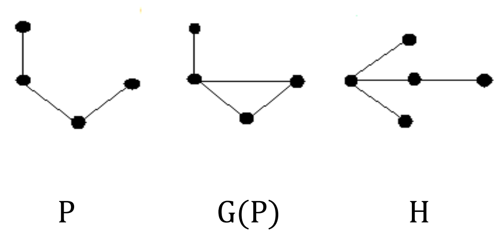
۲- $|Atom(P)| = ۲$ و $|P| = ۳$.

۳- $|Atom(P)| = ۲$ و $|P| = ۴$.

۴- $|Atom(P)| = ۲$، $|P| = ۵$ و P یکی از مجموعه‌های جزئاً مرتب موجود در شکل ۲ است.

۵- $|Atom(P)| = ۳$ و $|P| = ۴$.

شکل۴.



برهان. به وضوح با استفاده از لم‌های ۲-۲، ۲-۳، ۲-۴، ۲-۵ و ۲-۶ بدست می‌آید. □

تعریف۲-۸. [۱۲] مکمل گراف اشتراکی ایده‌آل‌های P که با نماد $\Gamma(P)$ نشان داده می‌شود، گرافی است که رئوس آن ایده‌آل‌های غیربدیهی P است و دو رأس آن مانند I, J مجاورند اگر و تنها اگر $I \cap J = \{۰\}$.

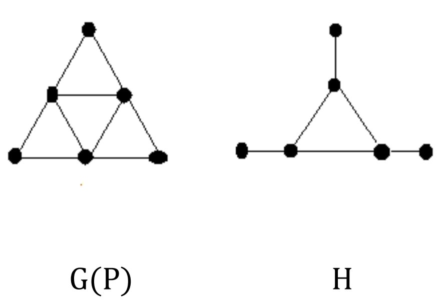
لازم به ذکر است که گراف $\Gamma(P)$ در مقاله [۱۲] تعریف شده و ویژگی‌های متعدد آن نیز بررسی شده است.

لم ۲-۹. فرض کنید P یک مجموعه جزئاً مرتب دارای ۰ باشد. اگر $\Gamma(P)$ یک گراف خطی باشد، آنگاه $|Atom(P)| \leq ۳$.

برهان. با برهان خلف فرض کنید: $a_۱, a_۲, a_۳, a_۴ \in Atom(P)$. آنگاه زیرگراف القایی روی رئوس $\{۰, a_۱\}$، $\{۰, a_۲\}$، $\{۰, a_۲, a_۳\}$ و $\{۰, a_۲, a_۳, a_۴\}$ تشکیل $K_{۱,۳}$ می‌دهد که تناقض است. □

لم۲-۱۰. فرض کنید P یک مجموعه جزئاً مرتب دارای ۰ باشد که $|Atom(P)| = ۱$. آنگاه $\Gamma(P)$ یک گراف خطی است و بعلاوه عدد صحیح مثبتی مانند t موجود است که $\Gamma(P) = L(\cup_{i=۱}^{t} K_۲)$.

شکل ۵.



برهان. حکم به صورت بدیهی از این واقعیت بدست می‌آید که $\Gamma(P)$ گراف پوچ است. پس عدد صحیح و مثبتی مانند t موجود است به قسمی که $\Gamma(P) = \overline{K}_t$ و لذا $\Gamma(P) = L(\cup_{i=۱}^{t} K_۲)$. □

لم۲-۱۱. فرض کنید P یک مجموعه جزئاً مرتب دارای۰ باشد و $Atom(P) = \{a_۱, a_۲\}$. آنگاه $\Gamma(P)$ یک گراف خطی است اگر و تنها اگر $|\{a_۱\}^u \setminus \{a_۲\}^u| \le ۲$ و $|\{a_۲\}^u \setminus \{a_۱\}^u| \le ۲$

برهان. با برهان خلف و بدون کاستن از کلیت فرض کنید $|\{a_۱\}^u \setminus \{a_۲\}^u| \ge ۳$. در این‌صورت دو عنصر از P مانند $b, c \in \{a_۱\}^u \setminus \{a_۲\}^u$ موجودند به قسمی که $a_۲ \notin \{b\}^l \cup \{c\}^l$ و بعلاوه $a_۱ \notin \{b, c\}$.اکنون زیرگراف القایی روی رئوس $\{۰, a_۲\}$،$\{۰, a_۱\}$، $\{b\}^l$ و $\{c\}^l$ تشکیل $K_{۱,۳}$ می‌دهد که طبق قضیه ۲-۲ یک تناقض است.

