دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال نهم، شماره چهل یکم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۲
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

محاسبه حد بالای سرعت انجام محاسبات و نرخ رشد پیچیدگی با استفاده از روش ریاضی نظریه اختلال

حسین باقری[۱]، محمدرضا تنهایی اهری[۲*]

[۱و۲] گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۱۲/۲۰   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۲/۲۵

چکیده

سرعت انجام محاسبه و میزان توانایی در انجام محاسبات برای یک سیستم محاسباتی دو سوال بنیادی در علوم رایانه می باشند همچنین مفهوم پیچیدگی انجام محاسبه به زبان ماشین و سنجه ای که برای پیچیدگی ارایه می شود، کمیت های مهمی هستند. در این مقاله، با استفاده از روش های ریاضی و به صورت مشخص با بهره جستن از نظریه اختلال، نرخ رشد پیچیدگی انجام محاسبات را برای یک نوسانگر ناهماهنگ محاسبه می کنیم. علت انتخاب نوسانگر به این دلیل است که اکثر سیستم های فیزیکی را می توان با نوسانگر شبیه سازی کرد. همچنین حداکثر تحول دینامیکی حالت های کوانتومی را که میزان محاسبه را تغییر می دهد، محاسبه می کنیم و به عنوان دستاورد مهم این کار نشان می دهیم که برای اختلال مرتبه زوج، میزان پیچیدگی افزایش می یابد، در حالی که برای اختلال مرتبه فرد نرخ، رفتار کاهشی خواهیم داشت. این روش می تواند الگوی نظری برای حد بالای انجام محاسبات در نظر گرفته شود.

واژه‌های کلیدی: پیچیدگی، اختلال، نوسانگر ناهماهنگ، تحول دینامیکی.

* عهده‌دار مکاتبات:

Email:mtanhayi@ipm.ir

۱- مقدمه

سرعت پردازش اطلاعات و میزان ظرفیت پردازش اطلاعات توسط رایانه، دو موضوع اساسی حوزه عملیات محاسباتی و پردازش اطلاعات می‌باشند. مشکل محدودیت در سرعت محاسبه و میزان حافظه، مسائلی چالش برانگیز هستند که می‌توان آنها را به ترتیب با انرژی و تعداد درجه‌های آزادی که سیستم می‌تواند به دست آورد، مشخص کرد. به این ترتیب که حد مجاز سرعت محاسباتی برای یک سیستم معین را می‌توان به حداکثر تعداد حالت‌های مشخص و مجزایی که این سیستم در واحد زمان از آن می‌گذرد، نسبت داد که این حالات متعامد فرض شده‌اند. منظور از تعامد حالت‌ها همان مفهوم تعامد بردارهای حالت در ریاضی می‌توان تلقی کرد. در علم فیزیک و به صورت مشخص براساس مکانیک کوانتومی، محدودیتی در سرعت تحول سیستمهای کوانتومی وجود دارد که می‌توان بر آن اساس، حداقل زمانی که یک سیستم نیاز دارد تا از حالت اولیه به حالت دیگر تبدیل برود را محاسبه نماییم [۱]. در واقع سرعت پردازش اطلاعات را می‌توان به تعداد حالت‌های مجزای متعامدی که سیستم در واحد زمان از آن می گذرد، ترجمه کرد. حالت‌های متعامد بر اساس یک سازکار ریاضی تحول می‌یابند و از این نظر می‌توان گفت که سرعت پردازش توسط ریاضیات و مکانیک کوانتوم مشخص می‌شود. لذا محاسبه محدودیت سرعت با استفاده از مکانیک کوانتومی قابل بررسی می‌باشد.

بر اساس آموزه‌های علم فیزیک و به صورت مشخص با استفاده از متد هولوگرافی کارهای جالبی به جهت ارتباط علم سیاه‌چاله‌ها و نظریه اطلاعات وجود دارد؛ برای مثال یک سیاهچاله را می‌توان به عنوان یک فروشگاه داده یا یک دستگاه محاسباتی در نظر گرفت که مقدار مشخصی از انرژی را فشرده می‌کند و در واقع آن دستگاه می‌تواند تعداد مشخصی عملیات را در ثانیه انجام دهد [۲].

