

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال نهم، شماره چهل و ششم، بهمن و اسفند ۱۴۰۲

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

کارایی ارزیابی بر اساس تکنولوژی تولید شبه‌جمعی در تحلیل پوششی داده‌ها

جواد گرامی

گروه ریاضی، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۱۱/۳۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۶/۲۱

چکیده

کارایی ارزیابی با در نظر گرفتن اطلاعات برتری تصمیم‌گیرنده، کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده را در تحلیل پوششی داده‌ها به دست می‌آورد. در این راستا می‌توانیم تکنولوژی‌های تولید متفاوتی را در تحلیل پوششی داده‌ها در نظر بگیریم. یکی از این تکنولوژی‌ها، تکنولوژی تولید شبه‌جمعی می‌باشد. تکنولوژی شبه‌جمعی در تحلیل پوششی داده‌ها بر اساس تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده مشاهده شده و مجموعه واحدهای جمعی متناظر با این واحدها پایه‌گذاری شده است. در این مقاله، در ابتدا به معرفی مفاهیم کارایی ارزیابی و تکنولوژی شبه‌جمعی می‌پردازیم و در ادامه به محاسبه کارایی ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده در تکنولوژی جمعی می‌پردازیم. ما نشان می‌دهیم که مقدار کارایی ارزیابی محاسبه شده بر اساس تکنولوژی شبه‌جمعی نسبت به سایر تکنولوژی‌ها متفاوت می‌باشد و می‌تواند مقدار درست کارایی ارزیابی را محاسبه نماید. در ادامه تقریب ارائه شده در این مقاله را با یک مطالعه کاربردی مربوط به مجموعه داده‌ها از بانک‌ها در کشور فنلاند با تقریب‌های قبلی ارائه شده برای محاسبه کارایی ارزیابی مقایسه می‌کنیم و در انتها نتایج حاصل از تحقیق را می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، تکنولوژی تولید شبه‌جمعی، کارایی ارزیابی، تابع ارزیابی.

۱- مقدمه

صنعت حمل و نقل تحلیل پوششی داده‌ها یک متدولوژی برنامه‌ریزی برای اندازه‌گیری کارایی تکنیکی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده می‌باشد. که به وسیله چارنز^۲ و همکاران [۱] معرفی گردید و به عنوان یک تکنیک قوی به طور گسترده در زمینه‌های مختلف همچون بانکداری، بهداشت و درمان، و آموزش مورد استفاده قرار گرفت (کوک و سیفورد^۳ [۲]، لیو^۴ و همکاران [۳]، امروزنژاد و یانگ^۵ [۴]). تکنولوژی تولید (مجموعه امکان تولید) یک بخش قابل ملاحظه از آنالیز تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد. تکنولوژی‌های متفاوتی در مقالات تحلیل پوششی داده‌ها ارائه شده است. در این باره ما بعضی از آنها را در چهار دهه اخیر مورد مطالعه قرار می‌دهیم. چارنز و همکاران [۱] اولین تکنولوژی را با نام تکنولوژی تولید با خاصیت بازده به مقیاس ثابت^۶ ارائه دادند. بنکر^۸ و همکاران [۵] تکنولوژی دیگری را با خاصیت بازده به مقیاس متغیر^۹ تحت عنوان مدل BCC ارائه دادند. در ادامه تکنولوژی‌های دیگر تحت عنوان تکنولوژی بازده به مقیاس نافزایشی^{۱۰} به وسیله کوپمنس^{۱۱} [۶] ارائه گردید. دپرینز^{۱۲} و همکاران [۷] با حذف فرض تحدب تکنولوژی پوسته مصرفی آزاد^{۱۳} را معرفی کردند. نوع دیگر حذف اصل تحدب از اصول موضوع ساخت مجموعه امکان تولید و ارائه یک تکنولوژی دیگر به وسیله پترسون^{۱۴} [۸] که شامل دو مدل برنامه‌ریزی خطی بود ارائه گردید. کائو^{۱۵} [۹] یک مجموعه امکان تولید کلی در تحلیل پوششی داده‌ها برای اندازه‌گیری کارایی در حضور ورودی‌ها و خروجی‌های منفی ارائه داد. در مدل پیشنهادی توسط کائو [۹] همچنان نقاط قوت و ضعف مدل شعاعی وجود داشت. در ادامه کائو [۱۰] مشکلات موجود در مدل قبلی خود را مرتفع نمود و یک مدل جدید برای اندازه‌گیری کارایی در حضور ورودی‌ها و خروجی‌های منفی در تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر ارائه داد. زو^{۱۶} و همکاران [۱۱] یک تکنولوژی دیگر برای محاسبه کارایی ارائه دادند و با استفاده از نرم بی‌نهایت نزدیک‌ترین اهداف به واحد تحت ارزیابی را بدست آوردند، این اهداف روی مرز کارایی نزدیک‌ترین فاصله را به واحد تحت ارزیابی دارند. زو و همکاران [۱۱] نشان دادند که تقریب ارائه شده توسط آنها از نقطه‌نظر محاسباتی نسبت به تقریب‌های قبلی مناسب‌تر می‌باشد.

گرین و کوک^{۱۷} [۱۲] یک تکنولوژی دیگر را با نام تکنولوژی جمعی معرفی کردند. تکنولوژی جمعی بر اساس واحدهای تصمیم‌گیرنده مشاهده شده و واحدهای جمعی تعریف می‌شود. واحدهای جمعی بر اساس واحدهای مشاهده شده، ایجاد می‌شوند. مقالاتی که تکنولوژی جمعی را معرفی کردند، فرضی را برای ایجاد مجموعه امکان

^۲ Charnes^۳ Cook and Seiford^۴ Liu^۵ Emrouznejad and Yang^۶ Production possibility Set^۷ Constant Returns to Scale^۸ Banker^۹ Variable Returns to Scale^{۱۰} Non-Increasing^{۱۱} Koopmans^{۱۲} Deprins^{۱۳} Free disposability hull^{۱۴} Petersen^{۱۵} Kao^{۱۶} Zhu^{۱۷} Green and Cook

تولید تکنولوژی جمعی با عنوان فرض جمعی ارائه دادند. این فرض بیان می‌دارد که دو واحد مشاهده شده A و B می‌توانند فعالیت‌های خود را تجمیع کنند و یک واحد جدید با عنوان واحد تجمعی به صورت $A+B$ ایجاد کنند. در تکنولوژی جمعی ما فرض جمعی را می‌پذیریم. فرض جمعی بدین صورت بیان می‌گردد که در تکنولوژی تولید، اگر واحدهای A و B امکان فعالیت داشته باشند آنگاه واحد جدید ایجاد شده با عنوان واحد تجمعی به صورت $A+B$ نیز امکان فعالیت دارد و می‌تواند موجود باشد. به بیان دیگر براساس فرض جمعی، اگر واحدهای A و B متعلق به مجموعه امکان تولید باشند، آنگاه واحد جدید ایجاد شده بصورت $A+B$ نیز متعلق به مجموعه امکان تولید می‌باشد. این اصل در مقالات مربوطه با عنوان اصل جمعی و اصل شبه‌جمعی به کار می‌رود. در صورتی که بخواهیم میان این دو فرض تمایز قائل شویم، می‌توانیم بگوییم که با پذیرفتن اصل جمعی در صورتی که یک واحد مشاهده شده مانند A متعلق به تکنولوژی تولید باشد و امکان فعالیت داشته باشد، آنگاه واحدهای جمعی جدید مانند $A+A$ و $A+2A$ نیز متعلق به مجموعه امکان تولید می‌باشند. اما اصل شبه‌جمعی بیان می‌دارد که فعالیت‌های جدید تجمعی از واحدهای A و B به صورت $A+B$ تنها در صورتی متعلق به مجموعه امکان تولید می‌باشند و امکان تولید دارند و که واحدهای تشکیل‌دهنده واحد تجمعی جدید متمایز باشند یعنی A و B دو واحد متفاوت باشند. اما بر اساس فرض جمعی این واحدها می‌توانند یکسان باشند و دارای ورودی‌ها و خروجی‌های یکسان باشند (قیاسی [۱۳]). کرمی خرم آبادی^{۱۸} و همکاران [۱۴] مدل‌های ارزیابی کارایی هزینه را در حضور خروجی‌های نامطلوب در تکنولوژی شبه‌جمعی توسعه دادند.