برعکس، فرض کنید $|\{a_۱\}^u \setminus \{a_۲\}^u| \le ۲$ و $|\{a_۲\}^u \setminus \{a_۱\}^u| \le ۲$. توجه می‌کنیم مجموعه $\{I \in V(\Gamma(P)) | a_۱, a_۲ \in I\}$ مجموعه رئوس ایزوله $\Gamma(P)$ است. همچنین دقت می‌کنیم که اگر $P = \{۰, a_۱, a_۲\}$، آنگاه مجموعه رئوس ایزوله $\Gamma(P)$ تهی است و بالعکس. واضح است که اگر $P = \{۰, a_۱, a_۲\}$ ، آنگاه

$$\Gamma(P) = K_۲ = L(P_۳)$$

پس در ادامه فرض کنید $\Gamma(P)$ به تعداد $n \ge ۱$ رأس ایزوله داشته باشد. بدون کاستن از کلیت سه حالت زیر اتفاق می‌افتد:

حالت۱. $|\{a_۱\}^u \setminus \{a_۲\}^u| = ۱$ و $|\{a_۲\}^u \setminus \{a_۱\}^u| = ۱$. در این‌صورت $\Gamma(P) = P_۲ \cup \overline{K_n} = L(P_۳ \cup (\cup_{i=۱}^{n} K_۲))$ و حکم برقرار است.

حالت۲. $|\{a_۱\}^u \setminus \{a_۲\}^u| = ۱$ و $|\{a_۲\}^u \setminus \{a_۱\}^u| = ۲$. در این حالت داریم: $\Gamma(P) = P_۳ \cup \overline{K_n} = L(P_۴ \cup (\cup_{i=۱}^{n} K_۲))$ و در نتیجه حکم برقرار است.

حالت۳. $|\{a_۱\}^u \setminus \{a_۲\}^u| = ۲$ و $|\{a_۲\}^u \setminus \{a_۱\}^u| = ۲$. در این حالت نیز خواهیم داشت:

$$\Gamma(P) = C_۴ \cup \overline{K_n} = L((\cup_{i=۱}^{n} K_۲) \cup C_۴)$$

و لذا حکم بدست می‌آید. □

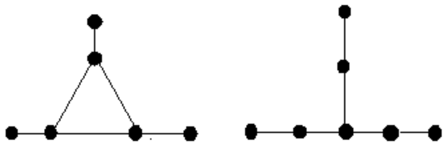
لم ۲-۱۲. فرض کنید P یک مجموعه جزئاً مرتب دارای۰ باشد که $|Atom(P)| = ۳$. آنگاه $\Gamma(P)$ یک گراف خطی است اگر و تنها اگر یکی از حالات زیر اتفاق افتد:

۱- $P = Atom(P) \cup \{۰\}$.

۲- عددی طبیعی مانند n موجود است به قسمی که $P = Atom(P) \cup \{۰\} \cup \{b_۱, \dots, b_n\}$ و به ازای هر $a \in Atom(P)$ رابطه $\{b_۱, \dots, b_n\} \subseteq \{a\}^u$ برقرار است.