علاوه براین، در پردازش اطلاعات، یک حد بالای نظری وجود دارد که به طور دقیق تر برای یک سیستم کوانتومی با میانگین انرژی معین E، حد بالای نظری را می‌توان برای تعداد عملیات‌هایی که در یک ثانیه می‌تواند انجام دهد را از رابطه $\frac{2E}{\pi}$ بدست آورد. این حد، به حد لوید[۲] معروف است [۳]. بین فیزیک سیاهچاله و نظریه اطلاعات کوانتومی تحقق عینی وجود دارد. بکنشتاین[۳] [۴]و[۵] استدلال کرده است از دیدگاه نظری، سیاهچاله ها دارای یک بیشینه از ذخیره اطلاعات هستند؛ این جمله به این مفهوم است که میزان ذخیره اطلاعات که به اصطلاح حافظه دستگاه نامیده می‌شود، دارای حد می‌باشد. بنابراین درک اطلاعات کوانتومی از دیدگاه نظری مسئله جالبی و چالش برانگیزی خواهد بود. جالب‌تر آنکه سیاه‌چاله در اصل می‌تواند دارای مجموعه‌ای از حدهای بنیادی در چگالی، آنتروپی و پیچیدگی محاسباتی باشند. آنتروپی و پیچیدگی در همتنیدگی دو مفهوم مهم در فیزیک نظری هستند که ممکن است پلی بین قوانین بنیادی فیزیک و نظریه اطلاعات در نظر گرفته شوند [۶]. اساساً، آنتروپی درهمتنیدگی معیاری از درجه آزادی در یک سیستم بهم جفت شده است در حالی که پیچیدگی میزان سختی انجام یک کار فیزیکی را اندازه گیری می‌کند [۷]. از طرف دیگر در علوم رایانه، پیچیدگی محاسباتی یا در اصل پیچیدگی یک عملکرد یک تعریف ساده دارد: که میزان منابع مورد نیاز برای به جریان انداختن مسئله یا حداقل پیچیدگی‌های لازم برای همه الگوریتم های ممکن در این مسئله است. از طرف دیگر در یک کار بنیادی، براون و همکارانش[۴] [۸] ارتباط شگفت انگیزی بین کنش داخل سیاه‌چاله و کران بالای پردازش کشف کردند. در حقیقت آنچه مورد بحث

[2] Lloyd's bound
[3] Bekenstein
[4] Brown *et al*

قرار گرفته است به شرح زیر است: کنش داخل سیاه چاله با سرعتی دقیقا برابر با $\frac{2E}{\pi}$ افزایش می‌یابد و همین امر باعث شد که آنها نتیجه بگیرند که سیاه چاله‌ها با سریعترین سرعت ممکن پیچیدگی ایجاد می‌کنند. نظریه اطلاعات کوانتومی در واقع یک جنبه کاربردی از مکانیک کوانتومی است و نقش مهمی در پیشرفت علوم رایانه‌ای دارد. جالبی این مطلب در اینجاست که این یک بحث درباره مفهوم عینی بین فیزیک سیاه‌چاله و نظریه اطلاعات کوانتومی می‌باشد. یعنی در مطالعه فیزیک سیاهچاله‌ها، نظریه اطلاعات کوانتومی ممکن است نقش مهمی داشته باشد. ازاین رو سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که: اگر سیستم مختل شود این حدود بنیادین چگونه تغییر خواهند کرد؟

علاوه بر این مکانیک کوانتومی دارای یک تعریف استاندارد از پیچیدگی است [۹]. در حقیقت پیچیدگی معیاری است که نشان می دهد انجام کار چقدر دشوار است. در اصل، پیچیدگی یک حالت کوانتومی است که ازحوزه محاسباتی کوانتومی سرچشمه می‌گیرد و با تعداد عملگرهای یکانی اساسی مورد نیاز برای ایجاد یک حالت مطلوب از یک حالت مرجع، مشخص می‌شود [۱۰].

همچنین این استدلال مطرح شد که پیچیدگی کوانتومی به ما کمک می‌کند تا برخی از ویژگی‌های خاص رفتار زمان دور هندسه‌های سیاه‌چاله ابدی را به تصویر بکشیم [۱۱].

در ادامه از حد لوید به عنوان زیر بنای روابط پیچیدگی هولوگرافیک برای ایجاد تمایز میان متعامدسازی درنظر گرفته شده است و استدلال می شود که این مفاهیم برای تشخیص پیچیدگی هولوگرافی مفید هستند.

در حقیقت میزان اطلاعاتی که یک سیستم فیزیکی می‌تواند ذخیره یا پردازش کند به طور مستقیم با تعداد حالات قابل دسترسی سیستم در ارتباط است.

دراین مقاله در بخش ۲، زمان تعامدسازی را دریک نوسانگر ساده ناهماهنگ محاسبه می‌کنیم. در ادامه در بخش ۳ به بررسی حد لوید برای یک سیستم کوانتومی در شرایط مختلف می‌پردازیم. سخنان پایانی در بخش ۴ آورده شده است. سرانجام مقاله را با یک پیوست به اتمام می‌رسانیم که در آن با محاسبه صریح ریاضی نشان می‌دهیم که نرخ رشد پیچیدگی برای یک نوسانگر ناهماهنگ باوارد کردن نظریه اختلال مرتبه زوج افزایش می‌یابد، در حالیکه این نرخ با واردکردن اختلال مرتبه فرد، کاهش پیدا می‌کند.