قیاسی و کوک^{۱۹} [۱۵] با پذیرفتن فرض شبه‌جمعی یک تکنولوژی تولید جدید، با عنوان تکنولوژی شبه جمعی ارائه دادند و آنها این تکنولوژی را بر اساس تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده مشاهده شده موجود و واحدهای جدید ایجاد شده جمعی بر اساس فرض شبه‌جمعی ارائه دادند. آنها در ابتدا نشان دادند که در صورتی که n واحد تصمیم‌گیرنده مشاهده شده داشته باشیم، بر اساس مجموعه توانی شامل این n واحد مشاهده شده می‌توانیم 2^n واحد تجمعی جدید ایجاد کنیم. در صورتی که بخواهیم کارایی یک واحد تصمیم‌گیرنده^{۲۰} را بر اساس این 2^n واحد تصمیم‌گیرنده به دست آوریم، تعداد واحدها و متغیرها در مدل ارزیابی به طور چشمگیری افزایش می‌یابد و از نقطه‌نظر محاسباتی مناسب نمی‌باشد. در این راستا قیاسی و کوک [۱۵] با پذیرفتن فرض شبه‌جمعی یک تکنولوژی تولید جدید، با عنوان تکنولوژی شبه‌جمعی ارائه دادند و نشان دادند که تکنولوژی جدید معرفی شده معادل با تکنولوژی اولیه در حضور واحدهای جدید ایجاد شده جمعی می‌باشد و تنها بر اساس واحدهای مشاهده شده ارائه می‌گردد و مدل جدید برای محاسبه کارایی بر اساس تکنولوژی جدید می‌تواند میزان محاسبات را به طور قابل توجهی کاهش دهد.

در پروسه ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده در تحلیل پوششی داده‌ها می‌توانیم نظر تصمیم‌گیرنده را اعمال نماییم و نظر تصمیم‌گیرنده در تعیین مقدار کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده موثر باشد. به عنوان مثال در ارزیابی کارایی مجموعه‌ای شعب بانک، می‌توانیم بر اساس نظر مدیران ارشد بانک، شعب خاصی را که دارای عملکرد مطلوب‌تری نسبت به سایر واحدها می‌باشند را به عنوان شعب الگو یا منتخب انتخاب نماییم. سایر شعب‌ها باید سطح عملکرد خود را به سطح عملکرد شعب الگو یا منتخب برسانند.

^{۱۸} Karami Khorramabadi^{۱۹} Ghiyasi and Cook^{۲۰} Decision Making Unit (DMU)

مدل جدید ارزیابی کارایی به نحوی طراحی و ارائه می‌گردد که کارایی دیگر واحدها بر اساس کارایی واحدهای منتخب محاسبه گردد. مدل جدید واحدهایی که دارای دارای عملکرد مشابه با واحدهای منتخب باشند، به عنوان واحدها کارا معرفی می‌گردند و سایر واحدها ناکارا معرفی می‌شوند. همچنین واحدهای ناکارا به منظور کارا شدن و داشتن عملکرد مورد نظر مدیر باید سطح ورودی‌ها و خروجی‌های خود را به سطح ورودی‌ها و خروجی‌ها از واحدهای منتخب از نظر مدیر برسانند. مدل‌های مختلفی برای اعمال نظر مدیر یا تصمیم‌گیرنده در پروسه ارزیابی کارایی در تحلیل پوششی داده‌ها ارائه گردیده است که می‌توان به استفاده از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها با ساختار برنامه-ریزی چندهدفه و کارایی متقاطع اشاره نمود. (زهره بندیان^{۲۱} [۱۶]، گرامی^{۲۲} [۱۷]).

در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها با ساختار برنامه‌ریزی چندهدفه می‌توانیم از روش‌های تعاملی برای حل مدل استفاده نمود و از این طریق نظر تصمیم‌گیرنده را در پروسه ارزیابی کارایی اعمال نماییم. یکی از مدل‌های طراحی شده برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده بر اساس نظر تصمیم‌گیرنده، مدل‌های آنالیز کارایی ارزیابی می‌باشد (هالمه^{۲۳} و همکاران [۱۸]).

یکی از راه‌های اعمال اطلاعات برتری تصمیم‌گیرنده در پروسه ارزیابی کارایی در تحلیل پوششی داده‌ها، آنالیز کارایی ارزیابی می‌باشد. منظور از اطلاعات برتری تصمیم‌گیرنده، اطلاعاتی که تصمیم‌گیرنده در مورد واحدهای تصمیم‌گیرنده دارد. این اطلاعات برای او و مجموعه تحت مدیریت او دارای اهمیت می‌باشد و به نحوی این اطلاعات در پروسه ارزیابی کارایی می‌تواند نقش‌آفرین باشد. این اطلاعات می‌تواند براساس تجربه یا نظر خبرگان بدست آید.

مفهوم کارایی ارزیابی در ابتدا به وسیله هالمه و همکاران [۱۸] معرفی گردید. کارایی ارزیابی بر اساس این فرض که تصمیم‌گیرنده، واحدهای تصمیم‌گیرنده را بر اساس یک تابع ارزشی نامعلوم ارزیابی می‌کند، تعریف می‌گردد. این تابع بر اساس ورودی‌ها و خروجی‌ها به ترتیب شبه محدب و شبه مقعر می‌باشد. حداکثر مقدار تابع ارزشی، در یک نقطه که جواب با بیشترین برتری^{۲۴} (MPS) نامیده می‌شود، حاصل می‌گردد. این نقطه می‌تواند هر یک از واحدهای موجود مشاهده شده یا هر یک از واحدهای مجازی روی مرز کارایی از مجموعه امکان تولید باشد. در حقیقت کارایی ارزشی میزان بهبود ورودی‌ها و خروجی‌ها در رسیدن به مرز تابع ارزشی را محاسبه می‌کند. مرز تابع ارزشی از نقطه با بیشترین برتری (MPS) می‌گذرد (هالمه و همکاران [۱۸]). با توجه به اینکه تابع ارزشی یک تابع نامعلومی باشد، لذا این مرز مشتق‌پذیر را نمی‌توان به صورت دقیق تعیین کرد و به جای این مرز یک مرز تقریبی را در نظر می‌گیریم. این مرز می‌تواند یک ناحیه شامل تمام بردارهای ورودی و خروجی که دارای برتری کوچک‌تر یا مساوی با بردار ورودی و خروجی از واحدهای با بیشترین برتری هستند، می‌باشد. هالمه و همکاران [۱۸] مقدار کارایی ارزشی را به صورت میزان بهبود ورودی‌ها و خروجی‌ها در رسیدن به مرز تابع ارزشی را به عنوان مقدار کارایی ارزشی معرفی کردند. بنابراین بر اساس آنالیز کارایی ارزشی، علاوه بر اینکه مقدار کارایی را به صورت تکنیکی محاسبه می‌کنیم می‌توانیم اطلاعات برتری تصمیم‌گیرنده را در پروسه ارزیابی کارایی اعمال نماییم. در میان مقالات ارائه شده برای محاسبه کار ارزشی می‌توان به مقالات زیر اشاره نمود. هالمه و همکاران [۱۹] به محاسبه کارایی ارزشی و اعمال اطلاعات برتری تصمیم‌گیرنده در پروسه ارزیابی کارایی پرداختند و مقدار کارایی ارزشی را با به کار بردن محدودیت وزنی بر روی ورودی‌ها و خروجی‌ها به دست آوردند. جورو^{۲۵} و همکاران [۲۰] یک تقریب تعاملی برای

^{۲۱} Zohrehbandian^{۲۲} Gerami^{۲۳} Halme^{۲۴} Most Preferred Solution (MPS)^{۲۵} Joro

بهبود محاسبه کارایی ارزشی ارائه دادند. زهره بندیان^{۲۶} [۱۶] یک مدل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه که توابع هدف آن شامل متغیرهای ورودی و خروجی و قیود آن شامل مجموعه امکان تولید بود، را برای محاسبه کارایی ارزشی ارائه داد. اسکلینن^{۲۷} و همکاران [۲۱] از تقریب کارایی ارزشی برای ارزیابی میزان فروش مجموعه از بانک‌ها در فنلاند استفاده کردند. هالمه و همکاران [۲۲] یک تقریب جدید برای محاسبه کارایی ارزشی در تکنولوژی غیرمحدب بر اساس مفهوم مخروط قطبی توسعه دادند. آنها نشان دادند که با استفاده از آنالیز کارایی ارزشی می‌توانیم اطلاعات برتری تصمیم‌گیرنده را در گرامی^{۲۸} [۱۷] یک پروسه تعاملی برای بهبود تخمین کارایی ارزشی در تحلیل پوششی داده‌ها ارائه داد. او از روش‌های تعاملی در حل مسائل به برنامه‌ریزی خطی چندهدفه برای حل مدل ارائه شده استفاده نمود و نشان داد که تقریب ارائه شده نسبت به تقریب‌های قبلی می‌تواند مقادیر کارایی ارزشی متناظر با هر یک از واحدهای تصمیم‌گیرنده را به طور دقیق‌تری محاسبه نماید. گرامی و همکاران [۲۳] یک پروسه تحلیل پوششی داده‌های معکوس برای تخمین سطح ورودی‌ها و خروجی‌ها بر اساس مفهوم کارایی ارزشی ارائه دادند. آنها نشان دادند که تقریب ارائه شده می‌تواند اهداف ایجاد شده موثرتری را نسبت به تقریب‌های قبلی در پروسه تحلیل پوششی داده‌های معکوس به‌دست آورد.