برهان. فرض کنید $Atom(P) = \{a_۱, a_۲, a_۳\}$ و $\Gamma(P)$ گراف خطی باشد. واضح است که اگر $P = Atom(P) \cup \{۰\}$ ، آنگاه $\Gamma(P)$ گراف تک دور است که تنها دور آن مثلث است که به هر رأس مثلث یک رأس درجه یک متصل است. به بیان دیگر تنها دور $\Gamma(P)$ عبارتست از $\{۰, a_۱\} - \{۰, a_۲\} - \{۰, a_۳\} - \{۰, a_۱\}$ و سه رأس درجه یک آن نیز عبارتست از $\{۰, a_۱, a_۲\}$، $\{۰, a_۱, a_۳\}$ و $\{۰, a_۲, a_۳\}$. اکنون باتوجه به شکل۶ $\Gamma(P)$ گراف خطی H است و حکم برقرار است.

شکل ۶.



$\Gamma(P)$ $\quad$ H

پس در ادامه فرض کنید $P \neq Atom(P) \cup \{0\}$.
دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

حالت ۱. به ازای هر دو عنصر متمایز i, j که $1 \leq i, j \leq 3$، $\{a_i\}^u \cap \{a_j\}^u = \emptyset$. بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد که عنصری از P مانند $b \in \{a_1\}^u$ موجود است به قسمی که $b \notin \{a_2\}^u \cup \{a_3\}^u$. در این‌صورت زیرگراف القایی روی رئوس $\{0, a_1\}, \{b\}^l, \{0, a_2\}, \{0, a_3\}$ و $\{0, a_2, a_3\}$ با G_2 در شکل ۱، یکریخت است که طبق قضیه ۲-۲ تناقض است.

حالت۲. دو عنصر متمایز مانند i, j که $1 \leq i, j \leq 3$ موجودند به قسمی که $\{a_i\}^u \cap \{a_j\}^u \neq \emptyset$. بدون کاستن از کلیت فرض کنید $b \in \{a_1\}^u \cap \{a_2\}^u$. آنگاه هنگامی که $b \notin \{a_3\}^u$ زیرگراف القایی روی رئوس
$\{0, a_3\}, \{0, a_1, a_2\}, \{b\}^l, \{0, a_1\}$
تشکیل $K_{1,3}$ می‌دهد که با قضیه۲-۲ تناقض دارد.
پس $b \in \{a_3\}^u$. این نشان می‌دهد که

$$\{a_1\}^u \cap \{a_2\}^u \cap \{a_3\}^u = \{a_1\}^u \cap \{a_2\}^u$$

به طور مشابه می‌توان به ازای هر i و j متمایز چنین فرض کرد که

$$\{a_1\}^u \cap \{a_2\}^u \cap \{a_3\}^u = \{a_i\}^u \cap \{a_j\}^u$$

فرض کنید

$$\{a_1\}^u \cap \{a_2\}^u \cap \{a_3\}^u = \{b_1, \dots, b_n\}$$

اگر $n = 1$ آنگاه $\Gamma(P)$ دقیقاً همان گراف رسم شده در شکل ۶ است و رابطه $\Gamma(P) = L(H)$ برقرار است. همچنین اگر $n \geq 2$ ، $\Gamma(P)$ اجتماع تعدادی رأس ایزوله و گراف رسم شده در شکل ۶ است و لذا $\Gamma(P)$ گراف خطی اجتماع H (که در شکل ۶ رسم شده است) و تعدادی K_2 است و در نهایت به حکم رسیدیم.
اثبات عکس لم نیز واضح است.□

قضیه ۲-۱۳. فرض کنید P یک مجموعه جزئاً مرتب دارای ۰ باشد. در این‌صورت $\Gamma(P)$ یک گراف خطی است اگر و تنها اگر یکی از حالات زیر اتفاق افتد:

۱- $|Atom(P)| = 1$.

۲- $Atom(P) = \{a_1, a_2\}$، $|\{a_1\}^u \setminus \{a_2\}^u| \leq 2$ و $|\{a_2\}^u \setminus \{a_1\}^u| \leq 2$

۳- $|Atom(P)| = 3$ و $P = Atom(P) \cup \{0\}$.