۲- محاسبه زمان تعامد حالت‌ها در نوسانگر ناهماهنگ

در زمینه پردازش اطلاعات و اندازه‌گیری، تحول حالت سیستم به یک حالت متعامد و چگونگی نرخ رشد حالت دو مسئله مهم هستند که بسیار قابل توجهند. از این منظر انتقال از یک حالت به یک حالت متعامد ممکن است به عنوان یک مرحله ابتدایی از یک فرایند محاسباتی در نظر گرفته شود. در این راستا حداکثر نرخ تحول یک سیستم کوانتومی را می‌توان با حداقل زمانی که یک سیستم برای تحول از یک حالت اولیه به حالت متعامد بر خود نیاز دارد، مشخص کرد.

اکنون می‌خواهیم حداقل زمان لازم برای اینکه حالت سیستم فیزیکی معینی در یک تحول به حالت متعامد خود برود را محاسبه نماییم. برای این کار حالت دلخواه را به صورت برهم نهی از ویژه مقادیر انرژی به صورت رابطه (۱) نمایش می‌دهیم.

$$\left|\psi_0\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left|n\right\rangle \qquad (۱)$$

دراینجا فرض کردیم که سیستم دارای طیف گسسته است. اکنون با استفاده از روشی تحول حالت‌ها، می‌توان تحول زمانی ψ_0 را به صورت

رابطه (۲) نوشت:

$$\left|\psi_{\tau_\perp}\right\rangle = e^{-iH\tau_\perp}\,|\psi_0\rangle \sum_{n=0}^{\infty} c_n\; e^{-iE_n\tau_\perp}\,|n> \qquad (۲)$$

برای پیدا کردن حداقل زمان تعامد رابطه زیر را تعریف می‌کنیم

$$S(\tau_\perp) \equiv \left\langle \psi_0 | \psi_{\tau_\perp} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2\;\; e^{-iE_n\tau_\perp} \qquad (۳)$$

پس از انجام برخی عملیات جبری و استفاده از حل معادله $S(\mathcal{T}_\perp) = 0$ و استفاده از روابط جبری برای $x \geq 0$ می‌توانیم حداقل زمان $\tau_\perp$ را محاسبه کنیم. با استفاده از مفهوم بالا و همچنین رابطه زیر

$$1 - \frac{2}{\pi}\left[x + \sin(x)\right] \leq \cos(x) \qquad (۴)$$

می‌توان نوشت

$$1 - \frac{2E\tau_\perp}{\pi}\frac{2}{\pi} Im(s) \leq Re(s)$$

لازم به ذکر است که در رابطه بالا $\boldsymbol{E}$ میانگین انرژی حالت ψ_0 است. با تحمیل شرایط تعامد با استفاده از رابطه $\mathrm{ReS}(\mathcal{T}_\perp) = \mathrm{ImS}(\tau_\perp) = 0$ ، به حداقل زمان $\tau_\perp$ مورد نیاز که سیستم را از ψ_0 ، به حالت متعامد می‌برد، می‌رسیم [۱۱] که از رابطه (۶) محاسبه می‌شود

$$= \frac{\pi}{2E} \qquad (۶)$$

این بدان معنی است که سیستم کوانتومی با انرژی $\boldsymbol{E}$ برای رفتن از یک حالت به یک حالت متعامد، نیاز به حداقل زمان $\mathcal{T}_\perp$ دارد. درواقع این قضیه مارگولوس- لویتین[۵] [۱۲] است که یک حد بنیادی در محاسبات کوانتومی را بیان می‌کند.

اکنون زمان آن فرا رسیده است که حداقل زمان تحول را برای یک نوسانگر هارمونیک ساده با اختلال زوج و فرد را بررسی کنیم.

برای هامیلتونین یک بعدی می توان نوشت.

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \lambda_0 x^{2k-1} + \lambda_e x^{2k} \qquad (۷)$$

در اینجا $\lambda_e \ll 1$ و $\lambda_0 \geq 0$ و k یک عدد صحیح مثبت است. در ابتدا یک نوسانگر ناهماهنگ مرتبه چهارم را که با میدان الکتریکی خارجی مختل کرده ایم را مورد مطالعه قرار می‌دهیم (تعمیم کلی در ضمیمه ارائه شده است).

با استفاده از عبارت $H_p = \mathrm{q\varepsilon x} + \lambda \mathrm{x}^4$ که منجر به هامیلتونی (۸) می‌شود، می‌توان تأثیر میدان الکتریکی خارجی بر نوسانگر ناهماهنگ باردار را بررسی کرد:

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + q\varepsilon x + \lambda x^4 \qquad (۸)$$

دراینجا m و q به ترتیب جرم و بار سیستم هستند. برای پایین‌ترین مرتبه انرژی غیر صفر، می‌توان تصحیح انرژی را به صورت فرمول (۹) نوشت

$$E_n = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{3\lambda}{4m^2\omega^2}\left[2n^2 + 2n + 1\right] - 2m\frac{\omega_e^2}{\omega^2} \qquad (۹)$$

که n عدد صحیح مثبت یا صفر است و λ یک پارامتر حقیقی کوچک مثبت است، همچنین ω_e به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود

$$\frac{q\varepsilon}{2m} \equiv \omega_e \qquad (۱۰)$$

برای محاسبه میانگین انرژی در حالت Ψ ، فرض می‌کنیم سیستم ما دقیقاً از N حالت متعامد دو به دو عمود برهم در یک زمان ثابت τ عبور می‌کند. در نتیجه ویژه تابع را می توان به صورت رابطه (۱۱) نشان داد.