می‌توان گفت که سهم اصلی و نوآوری این مقاله به صورت زیر می‌باشد. در این مقاله آنالیز کارایی ارزشی را در تکنولوژی شبه‌جمعی ارائه می‌دهیم و از این طریق اطلاعات برتری تصمیم‌گیرنده را در پروسه ارزیابی کارایی در تکنولوژی شبه‌جمعی اعمال می‌کنیم. در ادامه به مقایسه تقریب ارائه شده در این مقاله برای ارزیابی کارایی ارزشی در تکنولوژی شبه‌جمعی با سایر تقریب‌های قبلی برای محاسبه کارایی ارزشی در دیگر تکنولوژی‌های تولید می‌پردازیم. همچنین ما نشان می‌دهیم که اهداف جدید به دست آمده متناظر با واحدهای ناکارا براساس تقریب ارائه شده نسبت به اهداف بدست آمده از تقریب‌های قبلی دارای سطوح ورودی و خروجی بهینه‌تری می‌باشند. همچنین یک الگوریتم ساده برای محاسبه کارایی ارزشی در تکنولوژی شبه‌جمعی بر اساس واحدهای مشاهده شده و واحدهای جدید ایجاد شده ارائه می‌دهیم.

ادامه این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است. در بخش دوم به معرفی مفاهیم اولیه شامل تکنولوژی تولید شبه‌جمعی و آنالیز کارایی ارزشی می‌پردازیم. در بخش سوم آنالیز کارایی ارزشی را بر اساس تکنولوژی شبه‌جمعی ارائه می‌دهیم. در بخش چهارم با یک مثال عددی به طور هندسی تقریب ارائه شده در این مقاله را تشریح می‌کنیم. در بخش پنجم برای مقایسه تقریب ارائه شده در این مقاله با تقریب‌های قبلی ارائه شده در محاسبه کارایی ارزشی، یک کاربرد از تقریب ارائه شده را برای مجموعه داده‌های مربوط شعب بانک، در کشور فنلاند به کار می‌بریم. در بخش ششم نتیجه‌گیری مقاله را می‌آوریم.

۲- مروری بر مفاهیم اولیه

در این بخش در این بخش در ابتدا به معرفی تکنولوژی تولید شبه‌جمعی در تحلیل پوششی داده‌ها می‌پردازیم و در ادامه به معرفی آنالیز کارایی ارزشی می‌پردازیم.

^{۲۶} Zohrehbandian

^{۲۷} Eskelinen

^{۲۸} Gerami

۲-۱- تکنولوژی تولید شبه جمعی

فرض کنید n ، واحد تصمیم‌گیرنده همگن با مصرف m ورودی، s خروجی را تولید می‌کنند. فرض کنید $y_j \in R^s$ بردار خروجی و بردار ورودی از واحد تصمیم‌گیرنده j -ام یعنی DMU_j را نشان می‌دهد. مجموعه امکان تولید کلی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T = \{(x, y) \mid x \text{ می‌تواند } y \text{ را تولید کند}\}.$$

قیاسی و کوک [۱۵] تکنولوژی شبه جمعی را معرفی کردند. برای معرفی تکنولوژی فوق در ابتدا فرض‌های زیر را در ایجاد تکنولوژی تولید معرفی می‌کنیم.

شمول مشاهدات این فرض بیان می‌دارد که همه واحدهای تصمیم‌گیرنده مشاهده شده متعلق به تکنولوژی تولید

$$\text{یعنی } T \text{ می‌باشند. به عبارت دیگر } (x_j, y_j) \in T, j = 1, \dots, n,$$

امکان‌پذیری اصل امکان‌پذیری بیان می‌دارد که در صورتیکه $(x_1, y_1) \in T$ و نقطه (x_2, y_2) به نحوی باشد که

$$x_2 \geq x_1 \text{ و } y_2 \geq y_1 \text{ آنگاه واحد تصمیم‌گیرنده } (x_2, y_2) \text{ متعلق به تکنولوژی تولید می‌باشد یعنی } (x_2, y_2) \in T.$$

تحدب این فرض بیان می‌دارد که در صورتی که $(x_1, y_1) \in T$ و $(x_2, y_2) \in T$ آنگاه ترکیب محدب آنها به صورت متعلق به تکنولوژی تولید می‌باشد یعنی $(1 - \mu)(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) \in T$

بیکرانی اشعه این فرض بیان می‌دارد که در صورتی که

$$(x, y) \in T \text{ آنگاه } \mu(x, y) \in T \text{ که } \mu \geq 0$$

جمع‌پذیری این فرض بیان می‌دارد که اگر

$$(x_1, y_1) \in T \text{ و } (x_2, y_2) \in T \text{ آنگاه}$$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in T$$

ضرب‌پذیری این فرض بیان می‌دارد که اگر

$$(x, y) \in T \text{ آنگاه } n(x, y) \in T \text{ که } n \in N$$

کمینه برون‌یابی این فرض بیان می‌دارد که مجموعه T کوچک‌ترین مجموعه می‌باشد که در فرض‌های فوق صدق می‌کند. به عبارت دیگر مجموعه T اشتراک تمام مجموعه‌های تکنولوژی‌های تولید می‌باشد که دارای خاصیت‌های فوق می‌باشند.

اکنون مجموعه توانی متناظر با مجموعه $J = \{1, \dots, n\}$ را به صورت مجموعه J' در نظر می‌گیریم. این مجموعه شامل تمام زیرمجموعه‌ها از مجموعه J می‌باشد. واحدهای جدید جمعی بر اساس واحدهای تصمیم‌گیرنده مشاهده شده را مطابق فرض جمعی بدست می‌آوریم. فرض جمعی بیان می‌دارد که در صورتی که واحدهای تصمیم‌گیرنده $A = (x_A, y_A)$ و $B = (x_B, y_B)$ متعلق به مجموعه امکان تولید باشند، آنگاه واحد جدید جمعی یعنی $A + B = (x_A, y_A) + (x_B, y_B)$ که ورودی و خروجی آن مجموع ورودی‌ها و خروجی‌ها از واحدهای A و B می‌باشد نیز متعلق به مجموعه امکان تولید می‌باشد.

قیاسی و کوک [۱۱] براساس واحدهای تصمیم‌گیرنده جمعی یک تکنولوژی جدید به نام تکنولوژی شبه‌جمعی را معرفی کردند.

آنها در ابتدا فرض شبه جمعی را به صورت زیر ارائه دادند.

$$\text{شبه‌جمعی} \text{ این فرض بیان می‌دارد که اگر } (x_i, y_i) \in T \text{ و } (x_j, y_j) \in T \text{ آنگاه}$$

$$(x_i, y_i) + (x_j, y_j) \in T \text{ که } i \neq j$$

فرض شبه‌جمعی بیان می‌دارد که در صورتی که دو واحد تصمیم‌گیرنده مشاهده شده متمایز را در نظر بگیریم، آنگاه فعالیت ادغام شده متناظر با آنها نیز متعلق به تکنولوژی تولید می‌باشد. با پذیرفتن فرض‌های شمول مشاهدات، امکان‌پذیری، تحدب، شبه‌جمعی، و کمینه برون‌یابی، مجموعه امکان تولید در تکنولوژی شبه‌جمعی به صورت زیر ارائه می‌گردد. (قیاسی و کوک [۱۱]).

$$T_{SA} = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} \sum_{j \in J'} \lambda_j x_j \leq x, \sum_{j \in J'} \lambda_j y_j \geq y, \\ \sum_{j \in J'} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j \in J' \end{array} \right. \right\} \quad (1)$$

در واقع می‌توانیم تکنولوژی شبه‌جمعی را شکل جمعی از مدل بازده به مقیاس متغیر در نظر بگیریم. باید توجه داشت که مجموعه J' مجموعه توانی متناظر با مجموعه J می‌باشد که شامل تمام زیرمجموعه‌های مجموعه J به استثنای مجموعه تهی می‌باشد، یعنی این تکنولوژی تولید شامل مبدا نمی‌باشد. لذا $J' = P(J)/\emptyset$ که $P(J)$ نشان‌دهنده مجموعه توانی از مجموعه J می‌باشد. باید توجه داشت که تکنولوژی شبه‌جمعی در حضور واحدهای تصمیم‌گیرنده مشاهده شده و واحدهای جمعی متناظر با این واحدها با پذیرفتن فرض‌های شمول مشاهدات، امکان‌پذیری، تحدب، شبه‌جمعی و کمینه برون‌یابی ایجاد می‌گردد (قیاسی و کوک [۱۵]).