۴- $|Atom(P)| = 3$ و عددی طبیعی مانند n موجود است به قسمی که $P = Atom(P) \cup \{0\} \cup \{b_1, \dots, b_n\}$ و به ازای هر $a \in Atom(P)$ رابطه $\{b_1, \dots, b_n\} \subseteq \{a\}^u$ برقرار است.

برهان. طبق لم‌های ۲-۹،۲-۱۰،۲-۱۱ و ۲-۱۲ حکم بدست می‌آید. □

نتیجه‌گیری

در این مقاله، طبق قضایای۲-۷ و ۲-۱۳ تمام مجموعه‌های جزئاً مرتب P که $G(P)$ یا $\Gamma(P)$ متناظر با آنها گراف خطی است مشخص شده است. به بیان دیگر، تمام مجموعه‌های جزئاً مرتب P که گراف خطی یا مکمل یک گراف خطی هستند، تعیین شده است.

منابع

[۱] F. Heydari, The complement of the M-intersection graph of ideals of a ring (in Persian), Journal of New Researches in Mathematics ٦ (٢٨) (٢٠٢١) ١٧–٢٢.

[۲] M. Afkhami, K. Khashyarmanesh, The intersection graph of ideals of a poset, Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, Vol. ۶, No. ۳ (۲۰۱۴) ۱۴۵۰۰۳۶.

[۳] M. Afkhami, K. Khashyarmanesh, F. Shahsavar, On the intersection graphs associated to posets, Discussiones Mathematicae General Algebra and Applications ۴۰ (۲۰۲۰) ۱۰۵–۱۱۷.

[۴] S. Akbari, H.A. Tavallaee, S. Khalashi Ghezelahmad, Intersection graph of submodules of a module, Journal of Algebra and Its Applications ۱۱ (۱) (۲۰۱۲), Article No. ۱۲۵۰۰۱۹.

[۵] S. Akbari, H.A. Tavallaee, S. Khalashi Ghezelahmad, On the complement of the intersection graph of submodules of a module, Journal of Algebra and Its Applications Vol. ۱۴, No. ۸ (۲۰۱۵) ۱۵۵۰۱۱۶.

[۶] S. Akbari, S. Khojasteh, Commutative rings whose cozero-divisor graphs are unicyclic or of bounded degree, Comm. Algebra, ۴۲, (۲۰۱۴) ۱۵۹۴–-۱۶۰۵.

[۷] Z. Barati, Line zero divisor graphs, Journal of Algebra and Its Applications (٢٠٢١) ٢١٥٠١٥٤.

[۸] J.A. Bondy, U.S.R. Murty, Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics, ۲۴۴ Springer, New York, ۲۰۰۸.

[۹] L. W. Beineke, Characterizations of derived graphs, J. Comb. Theory ۹ (۱۹۷۰) ۱۲۹–۱۳۵.

[۱۰] F. Heydari, The M-intersection graph of ideals of a commutative ring, Discrete Mathematics, Algorithms and ApplicationsVol. ۱۰,No.۳(۲۰۱۸)۱۸۵۰۰۳۸.

[١١] S. Khojasteh, Line cozero-divisor graphs, Le matematiche, Vol. ٧٧, No. ٢ (٢٠٢٢) ٢٩٣–٣٠٦ doi: ١٠,٤٤١٨/٢٠٢٢,٧٧,٢,٣.

[١٢] S. Khojasteh, The complement of the intersection graph of ideals of a poset, Journal of Algebra and Its Applications, accepted ٢٠٢٢, doi.org/١٠,١١٤٢/S٠٢١٩٤٩٨٨٢٣٥٠٢٣٦٥.

[۱۳] S. Khojasteh, The intersection graph of ideals of $\mathbb{Z}_m$, Discrete Mathematics, Algorithms and Applications Vol. ١١, No. ٤ (٢٠١٩)١٩٥٠٠٣٧.

[۱۴] S. Rudeanu, Sets and Ordered Structures, University of Bucharest, Romania, ۲۰۱۲.

[۱۵] B. Zelinka, Intersection graphs of lattices, Math. Slovaca ۲۳ (۱۹۷۳) ۲۱۶–۲۲۲.