---

[5] Margolus -Levitin

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} c_n |n\rangle \qquad (۱۱)$$

مقدار چشم داشتی انرژی برای یک نوسانگر ناهماهنگ مرتبه چهار در حضور میدان الکتریکی، از رابطه (۱۲) بدست می‌آید:

$$\boldsymbol{E} = \langle \Psi | H | \Psi \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2 \left[\begin{array}{l} \omega\left[n+\frac{1}{2}\right] + \frac{3\lambda}{4\omega^2 m^2}\left[2n^2+2n+1\right] \\ -2m\frac{\omega_e^2}{\omega^2} \end{array} \right] \qquad (۱۲)$$

برای آسان‌تر شدن محاسبات، می‌توان مجموعه تحولاتی را در نظر گرفت که در یک چرخه دقیق از N حالت که دوبه دو بر هم عمود هستند با آهنگ ثابت در زمان τ عبور می‌کنند. دراین حالت برای N های بزرگ‌داریم $c_n = \sqrt{\frac{۱}{N}}$،بنابراین می‌توان نوشت:

$$\boldsymbol{E} = \langle \Psi | H | \Psi \rangle = \frac{1}{N}\left[\sum_{n=0}^{N-1} \left(\begin{array}{l} \omega\left[n+\frac{1}{2}\right] + \frac{3\lambda}{4\omega^2 m^2}\left[2n^2+2n+1\right] \\ -2m\frac{\omega_e^2}{\omega^2} \end{array} \right) \right]$$

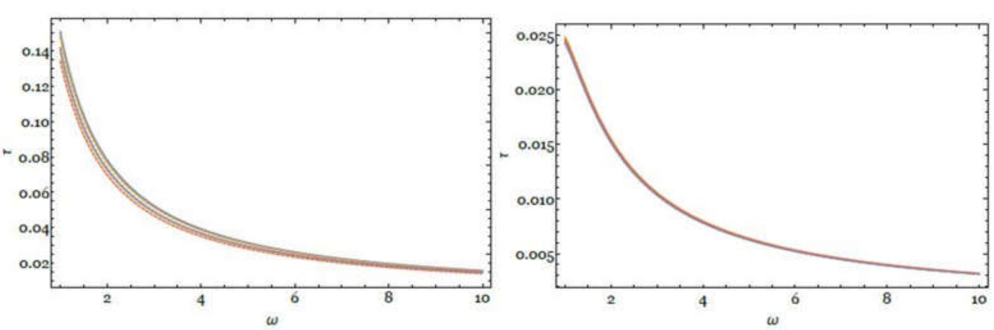
$$= \frac{\mathrm{N}\omega}{2} + \frac{\lambda}{4\omega^2 m^2} + \frac{N^2\lambda}{2m^2\omega^2} - 2m\frac{\omega_e^2}{\omega^2}$$

گفتنی است که شکل(۱) برای N هایی با ضرایب بزرگ می باشد و ما نتایج زمان تعامد حاصل از چهار ضریب تصادفی عمومی را برای $N = ۲۰$ و $N = ۱۰۰$ رسم کرده‌ایم.

همانطور که در شکل می‌بینیم برای N های بزرگ منحنی‌ها بر هم منطبق هستند. به این نکته توجه داشته باشید که ما با N های بزرگ کار می‌کنیم، بنابراین با در نظر گرفتن یک کران بالا برای میدان الکتریکی $\omega_e \leq \frac{\sqrt{\lambda(\frac{۱}{۲}+N^{۲})+m^{۲}\mathrm{N}\omega^{۳}}}{۲m^{۳/۲}}$ همواره انرژی غیر منفی می‌گردد. علاوه براین با توجه به رابطه (۶) و $\omega_\lambda^{۲} = \frac{\lambda}{۲m^{۳}}$، داریم

$$\tau_\perp \geq \frac{\pi}{\mathrm{N}\omega + m\frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2} + 2\mathrm{mN}^2\frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2} - 4m\frac{\omega_e^2}{\omega^2}}$$

باتوجه به تعریف ما این زمانی است که یک سیستم کوانتومی معین با انرژی $\boldsymbol{E}$ از یک حالت به حالت متعامد خود می‌رود. می‌توانیم از رابطه (۱۴) کران بالای آهنگ پیچیدگی را بدست آوریم.