تکنولوژی شبه‌جمعی تنها فرض جمعی را برای واحدهای متفاوت می‌پذیرد. با توجه به اینکه مجموعه J' مجموعه توانی متناظر با مجموعه J دارای 2^n عضو می‌باشد. مدل ارزیابی کارایی واحد تحت ارزیابی یعنی $DMU_0 = (x_0, y_0)$ در ماهیت ورودی بر اساس تکنولوژی شبه‌جمعی را به صورت زیر خواهیم داشت.

$$\min \{ \theta^{SA} | (\theta^{SA} x_0, y_0) \in T^{SA} \}. \quad (2)$$

اکنون با توجه به رابطه تعریف مجموعه T^{SA} در رابطه (۱)، مدل (۲) به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta^{SA} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J'} \lambda_j x_{ij} \leq \theta^{SA} x_{i0}, i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{j \in J'} \lambda_j y_{rj} \geq y_{r0}, r = 1, \dots, s, \\ & \sum_{j \in J'} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3)$$

همان‌طور که مشاهده می‌گردد، مدل (۳) دارای $m + s + 1$ قید و 2^n متغیر می‌باشد. برای حل مدل (۳) باید تمام واحدهای جمعی متناظر با واحدهای تصمیم‌گیرنده مشاهده شده را تشکیل دهیم. همان‌طور که قبلاً بیان گردید، در این راستا باید تمام واحدهای جمعی را از مجموعه J' یا مجموعه توانی متناظر با مجموعه J که شامل تمام زیرمجموعه‌های مجموعه J به استثنای مجموعه تهی می‌باشد، را ایجاد کنیم. لذا محاسبه ورودی‌ها و خروجی‌های جمعی برای هر یک از اعضا از مجموعه J' کاری بس مشکل می‌باشد. در این راستا قیاسی و کوک [۱۵] نشان دادند که می‌توانیم مجموعه امکان تولید شبه‌جمعی یعنی T^{SA} را به صورت زیر ارائه دهیم.

$$T_{new}^{SA} = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq x, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 1, 0 \leq \lambda_j \leq 1, j = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\} \quad (4)$$

مدل ارزیابی کارایی واحد تحت ارزیابی یعنی

$DMU_o = (x_o, y_o)$ در ماهیت ورودی بر اساس تکنولوژی شبه‌جمعی را به صورت زیر خواهیم داشت.

$$\min\{\theta_{new}^{SA} | (\theta_{new}^{SA} x_o, y_o) \in T_{new}^{SA}\}. \quad (5)$$

اکنون با توجه به رابطه تعریف مجموعه T_{new}^{SA} در رابطه (۴)، مدل (۵) به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \theta_{new}^{SA*} &= \min \theta_{new}^{SA} \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &\leq \theta_{new}^{SA} x_{io}, i = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &\geq y_{ro}, r = 1, \dots, s, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &\geq 1, 0 \leq \lambda_j \leq 1, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (6)$$

تعریف ۱ DMU_o کارای شبه‌جمعی در ارزیابی با مدل (۶) می‌نامیم، در صورتیکه $\theta_{new}^{SA*} = 1$ ، در غیر این صورت آن را یک واحد ناکارای شبه‌جمعی می‌نامیم.

مدل (۶) کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده را در حضور تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده مشاهده شده و واحدهای جمعی متناظر با این واحدها محاسبه می‌کند. به عبارت دیگر مدل (۶)، برای به دست آوردن کارایی واحد تحت ارزیابی، این واحد را روی مرز کارایی مجموعه امکان تولید شبه‌جمعی تصویر می‌کند. همانطور که بیان گردید، مجموعه امکان تولید شبه‌جمعی بر اساس تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده مشاهده شده و واحدهای جمعی متناظر با این واحدها با پذیرفتن اصول شمول مشاهدات، امکان‌پذیری، تحدب، شبه‌جمعی، و کمینه برون‌یابی، ایجاد می‌گردد. تفاوت مدل (۶) با مدل‌های سنتی تحلیل پوششی داده‌ها نظیر مدل BCC (بنکر و همکاران [۵]) بدین صورت می‌باشد که مدل BCC در شکل پوششی واحد تحت ارزیابی را روی مرز مجموعه امکان تولید با بازده به مقیاس متغیر تصویر می‌کند و مجموعه امکان تولید در تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر با پذیرفتن این اصول موضوعه تنها براساس واحدهای مشاهده شده ایجاد می‌گردد، در حالیکه مجموعه امکان تولید شبه‌جمعی بر اساس تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده مشاهده شده و واحدهای جمعی متناظر با این واحدها ایجاد می‌گردد.

همانطور که مشاهده می‌گردد، مدل (۶) دارای $m + s + n + 1$ قید و تنها $n + 1$ متغیر می‌باشد. زیرا m قید مربوط به ورودی‌ها، s قید مربوط به خروجی‌ها، یک قید بصورت $\sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 1$ و n قید بصورت $\lambda_j \leq 1$ در مدل (۶) داریم. همچنین متغیرهای مربوط به میزان تاثیر ورودی‌ها و خروجی‌ها در مدل به صورت $j = 1, \dots, n$ ، λ_j و متغیر متناظر با کاهش مولفه‌های ورودی در مدل شعاعی θ_{new}^{SA} می‌باشند.

برای حل مدل (۶) دیگر نیاز به ایجاد تمام واحدهای جمعی متناظر با واحدهای تصمیم‌گیرنده مشاهده شده نمی‌باشیم و محاسبه کارایی تنها بر اساس واحدهای مشاهده شده موجود صورت می‌گیرد و مدل (۶) در ارزیابی کارایی واحد تحت ارزیابی یعنی $DMU_o = (x_o, y_o)$ نسبت به مدل (۳) میزان محاسبات را به طور قابل توجهی کاهش می‌دهد.

۲-۲- کارایی ارزشی بر اساس تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر

در این بخش مفهوم کارایی ارزشی را به صورت هندسی و تئوری شرح می‌دهیم. بدین منظور از یک مثال عددی ساده شامل سه واحد تصمیم‌گیرنده با یک ورودی و خروجی را استفاده می‌کنیم. فرض کنید بردار ورودی و خروجی برای این واحدها به صورت زیر باشد.

$$C = (5, 3), B = (3, 2.5), A = (2, 0.5)$$

اکنون مجموعه امکان تولید در تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر را برای این سه واحد A, B, C و در نظر می‌گیریم (بنکر و همکاران، ۱۹۸۴). مرز مجموعه امکان تولید مطابق شکل (۱) شامل خطوطی که از نقاط $A_x = (2, 0), B_x = (3, 0.5)$ و $C_x = (5, 3)$ می‌گذرد، می‌باشد.

فرض کنید در ابتدا بخواهیم کارایی تکنیکی واحد $H = (3.5, 2)$ را به دست آوریم. در صورتی که مدل ماهیت ورودی در تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر را در نظر بگیریم، کارایی تکنیکی این واحد برابر است با نسبت $\frac{|OH_x^1|}{|OH^1|} = 0.786$ می‌باشد، که $|OH_x^1|$ و $|OH^1|$ به ترتیب نشان‌دهنده فاصله نقاط $H_x^1 = (2.75, 0)$ و $H^1 = (2.75, 2)$ از مبدا می‌باشند. همان‌طور که مشاهده می‌گردد به منظور تصویر کردن نقطه H روی مرز کارایی باید ورودی نقطه H را به سطح ورودی نقطه H^1 برسانیم. خروجی آن با توجه به اینکه مدل انتخابی ماهیت ورودی می‌باشد، تغییر نمی‌کند. فرض کنید که تصمیم‌گیرنده، نقطه B را به عنوان واحد MPS انتخاب نماید. همان‌طور که می‌دانیم در صورتی که واحد MPS یکی از واحدهای مشاهده باشد واحد MPS را واحد با بیشترین برتری^{۲۹} مشاهده شده یا واحد MPU می‌نامیم. فرض پایه‌ای در آنالیز کارایی ارزشی بر این است که نقطه MPU در مجموعه امکان تولید مقدار تابع ارزشی را حداکثر می‌کند. تابع ارزشی یک شبه‌مقعر و نامعلوم باشد. در صورتی که نقطه MPU نسبت به نقطه B برتر باشد، یک تابع غیرخطی به صورت منحنی که در شکل (۱) بصورت نقطه‌چین نشان داده شده است، در نظر می‌گیریم. در این صورت می‌توانیم کارایی ارزشی را به صورت تصویر شعاعی در ماهیت ورودی روی مرز این تابع به دست آوریم. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌گردد این نقطه همان نقطه $H^3 = (0.9, 2)$ می‌باشد. نقطه H^3 روی مرز تابع ارزشی که از نقطه B می‌گذرد، قرار دارد. در این صورت مقدار کارایی ارزشی برابر است با $\frac{|OH_x^3|}{|OH^3|} = 0.257$ که $|OH_x^3|$ و $|OH^3|$ به ترتیب نشان‌دهنده فاصله نقاط $H_x^3 = (0.9, 0)$ و $H^3 = (0.9, 2)$ از مبدا می‌باشند.

اما با توجه به اینکه تابع ارزشی یک تابع نامعلوم و مرز آن نیز نامعلوم می‌باشد، لذا ما می‌توانیم این مرز را به وسیله تمام تانژانت‌های ممکن که از تابع مقعر کاذب که به حداکثر خود در نقطه MPS می‌رسند، تقریب زده می‌شود. این تانژانت منحصر به فرد نمی‌باشند. اما می‌توانیم آنرا با پاره خطی که از نقاط B و C می‌گذرد و شامل مرز مجموعه امکان تولید به عنوان یک ابرصفحه‌سازهای تکیه‌کننده تقریب بزنیم. در صورتی که فاصله شعاعی نقطه H را نسبت به نقطه H^3 اندازه‌گیری کنیم، می‌توانیم مقدار کارایی ارزشی را تعیین نماییم و این مقدار برابر است با $\frac{|OH^3|}{|OH^x|} = 0.286$ که یک تقریب از مقدار کارایی ارزشی درست می‌باشد و یک تقریب خوش بینانه می‌باشد. که $|OH^3|$ و $|OH^x|$ به ترتیب نشان‌دهنده فاصله نقاط $H^3 = (1, 2)$ و $H_x^3 = (1, 0)$ از مبدا می‌باشند.

اکنون نحوه محاسبه کارایی ارزشی را بر اساس مدل‌های سنتی تحلیل پوششی داده‌ها در تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر شرح می‌دهیم. برای بدست آوردن مقدار کارایی ارزشی واحد تحت ارزیابی یعنی $DMU_o = (x_o, y_o)$ در ماهیت ورودی در تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر در ابتدا مدل BCC را بصورت زیر حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \theta^{BCC*} &= \min \theta^{BCC} \\ S. t. \quad &\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta^{BCC} x_{io}, i = 1, \dots, m, \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, r = 1, \dots, s, \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

^{۲۹} Most Preferred Unit (MPU)

تعریف ۲) DMU_o کارا بر اساس مدل BCC در ارزیابی با مدل (۷) می‌نامیم، در صورتی که $\theta^{BCC*} = 1$ ، در غیر این صورت آن را یک واحد ناکارای بر اساس مدل BCC می‌نامیم.
فرض کنید که $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*, \theta^{BCC*})$ یک جواب بهینه از مدل (۷) باشد، مجموعه مرجع متناظر با واحد تحت ارزیابی DMU_o را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم.

$$R^{BCC} = \{j \in J | \lambda_j^* > 0\}. \quad (۸)$$

واحدهای MPU را به یکی از روش‌های زیر انتخاب می‌کنیم.

الف) مجموعه واحدهای MPU می‌توانند زیرمجموعه‌ای از مجموعه R^{BCC} انتخاب کنیم.

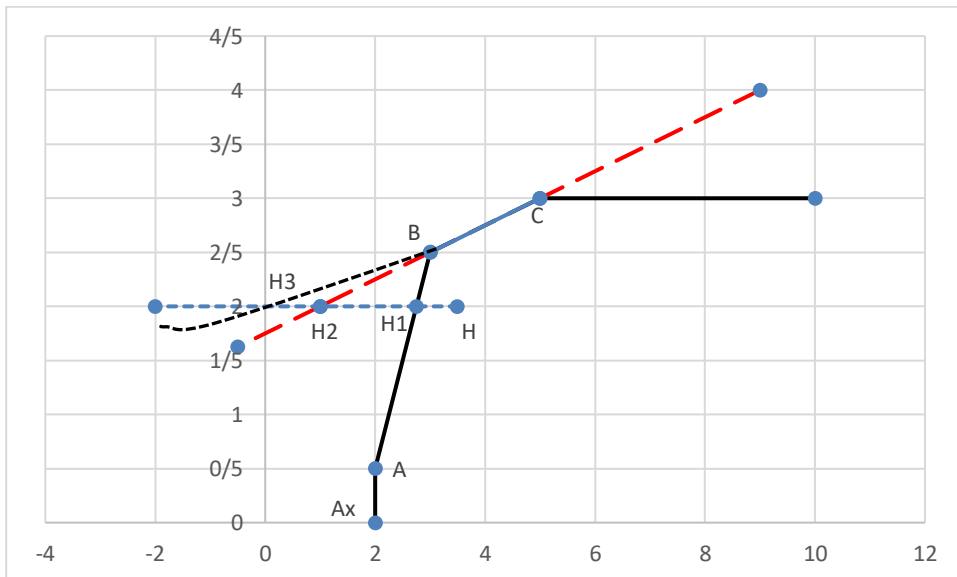
ب) واحدهای MPU را می‌توانیم با نظر تصمیم‌گیرنده انتخاب کنیم. این واحدها، می‌توانند واحدهایی باشند که در بین واحدهای تصمیم‌گیرنده دارای بهترین عملکرد از نقطه نظر تصمیم‌گیرنده باشند (گرامی [۱۷]).

مجموعه واحدهای MPU متناظر با DMU_o را با J_o^{MPU} نشان می‌دهیم. بعد از تعیین مجموعه J_o^{MPU} مقدار کارایی ارزشی متناظر با واحد تحت ارزیابی یعنی $DMU_o = (x_o, y_o)$ در ماهیت ورودی را با حل مدل (۹) بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \theta_{BCC}^{VE*} &= \min \theta_{BCC}^{VE} \\ S. t. \quad &\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_{BCC}^{VE} x_{io}, \quad i = 1, \dots, m, \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s, \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, \text{ if } j \in J - J_o^{MPU}, \\ &\lambda_j \text{ is free in sign if } j \in J_o^{MPU}. \end{aligned} \quad (۹)$$

در این صورت برابر با مقدار کارایی ارزشی متناظر با DMU_o را برابر با θ_{BCC}^{VE*} در نظر می‌گیریم.

تعریف ۳) DMU_o کارای ارزشی بر اساس مدل BCC در ارزیابی با مدل (۹) می‌نامیم، در صورتی که $\theta_{BCC}^{VE*} = 1$ ، در غیر این صورت آن را یک واحد ناکارای ارزشی بر اساس مدل BCC می‌نامیم.



شکل ۱ نحوه محاسبه کارایی ارزشی در تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر به صورت هندسی

۳- کارایی ارزیابی بر اساس تکنولوژی شبه‌جمعی

در این بخش به آنالیز کارایی ارزیابی در تکنولوژی شبه‌جمعی می‌پردازیم. در ابتدا این آنالیز را بر پایه مدل‌های ماهیت ورودی و سپس بر اساس مدل‌های ماهیت خروجی ارائه می‌دهیم.

۳-۱ کارایی ارزیابی بر اساس تکنولوژی شبه‌جمعی بر اساس مدل‌های ماهیت ورودی

در این بخش آنالیز کارایی ارزیابی را بر پایه تکنولوژی شبه‌جمعی معرفی شده در بخش دوم را ارائه می‌دهیم. در ابتدا فرض کنید که n واحد تصمیم‌گیرنده m ورودی به صورت $x_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})$ را برای تولید S خروجی به صورت $y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj})$ مصرف می‌کنند. برای محاسبه کارایی ارزیابی در ابتدا مدل (۶) را برای ارزیابی واحد تحت ارزیابی یعنی $DMU_o = (x_o, y_o)$ در حضور واحدهای مشاهده شده و واحدهای جمعی ایجاد شده حل می‌کنیم. فرض کنید که $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*, \theta_{new}^{SA})$ یک جواب بهینه از مدل (۶) باشد، مجموعه مرجع متناظر با واحد تحت ارزیابی DMU_o را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم.

$$R^{SA} = \{j \in J | \lambda_j^* > 0\}. \quad (10)$$

همان‌طور که در بخش دوم بیان گردید، واحدهای MPU را به یکی از روش‌های زیر انتخاب می‌کنیم.

الف) مجموعه واحدهای MPU می‌توانند زیرمجموعه‌ای از مجموعه R^{SA} انتخاب کنیم.

ب) واحدهای MPU را می‌توانیم با نظر تصمیم‌گیرنده انتخاب کنیم. این واحدها، می‌توانند واحدهایی باشند که در بین واحدهای تصمیم‌گیرنده (این واحدها می‌توانند از میان واحدهای جمعی ایجاد شده نیز انتخاب گردند) دارای بهترین عملکرد از نقطه‌نظر تصمیم‌گیرنده باشند (گرامی [۱۷]).

در ادامه برای محاسبه کارایی ارزیابی در تکنولوژی شبه‌جمعی می‌توانیم مدل زیر را ارائه دهیم.

$$\begin{aligned} \theta_{SA}^{VE*} &= \min \theta_{SA}^{VE} \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &\leq \theta_{SA}^{VE} x_{io}, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &\geq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, S, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &\geq 1, \quad \lambda_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, n. \\ \lambda_j &\geq 0, \quad \text{if } j \in J - J_o^{MPU}, \\ \lambda_j &\text{ is free in sign if } j \in J_o^{MPU}. \end{aligned} \quad (11)$$

تعریف (۴) DMU_o کارایی ارزیابی بر اساس مدل شبه‌جمعی در ارزیابی با مدل (۱۱) می‌نامیم، در صورتی که

$$\theta_{SA}^{VE*} = 1$$

برای حل مدل (۱۱) در ابتدا مجموعه J_o^{MPU} یا مجموعه واحدهای MPU را بر اساس دو روش پیشنهادی بیان شده در بالا انتخاب می‌کنیم. این واحدها، واحدهایی می‌باشند که در بین واحدهای تصمیم‌گیرنده دارای بهترین عملکرد می‌باشند. به عنوان مثال در ارزیابی کارایی شعب بانک، مطابق نظر مدیر بانک، شعب کارایی که دارای بهترین عملکرد در میان شعب می‌باشند را به عنوان شعب منتخب یا همان واحدهای MPU انتخاب می‌کنیم.