شکل (۱): زمان تعامد برای ضرایب تصادفی (خط چین) و موردی که دراینجا انتخاب کرده‌ایم (خط توپر) ، برای $N = ۲۰$ (پانل سمت چپ) و $N = ۱۰۰$ (پانل سمت راست) نشان داده شده است. در هر دو شکل $m = ۱, \lambda = ۳ \quad ۱۰^{-۳}, \omega_e =$ ۰/۳ قرار داده‌ایم.

۳- کران بالای آهنگ پیچیدگی

در اصل پیچیدگی یک حالت کوانتومی با تعداد عملگرهای یکانی اولیه مورد نیاز برای ایجاد یک حالت مطلوب از یک حالت مرجع معین تعریف می‌شود. به‌طور خاص، لوید در کار اصلی خود نشان داد که سرعتی که یک دستگاه فیزیکی درآن می‌تواند اطلاعات را پردازش کند، با انرژی آن محدود شده است و میزان اطلاعاتی که می‌تواند پردازش کند، با تعداد درجات آزادی که دارد، محدود شده است. این حد دارای یک کران بالایی است که سرعت محاسبات یک رایانه کلاسیک را تعیین می‌کند که حد لوید نامیده می‌شود. اساساً، فرایند اطلاعاتی که توسط یک رایانه انجام می‌شود از طریق استفاده پیاپی از دروازه‌های منطقی[۶]، حالت اولیه معینی را به حالت نهایی برساند.

در اصل، یک دروازه منطقی اشاره به یک دستگاه فیزیکی واقعی دارد که یک عمل منطقی را انجام می‌دهد. از طرف دیگر هر دروازه یا عملی درزمان t انجام می‌گیرد. اگر یک کنش هامیلتون H_g روی دروازه معین اعمال کنیم، عملگر متناظر آن $U(t) = e^{iH_g t}$ است.

بنابراین می توان یک تحول یکانی را در نظر گرفت که حالت اولیه 0 را پس از زمان t، به حالت نهایی مطلوب 0 $U(t)$ برساند. اکنون می‌توانیم یک کاربرد متوالی از n دروازه را به کار ببریم [۱۳]، دراین صورت داریم:

$$|0\rangle \to U(t)|0\rangle \tag{۱۵}$$

برای یک محاسبات سری می‌توان نوشت

$$\mathrm{U(t)} = \boldsymbol{T}\prod_i U(t_{i+1},t_i) \tag{۱۶}$$

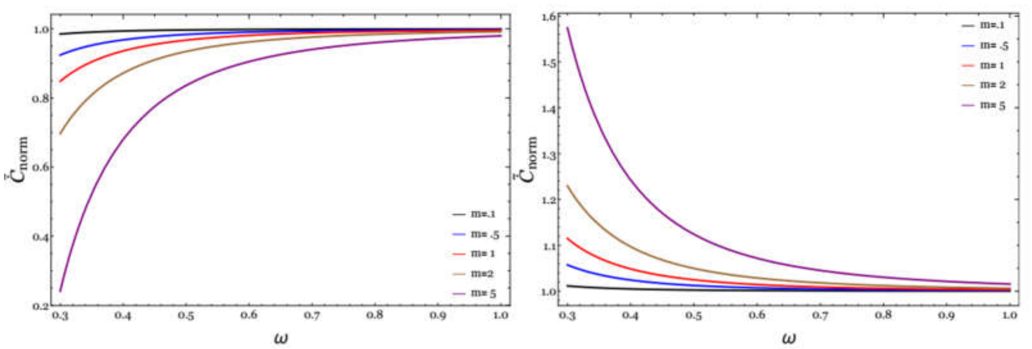
در اینجا $U(t_{i+1},t_i)$ دروازه متعامد و $\boldsymbol{T}$ عملگر ترتیب زمانی است. در این حالت آهنگ پیچیدگی دارای یک کران بالای قوی است که به‌صورت رابطه (۱۷) داده می‌شود

$$\dot{C} \le \frac{1}{\tau_\perp} \tag{۱۷}$$

به طوریکه $\tau_\perp$زمان رسیدن به حالت متعامد سیستم است. در این حالت آهنگ پیچیدگی را می-توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$\dot{C} \le \frac{1}{\pi}\left(\frac{\mathrm{N}\omega}{2} + \frac{m\lambda^2}{\omega^2} + 2\mathrm{m}N^2\frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2} - 4m\frac{\omega_e^2}{\omega^2}\right) \tag{۱۸}$$

در شکل (۳) آهنگ پیچیدگی را برای مقادیر مختلف ω_λ, ω_e رسم کرده‌ایم.



شکل (۲): آهنگ پیچیدگی بهنجارشده نوسانگر ناهماهنگ باجرم های مختلف برای $N=۱۰۰$ رسم شده است که درپانل سمت چپ: $\omega_e = 0.56 \quad \omega_\lambda = 0.008$ در پانل سمت راست $\omega_e = 0.56 \; \omega_\lambda = 0.08$ انتخاب کرده‌ایم .