باید توجه داشت که مجموعه J_o^{MPU} یا مجموعه واحدهای MPU منحصر به فرد نمی‌باشد و مطابق نظر تصمیم‌گیرنده انتخاب می‌گردند. ما برای ارزیابی کارایی هریک از واحد تصمیم‌گیرنده ممکن است مجموعه J_o^{MPU} یا مجموعه واحدهای MPU را به طور متفاوت انتخاب نماییم.

مدل (۱۱) برای محاسبه کارایی ارزشی، واحد تحت ارزیابی را روی مرز تابع ارزشی که شامل ابرصفحه‌های تکیه‌کننده بر مجموعه امکان تولید شبه‌جمعی و گذرنده از واحدهای MPU تصویر می‌کند. تفاوت میان مدل‌های (۶) و (۱۱) این است که در مدل (۱۱) علامت متغیر z را متناظر با واحدهای $J \in J_0^{MPU}$ آزاد در علامت انتخاب نمودیم. این انتخاب باعث می‌شود که مرز کارایی ارزشی را نسبت به مرز کارایی تکنیکی متمایز انتخاب نماییم و این باعث می‌شود که ابرصفحه گذرنده از واحدهای MPU را به عنوان یک تقریب از تابع ارزشی نامعلوم در نظر بگیریم و این یک تقریب خوشبینانه در بهینه‌سازی مدل (۱۱) به جای مدل (۶) می‌باشد. در این حالت واحد تحت ارزیابی بر اساس مدل (۱۱) در ماهیت ورودی روی ابر صفحه گذرنده از واحدهای MPU تصویر می‌گردد و مدل (۱۱) کارایی را به صورت تصویر شعاعی بدست می‌آورد. در مدل (۱۱) مقدار کارایی بر اساس مرز تابع ارزشی که بوسیله واحدهای مشاهده شده و واحدهای شبه‌جمعی ایجاد می‌گردد، محاسبه می‌گردد.

اکنون به صورت هندسی نحوه محاسبه کارایی ارزشی در تکنولوژی شبه‌جمعی را برای مثال ارائه شده در بخش دوم شرح می‌دهیم.

در ابتدا واحدهای شبه‌جمعی را بر اساس واحدهای مشاهده شده یعنی $A = (2, 0.5)$ ، $B = (3, 2.5)$ ، و $C = (5, 3)$ بصورت زیر تشکیل می‌دهیم.

$$D = A + B = (5, 3), F = A + C = (7, 3.5), G = B + C = (8, 5.5), \\ D = A + B + C = (10, 6).$$

شکل (۲) مجموعه امکان تولید در تکنولوژی شبه‌جمعی را اساس واحدهای مشاهده شده و واحدهای شبه‌جمعی نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، مجموعه امکان تولید در تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت شامل ناحیه سمت راست خط گذرنده از مبدا و نقطه B در ربع اول می‌باشد. مجموعه امکان تولید در تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر شامل ناحیه سمت راست خطوطی که نقاط A_x ، A ، B ، و C را به هم وصل می‌کند و خط افقی که از نقطه C می‌گذرد، در ربع اول می‌باشد. مجموعه امکان تولید در تکنولوژی شبه‌جمعی شامل ناحیه سمت راست خطوطی که نقاط $A_x = (2, 0)$ ، A ، B ، G و E را به هم وصل می‌کند و خط افقی که از نقطه E می‌گذرد، در ربع اول می‌باشد.

همان طور که مشاهده می‌شود، مجموعه امکان تولید در تکنولوژی شبه‌جمعی از مجموعه امکان تولید در تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر بزرگ‌تر می‌باشد، زیرا این مجموعه براساس واحدهای مشاهده شده و واحدهای شبه‌جمعی ایجاد می‌گردد.

در صورتی که واحد B به عنوان واحد MPU در نظر بگیریم. مرز تابع ارزشی نامعلوم به صورت منحنی نقطه چین در شکل (۲) مشخص شده است. اکنون نحوه محاسبه کارایی ارزشی متناظر با واحد C را که یک واحد ناکارا در تکنولوژی شبه‌جمعی می‌باشد، را به طور هندسی شرح می‌دهیم. مقدار کارایی تکنیکی را می‌توانیم

بر اساس تصویر شعاعی بر روی مرز کارایی از مجموعه امکان تولید در تکنولوژی شبه‌جمعی بر اساس مدل (۶) به دست می‌آوریم. تصویر شعاعی به صورت کاهش میزان ورودی واحد C در نقطه C^1 می‌باشد و مقدار کارایی تکنیکی برابر است با $\frac{|OC_x^1|}{|OC_x|} = 0.767$. نشان دهنده فاصله نقطه C_x^1 از مبدا می‌باشد. همچنین $|OC_x|$ نشان دهنده فاصله نقطه C_x از مبدا مختصات می‌باشد. مختصات نقاط C_x و C_x^1 به ترتیب برابر است با $C_x = (5, 0)$ و $C_x^1 = (3.835, 0)$.

اکنون مقدار کارایی ارزشی را بر اساس مرز تابع ارزشی که بصورت نقطه چین در شکل (۲) مشخص شده است محاسبه می‌کنیم. بر اساس تصویر شعاعی بر روی مرز تابع ارزشی، تصویر شعاعی به صورت کاهش میزان ورودی

واحد C در نقطه C^3 می‌باشد و مقدار کارایی ارزشی برابر است با $\frac{|OC_x^3|}{|OC_x|} = 0.68$ نشان‌دهنده فاصله نقطه C_x^3 از مبدا می‌باشد. همچنین $|OC_x|$ نشان‌دهنده فاصله نقطه C_x از مبدا مختصات می‌باشد. مختصات نقاط C_x و C_x^3 به ترتیب برابر است با $C_x = (5, 0)$ و $C_x^3 = (3.4, 0)$. همانطور که قبلاً بیان گردید، تابع ارزشی یک تابع نامعلوم و مرز آن نیز نامعلوم می‌باشد، لذا ما می‌توانیم این مرز را به وسیله تمام تانژانت‌های ممکن که از تابع مقعر کاذب که به حداکثر خود در نقطه MPS می‌رسند، تقریب زده می‌شود. این تانژانت منحصر به فرد نمی‌باشند.

اما می‌توانیم آن را با پاره خطی که از نقاط A و B می‌گذرد و شامل مرز مجموعه امکان تولید می‌باشد، تقریب بزنیم. پاره خطی که از نقاط A و B می‌گذرد یک ابرصفحه سازای تکیه کننده (ابر صفحه‌هایی که مرز مجموعه امکان تولید را تشکیل می‌دهند و از واحدهای کارا روی این مرز می‌گذرند. می‌توان گفت که مرز کارایی اشتراک این ابرصفحه‌ها می‌باشد) از مجموعه امکان تولید می‌باشد [۲۶-۲۴].

بر اساس تصویر شعاعی بر روی مرز تقریبی از تابع ارزشی، تصویر شعاعی به صورت کاهش میزان ورودی واحد C در نقطه C^2 می‌باشد و مقدار کارایی ارزشی بر اساس مدل (۱۱) برابر است با $\frac{|OC_x^2|}{|OC_x|} = 0.72$ نشان‌دهنده فاصله نقطه C_x^2 از مبدا می‌باشد. همچنین $|OC_x|$ نشان‌دهنده فاصله نقطه C_x از مبدا مختصات می‌باشد. مختصات نقاط C_x و C_x^2 به ترتیب برابر است با $C_x = (5, 0)$ و $C_x^2 = (3.6, 0)$. اکنون یک الگوریتم ساده دومرحله‌ای مطابق جدول (۱)، برای محاسبه مقادیر کارایی ارزشی در تکنولوژی شبه جمعی ارائه می‌دهیم.

جدول ۱ الگوریتم محاسبه کارایی ارزشی در تکنولوژی شبه جمعی

گام اول: واحد تحت ارزیابی را تعیین کنید و مدل (۶) را حل نمایید و مجموعه J_0^{MPU} را تشکیل دهید. به گام دوم بروید.

گام دوم: مدل (۱۱) را متناظر با مجموعه J_0^{MPU} حل نمایید و مقدار کارایی ارزشی متناظر با واحد تحت ارزیابی به دست آورید.