[6] Logic gates

همانطور که در شکل‌های (۲) و(۳)، نشان داده‌ایم یک مقدار بحرانی برای پارامتر ناهماهنگ وجود دارد که فراتر از آن آهنگ پیچیدگی رفتار خود را به شدت تغییر می‌دهد که برای آن می‌توان نوشت:

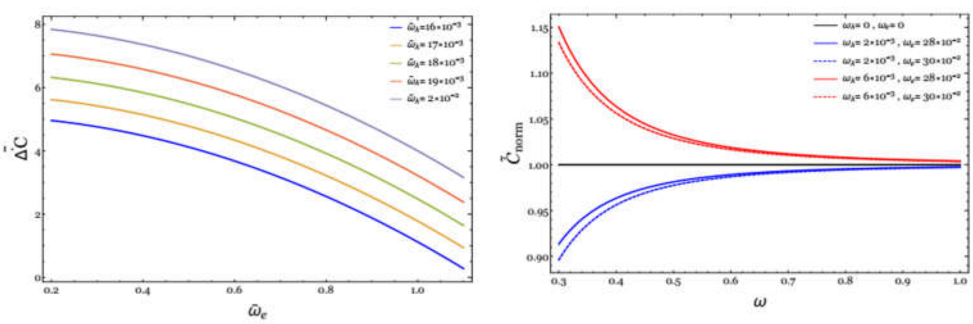
$$\omega_{\lambda}^{\rm cri} = \frac{2\omega_e}{\sqrt{1+2N^2}} \qquad (۱۹)$$

نتایج نشان می‌دهد که پیچیدگی بهنجارشده نوسانگر ناهماهنگ باردارشده، در مقدار بزرگ ω به یک مقدار مشخص می‌رسد. به عبارت دیگر، مقدار بحرانی برای پارامتر ناهماهنگ وجود دارد که نحوه رفتار این اشباع را مشخص می‌کند.

شکل (۴) نشان می‌دهدکه میدان الکتریکی می‌تواند اثرافزایشی پارامتر ناهماهنگ را خنثی کند. به عبارت ساده می‌توان گفت که وانیم پارامترهای میدان الکتریکی و ناهماهنگ را طوری تغییر دهیم که $\widetilde{\Delta C} = 0$ را داشته باشیم. در این حالت، معادله (۱۹) کاملاً ارضاء می‌شود.

اگر بخواهیم محاسبات خود را با یک نوسانگر هماهنگ باردار در حضور میدانهای الکتریکی و مغناطیسی مقایسه نماییم، به راحتی می‌توان مشاهده کرد که برای نوسانگر ناهماهنگ باردار شده، مانند نوسانگر هماهنگ باردار، میدان الکتریکی آهنگ رشد پیچیدگی را کاهش می‌دهد.

در عوض قبلا ثابت کرده ایم که پارامتر ناهماهنگ مانند میدان مغناطیسی در نوسانگر هماهنگ باردار، نقش موثری در افزایش آهنگ پیچیدگی دارد [۱۱].



شکل (۳) سمت راست: آهنگ پیچیدگی بهنجارش شده نوسانگر ناهماهنگ در این شکل به تصویر کشیده شده است. هنگامی که پارامتر های آن به مقدار معین بحرانی ارائه شده توسط معادله (۱۹) برسد، رفتار این آهنگ تغییر می کند. توجه داشته باشید که در اینجا $N = 100$, $m = 1$ قرار داده ایم و $\tilde{C}_{\rm norm} = \frac{\pi C}{N\omega}$ را تعریف کرده ایم. شکل (۴) سمت چپ: اثر پارامتر ناهماهنگ و میدان الکتریکی روی آهنگ پیچیدگی در این شکل به تصویر کشیده شده است. در اینجا $N = 100$ و $\widetilde{\Delta C} = \frac{\pi C - N\omega}{m}$ قرار داده ایم .

۴- نتیجه گیری

در علوم رایانه؛ پیچیدگی یک عمل، معیاری است که نشان دهنده دشواری انجام یک کار است. این دشواری یک تعریف ساده دارد و با توجه به حداقل الگوریتم‌هایی که برای انجام یک مسئله لازم است، تعریف می شود. به این ترتیب پیچیدگی مربوط است به تعداد عملگرهای اولیه که برای ایجاد یک حالت مطلوب از یک حالت مرجع مشخص مورد نیاز است. از این منظر، پیچیدگی از انرژی سیستم تأثیر می‌پذیرد. پس می‌توان سرعت محاسبات را با تعداد عملیاتی که در واحد زمان در هر مرحله انجام شود یازمان آهنگ تغییر پیچیدگی معین‌کرد. اکثر پدیده های فیزیکی با نوسانگر قابل مدل کردن می‌باشد.

در این مقاله در مورد یک نوسانگر ناهماهنگ ساده مختل شده، کمیت دشواری انجام کار را مدل سازی کردیم. برای محاسبه حداقل زمان متعامدسازی ازیک حالت کوانتومی با انرژی $\boldsymbol{E}$ به یک حالت متعامد، از قضیه مارگولوس-لویتین استفاده نمودیم که E مقدار چشم داشتی انرژی سیستم است که نقش فیزیکی دارد. از طرف دیگر برای حد لوید حداقل زمان انجام یک کار توسط انرژی $\mathrm{E} = H$ تنظیم می‌شود، که محدوده‌ی محاسبات را تعیین می‌کند.

کران بالای تعداد عملیات برای یک سیستم کوانتومی با میانگین انرژی E با $\frac{2E}{\pi}$ مشخص می‌شود. عملیات انجام شده بر روی یک حالت می‌تواند به صورت مکانیکی کوانتومی اجرا شود، در واقع، در هر مرحله که حالت کلاسیک باشد ورودی و خروجی وجود دارد. این حالت‌ها قرار است متعامد باشند و هیچگونه برهمنهی بایکدیگر نداشته باشند. نشان دادیم که کران بالای حد لوید به صورت $\frac{d}{dt}C \leq \frac{2E}{\pi\hbar}$ در مورد نوسانگر هم صادق است. در کار قبلی (مرجع [۱۱])، پیچیدگی یک نوسانگر هارمونیک باردار را مطالعه کردیم. و یک نوسانگر هارمونیک را در حضور میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی در نظر گرفتیم و حداقل زمان لازم برای تحول هر حالت سیستم را به یک حالت متعامد پیدا کردیم. مشاهده کردیم که زمان تعامد برای میدانهای مغناطیسی کوچک و بزرگ رفتار متفاوتی دارد و با روشن کردن میدان مغناطیسی - الکتریکی آهنگ پیچیدگی افزایش یا کاهش می‌یابد. هدف اصلی این مقاله بررسی میزان پیچیدگی برای یک نوسانگر هارمونیکی ساده از طریق حالت‌های متعامد است. محاسبه عددی نشان داد که برای اختلال مرتبه زوج، میزان پیچیدگی افزایش می‌یابد. در حالیکه برای اختلال مرتبه فرد میزان پیچیدگی روند کاهشی دارد و این موضوع می تواند به‌عنوان حد جدیدی برای میزان پیچیدگی انجام محاسبات تلقی گردد.

۵-ضمیمه

۵-۱- ویژه مقادیر نظریه اختلال

در اینجا، تغییر انرژی نوسانگر هارمونیکی ساده ای را که هامیلتونین آن توسط (۲) داده شده است، برای اختلات زوج و فرد بررسی می‌نماییم. نشان داده شده است که سرعت رشد پیچیدگی برای یک نوسانگر ناهماهنگ با وارد کردن اختلال مرتبه زوج، افزایش می‌یابد در حالی که برای اختلال مرتبه فرد این نرخ دارای یک رفتار کاهشی است. تغییر مرتبه اول انرژی در مرتبه فرد از بین می‌رود، پس به سراغ اصلاح مرتبه دوم در انرژی می‌رویم که از رابطه (۲۰) محاسبه می‌گردد:

$$E^2_{n_{odd}} = -\lambda_0^2 \sum_{m\neq n} \frac{\left|\langle m| x^{2k-1} |n\rangle\right|^2}{E_{mn}} \qquad (۲۰)$$

این اصلاح انرژی مقداری منفی است، در حالی که این مقدار برای اختلال مرتبه زوج یک عدد مثبت می‌گردد، ولی چون برای اختلال مرتبه زوج اولین مرتبه اصلاح انرژی غیر صفر است، برای اختلال

مرتبه زوج از آن استفاده می‌نماییم که به صورت رابطه (۲۱) بیان می‌شود:

$$E^1_{n_{even}} = \lambda_e \langle n | x^{2k} | n \rangle \qquad (۲۱)$$

در رابطه بالا عملگر x به صورت رابطه زیر بیان می‌گردد.

$$x = \sqrt{\frac{1}{2m\omega}}\left(\alpha, \alpha^{\dagger}\right)$$

حال می‌خواهیم اصلاحات مرتبه اول را برای یک نوسانگر هارمونیک با اعمال نظریه اختلال محاسبه کنیم. با به‌کارگیری $\lambda_1 x$, $\lambda_2 x^2$, $\lambda_3 x^3$ می‌توان نوشت:

$$\left\langle m \middle| \left(\alpha, \alpha^{\dagger}\right) \middle| n \right\rangle = \sqrt{n}\delta_{m,n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{m,n+1}$$

$$\left\langle m \middle| \left(\alpha, \alpha^{\dagger}\right)^2 \middle| n \right\rangle = 2n\delta_{m,n} + \delta_{m,n} + \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2} + \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\delta_{m,n+2}$$

$$\left\langle m \middle| \left(\alpha, \alpha^{\dagger}\right)^3 \middle| n \right\rangle = 3n^{3/2}\delta_{m,n-1} + 3n\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1} + \sqrt{n-2}\sqrt{n-1}\sqrt{n}\delta_{m,n-3} + 3\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1} + \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\sqrt{n+3}\delta_{m,n+3}$$