۳-۲- کارایی ارزشی بر اساس تکنولوژی شبه‌جمعی بر اساس مدل‌های ماهیت خروجی

با توجه به تعریف مجموعه T_{new}^{SA} ، مدل ارزیابی کارایی واحد تحت ارزیابی یعنی $DMU_o = (x_o, y_o)$ در ماهیت خروجی بر اساس تکنولوژی شبه‌جمعی را به صورت زیر خواهیم داشت.

$$\max\{\varphi_{new}^{SA} | (x_o, \varphi_{new}^{SA} y_o) \in T_{new}^{SA}\}. \quad (12)$$

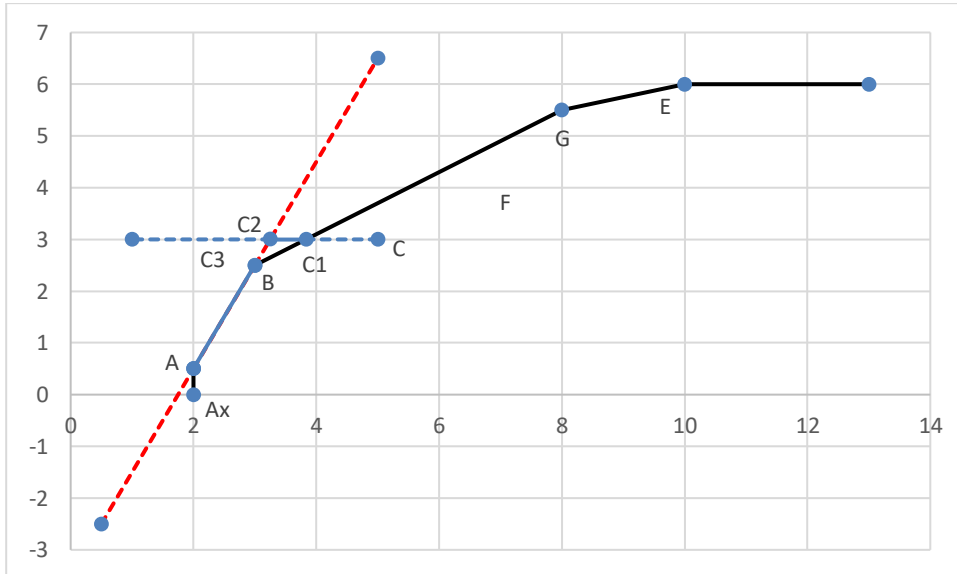
اکنون با توجه به رابطه تعریف مجموعه T_{new}^{SA} در رابطه (۴)، مدل (۱۲) به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \varphi_{new}^{SA*} &= \max \varphi_{new}^{SA} \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &\leq x_{io}, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &\geq \varphi_{new}^{SA} y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &\geq 1, \quad 0 \leq \lambda_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (13)$$

تعریف ۵) DMU_o کارای شبه‌جمعی در ماهیت خروجی در ارزیابی با مدل (۱۳) می‌نامیم، در صورتی‌که $\varphi_{new}^{SA*} = 1$ ، در غیر این صورت آن را یک واحد ناکارای شبه‌جمعی می‌نامیم. فرض کنید که $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*, \varphi_{new}^{SA*})$ یک جواب بهینه از مدل (۱۳) باشد، مجموعه مرجع متناظر با واحد تحت ارزیابی DMU_o را به صورت رابطه (۱۰) تشکیل می‌دهیم. همچنین مجموعه J_o^{MPU} یا مجموعه واحدهای MPU را به یکی از روش‌هایی که در بخش ۳-۱ بیان گردید تشکیل می‌دهیم و در ادامه برای محاسبه کارایی ارزی در تکنولوژی شبه‌جمعی در ماهیت خروجی می‌توانیم مدل زیر را حل نماییم.

$$\begin{aligned} \varphi_{SA}^{VE*} &= \max \varphi_{SA}^{VE} \\ S. t. \quad &\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{io}, \quad i = 1, \dots, m, \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \varphi_{SA}^{VE} y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s, \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 1, \quad \lambda_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, n. \\ &\lambda_j \geq 0, \text{ if } j \in J - J_o^{MPU}, \\ &\lambda_j \text{ is free in sign if } j \in J_o^{MPU}. \end{aligned} \quad (14)$$

تعریف ۶) DMU_o کارای ارزی در ماهیت خروجی بر اساس مدل شبه‌جمعی در ارزیابی با مدل (۱۴) می‌نامیم، در صورتی‌که $\varphi_{SA}^{VE*} = 1$ ، در غیر این صورت آن را یک واحد ناکارای ارزی بر اساس مدل شبه‌جمعی در ماهیت خروجی می‌نامیم.



شکل ۲ نحوه محاسبه کارایی ارزی در تکنولوژی شبه‌جمعی به صورت هندسی

۴- مثال عددی

یک مثال عددی شامل ۵ واحد تصمیم‌گیرنده با دو ورودی و یک خروجی را در نظر بگیرید. داده‌ها در جدول (۲) آمده است. ستون چهارم جدول (۲) مقادیر کارایی حاصل از مدل (۷) یا همان مدل BCC را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌گردد، DMU_7 یک واحد ناکارا می‌باشد و سایر واحدها کارا می‌باشند. ستون آخر جدول (۲) مقادیر کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده حاصل از مدل (۶) یا همان مدل شبه‌جمعی را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌گردد، DMU_1 ، DMU_4 ، و DMU_5 کارا می‌باشند و واحدهای DMU_2 ، و DMU_3 واحدهای ناکارا می‌باشند.

اکنون به محاسبه مقادیر کارایی ارزشی از واحدهای تصمیم‌گیرنده در تکنولوژی‌های بازده به مقیاس متغیر و شبه-جمعی می‌پردازیم. برای انتخاب واحدهای MPU می‌توانیم از مجموعه واحدهای موجود در مجموعه مرجع متناسب با هر یک از واحدهای تصمیم‌گیرنده استفاده نماییم یا اینکه مطابق نظر مدیر واحدهایی را که دارای بهترین عملکرد در بین واحدهای تصمیم‌گیرنده می‌باشند را انتخاب نماییم. واحدهای ناکارای DMU_2 و DMU_3 واحدهای DMU_1 ، DMU_4 ، و DMU_5 را به عنوان واحدهای الگو در مجموعه مرجع متناظر خود انتخاب می‌کنند. بنابراین ما می‌توانیم این واحدها را به عنوان واحدهای MPU در ارزیابی کارایی ارزشی در مدل‌های (۷) و (۱۱) انتخاب نماییم. جداول (۳) و (۴) نتایج ارزیابی مقادیر کارایی ارزشی را بر اساس انتخاب واحدهای MPU متفاوت نشان می‌دهد.

جدول ۲ مجموعه داده‌ها و نتایج ارزیابی کارایی از مثال عددی

DMU	ورودی اول	ورودی دوم	خروجی	مقادیر کارایی حاصل از مدل BCC (مدل ۷)	مقادیر کارایی حاصل از مدل شبه‌جمعی (مدل ۶)
۱	۲	۳	۲	۱	۱
۲	۳	۷	۴	۰.۸۳۳۳	۰.۸۳۳۳
۳	۵	۵	۵	۱	۰.۹۱۶۷
۴	۴	۲	۳	۱	۱
۵	۳	۷	۶	۱	۱

جدول ۳ مقادیر کارایی ارزشی در تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر

DMU	مقادیر کارایی ارزشی حاصل از مدل BCC (مدل ۹)			
MPU	DMU_1	DMU_4	DMU_5	DMU_4, DMU_5
۱	۱	۱	۱	۱
۲	۰.۸۳۳۳	۰.۷۵۳۴	۰.۸۳۳۳	۰.۷۵۳۴
۳	۰.۸۵۳۳	۱	۱	۱
۴	۱	۱	۱	۱
۵	۱	۱	۱	۱
میانگین	۰.۹۳۷۳	۰.۹۵۰۶	۰.۹۶۶۷	۰.۹۵۰۶

جدول ۴ مقادیر کارایی ارزیابی در تکنولوژی شبه جمعی

DMU	مقادیر کارایی ارزیابی حاصل از مدل شبه جمعی (مدل ۱۱)			
MPU	DMU _۱	DMU _۴	DMU _۵	DMU _۴ , DMU _۵
۱	۱	۱	۱	۱
۲	۰.۸۳۳۳	۰.۷۵۳۴	۰.۸۳۳۳	۰.۷۵۳۴
۳	۰.۸۵۳۳	۰.۹۱۶۷	۰.۹۱۶۷	۰.۹۱۶۷
۴	۱	۱	۱	۱
۵	۱	۱	۱	۱
میانگین	۰.۹۳۷۳	۰.۹۳۴	۰.۹۵	۰.۹۳۴

به عنوان مثال واحد ناکارای $DMU_۲$ را در نظر بگیرید. در صورتی که $DMU_۱$ را به عنوان واحد MPU انتخاب نماییم، مقادیر کارایی ارزیابی این واحد در تکنولوژی‌های بازده به مقیاس متغیر و شبه‌جمعی باهم برابر می‌باشند و برابر است با ۰.۸۳۳.