با اعمال عملیات جبری می‌توان نوشت:

$$\langle n | x^2 | n \rangle = \frac{2n+1}{2m\omega}$$

$$\langle n | \mathrm{x}^4 | n \rangle = \frac{3\left(2n^2+2n+1\right)}{4m^2\omega^2}$$

$$\langle n | x^6 | n \rangle = \frac{5(2n+1)(2n^2+2n+3)}{8m^3\omega^3}$$

$$\langle n | x^8 | n \rangle = \frac{35(2n^4+4n^3+10n^2+8n+3)}{16m^4\omega^4}$$

$$\langle n | x^{10} | n \rangle = \frac{63(2n+1)(2n^4+4n^3+18n^2+16n+15)}{32m^5\omega^5}$$

همچنین می‌توان اصلاحات انرژی مرتبه دوم را به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{m\neq n} \frac{\left|\langle m | x | n \rangle\right|^2}{E_{mn}} = \frac{1}{(2m\omega)\,\omega}$$

$$\sum_{m\neq n} \frac{\left|\langle m | x^3 | n \rangle\right|^2}{E_{mn}} = \frac{30n^2+30n+11}{(2m\omega)^3\,\omega}$$

$$\sum_{m\neq n} \frac{\left|\langle m | x^5 | n \rangle\right|^2}{E_{mn}} = \frac{630n^4+1260n^3+2030n^2+1400n+449}{(2m\omega)^5\,\omega}$$

$$\sum_{m\neq n} \frac{\left|\langle m | x^7 | n \rangle\right|^2}{E_{mn}} = \frac{3\left(4004n^6+12012n^5+42350n^4+64680n^3\right)}{(2m\omega)^7\,\omega} + \frac{3\left(2030n^2+81788n+14793\right)}{(2m\omega)^7\,\omega}$$

در این مقاله برخی از محاسبات و همچنین شکل‌ها با نرم افزار Mathematica انجام شده است.

فهرست منابع

[1] P. Pfeifer, How fast can a quantum state change with time? Phys. Rev. Lett. 70, 3365 (1993). https://doi.org/10.1103/ PhysRevLett. 70.3365

[2] S. W. Hawking, \Black hole explosions", Nature 248, 30 (1974). doi: 0.1038/248030a0

[3] S. Lloyd, \Ultimate physical limits to computation", Nature 406 1047 (2000), https://doi.org/10.1038/35023282. arXiv: quant-ph/9908043.

[4] L. B. Levitin, \Physical limitations of rate, depth, and minimum energy in information processing", Int. J. Theor. Phys. 21 299 (1982). https://doi.org/ 10.1007/ BF01857732

[5] J. D. Bekenstein, \Black Holes and Entropy", Phys. Rev. D 7, 2333 (1973). https://doi.org/10.1103/PhysRevD.7.2333

[6] M. Van Raamsdonk, \Evaporating Firewalls," JHEP 1411, 038 (2014) doi:10.1007/JHEP11(2014)038 [arXiv: 1307. 1796 [hep-th]].

[7] L. Susskind, \Entanglement is not enough," Fortsch. Phys. 64, 49 (2016) doi:10.1002/prop.201500095 [arXiv:1411.0690 [hep-th]].

[8] Sanjeev Arora, Boaz Barak, Computational Complexity, A Modern Approach", Cambridge University Press (2009).

[9] T. Nishioka, S. Ryu and T. Takayanagi, Holographic Entanglement Entropy: An Overview, J. Phys. A 42, 504008 (2009) doi:10.1088/1751-8113/42/50/504008 [arXiv:0905.0932 [hepth]].

[10] S. Lloyd, Y. J. Ng, \Black hole computers". Sci. Am. 291, 5261 (2004).

[11] R. Pirmoradian, M. Tanhayi, \On the Complexity of a Charged Quantum Oscillator," Journal of the Korean Physical Society, 77, 2 (2020) 102-106, doi:10.3938/jkps.77.102 arXiv: 1911. 08886 [hep-th].

[12] N. Margolus and L. B. Levitin, The Maximum speed of dynamical evolution," Physica D 120, 188 (1998). DOI: 10.1016/S0167-2789(98)00054-2, arXiv: quant-ph/9710043 [quantph].

[13] W. Cottrell and M. Montero, \Complexity is simple!," JHEP 1802, 039 (2018) doi:10.1007/JHEP02(2018)039 [arXiv:1710.01175 [hep-th]].