در صورتی که $DMU_۴$ را به عنوان واحد MPU انتخاب نماییم، مقادیر کارایی ارزیابی واحد ناکارای $DMU_۲$ در تکنولوژی‌های بازده به مقیاس متغیر و شبه‌جمعی باهم برابر می‌باشند و برابر است با ۰.۷۵۳۴. با انتخاب‌های متفاوت از واحدهای MPU مقادیر کارایی ارزیابی این واحد در تکنولوژی‌های بازده به مقیاس متغیر و شبه‌جمعی با هم برابر می‌باشند، زیرا در ارزیابی کارایی ارزیابی واحد ناکارای $DMU_۲$ در تکنولوژی‌های بازده به مقیاس متغیر و شبه‌جمعی مرز تقریبی کارایی یکسان می‌شود و این باعث می‌شود که مقادیر کارایی ارزیابی این واحد در تکنولوژی‌های بازده به مقیاس متغیر و شبه‌جمعی با هم برابر شوند.

در صورتی که بخواهیم کارایی ارزیابی واحد ناکارای $DMU_۳$ را محاسبه نماییم، نتایج نسبت به واحد ناکارای $DMU_۲$ متفاوت می‌باشد. در ابتدا واحد $DMU_۱$ را به عنوان واحد MPU انتخاب می‌نماییم، مقادیر کارایی ارزیابی این واحد در تکنولوژی‌های بازده به مقیاس متغیر و شبه‌جمعی با هم برابر می‌باشند و برابر است با ۰.۸۵۳۳.

در صورتی که $DMU_۴$ را به عنوان واحد MPU انتخاب نماییم، مقادیر کارایی ارزیابی واحد ناکارای $DMU_۳$ در تکنولوژی‌های بازده به مقیاس متغیر و شبه‌جمعی به ترتیب برابر است با ۱ و ۰.۹۱۶۷.

که مقادیر متفاوت می‌باشند، زیرا در تکنولوژی‌های بازده به مقیاس متغیر و شبه‌جمعی مرز تقریبی کارایی ارزیابی متفاوت می‌باشد. مرز تقریبی کارایی تکنیکی و ارزیابی در تکنولوژی‌های بازده به مقیاس متغیر در محاسبه مقادیر کارایی تکنیکی و ارزیابی برای واحد ناکارای $DMU_۳$ با انتخاب $DMU_۴$ را به عنوان واحد MPU بر اساس مدل‌های (۷) و (۹) تغییر نمی‌کند. اما در این حالت مقدار کارایی ارزیابی در تکنولوژی شبه‌جمعی از مقدار کارایی ارزیابی متناظر خود در در تکنولوژی‌های بازده به مقیاس متغیر کوچک‌تر می‌باشد.

با انتخاب واحدهای $DMU_۴$ و $DMU_۵$ به عنوان واحدهای MPU نتایج مشابهی را برای مقادیر کارایی ارزیابی برای واحد ناکارای $DMU_۳$ مشابه حالتی که $DMU_۴$ را به عنوان واحد MPU انتخاب کردیم مطابق جداول (۳) و (۴) خواهیم داشت.

سطر آخر جداول (۳) و (۴) میانگین مقادیر کارایی ارزیابی را بر اساس انتخاب‌های متفاوت از واحدهای MPU نشان می‌دهند.

۵- آنالیز کارایی ارزشی از شعب بانک

آنالیز کارایی ارزشی از شعب بانک به منظور مقایسه نتایج حاصل از تقریب کارایی ارزشی در سه تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر، غیرمحدب، و شبه‌جمعی از مجموعه داده‌های بانک در فنلاند استفاده می‌کنیم. این داده‌ها مربوط به هلسینکی اوپی بانک^{۳۰} می‌باشد که متعلق به گروه اوپی-پوهجولا^{۳۱} می‌باشد، که یک شرکت مالی پیشرو در کشور فنلاند می‌باشد، که خدمات بانکداری، سرمایه‌گذاری، تأمین مالی پروژه‌ها و خدمات بیمه‌ای به مشتریان ارائه می‌دهند. شبکه بانکی یک کانال مهم برای فروش سرویس‌های مالی می‌باشند و مدیریت به دنبال فرصتی برای بهبود عملکرد فروش شعب می‌باشد. در ارزیابی کارایی و بهبود عملکرد این ۲۵ شعبه از بانک، تقریب‌های متفاوتی بر اساس تکنولوژی‌های متفاوت ارائه شده است (اسکلینن^{۳۲} و همکاران [۲۱]، اسکلینن و کاوسمنن^{۳۳} [۲۷]).

مجموعه داده‌های ورودی و خروجی متناظر با این شعب در جدول (۵) آمده است (هالمه و همکاران [۲۲]). خروجی‌ها حجم فروش معاملاتی شعب را نشان می‌دهند. فروش‌ها را می‌توان به دو دسته تقسیم نمود. طبقه یک شامل خدمات مالی و طبقه دوم شامل خدمات سرمایه‌گذاری. خدمات بانکی روزانه از جمله خدمات صندوق‌داری از آنالیز مورد بحث خارج شده‌اند. برخی از خدمات بیمه‌ای در خدمات سرمایه‌گذاری و برخی دیگر در خدمات مالی گنجانده شده‌اند و بیمه‌های غیرزندگی واسطه‌گری و بانک را کنار گذاشتیم. در این مطالعه دو خروجی در مدل استفاده شده است. (۱) خدمات تأمین مالی و (۲) خدمات سرمایه‌گذاری.

خروجی‌ها فاکتورهایی می‌باشند که افزایش آنها منجر به افزایش کارایی می‌شود. در این مطالعه بعضی از فاکتورهای دارای ماهیت خروجی با هم ادغام شده‌اند و یک خروجی واحد ایجاد گردیده است. بدین صورت که با توجه به نظر مدیریت میانگین وزنی از این فاکتورها یک خروجی واحد را ایجاد می‌کنند و این وزن‌ها میزان اهمیت آن فاکتور خروجی را نشان می‌دهد و توسط مدیر تعیین می‌گردد. به عنوان مثال همان‌طور که گفته شد، برخی از خدمات بیمه‌ای در خدمات سرمایه‌گذاری و برخی دیگر در خدمات مالی گنجانده شده‌اند. این وزن‌ها توسط هالمه و همکاران [۲۲] بر اساس نظر مدیریت شعب بانک در فنلاند تعیین گردیده‌اند.

تنها ورودی مورد استفاده در این مطالعه، کارایی نیروهای فروش می‌باشد. با توجه به اینکه سایر هزینه‌های عملیاتی دارای اهمیت کمی باشند، آنها را از آنالیز کارایی حذف کردیم. ورودی و خروجی‌ها در جدول (۵) آمده‌اند.

جدول ۵ داده‌های ورودی و خروجی از شعب بانک

DMU	خروجی اول	خروجی دوم	ورودی	مقادیر کارایی حاصل از مدل BCC (مدل ۷)	مقادیر کارایی حاصل از مدل شبه جمعی (مدل ۶)
۱	۱۰۹۰	۴۹۷	۲۶	۰.۸۳۱	۰.۸۳۱
۲	۲۶۳۳	۱۱۱۱	۴۷.۷	۰.۸۰۵	۰.۸۰۵
۳	۳۳۲۰	۱۴۷۷	۶۰.۷	۰.۷۹۲	۰.۷۹۲
۴	۱۱۴۷	۳۵۳	۲۵.۲	۰.۸۵۷	۰.۸۵۷
۵	۱۱۸۰	۵۴۰	۲۱.۶	۱	۱
۶	۳۸۲۱	۱۷۶۹	۷۵.۵	۰.۷۳۶	۰.۷۳۶

^{۳۰} Helsinki OP Bank

^{۳۱} OP-Pohjola

^{۳۲} Eskelinen

^{۳۳} Eskelinen and Kuosmanen

۷	۱۵۷۴	۷۱۶	۳۶.۴	۰.۷۲۵	۰.۷۲۵
۸	۱۱۷۱	۱۰۰۴	۲۹.۱	۱	۱
۹	۱۱۷۴	۴۴۹	۲۲.۵	۰.۹۶	۰.۹۶
۱۰	۱۲۰۳	۵۶۸	۲۷.۲	۰.۸۱۵	۰.۸۱۵
۱۱	۹۲۸	۳۸۴	۲۲	۰.۹۸۲	۰.۹۸۲
۱۲	۴۳۹۳	۲۲۱۰	۶۵.۹	۱	۱
۱۳	۲۶۴۲	۹۳۱	۳۸.۸	۰.۹۱۳	۰.۹۱۳
۱۴	۳۳۶۲	۱۵۰۵	۵۳.۱	۰.۹۱۸	۰.۹۱۸
۱۵	۲۲۶۳	۵۴۱	۲۶.۹	۱	۱
۱۶	۳۶۱۹	۱۵۴۱	۷۰.۳	۰.۷۳۶	۰.۷۲۵
۱۷	۴۱۶۳	۱۵۹۴	۷۳.۶	۰.۸۳۸	۰.۷۶۸
۱۸	۳۰۷۵	۸۰۵	۴۶.۷	۰.۸۹۴	۰.۸۳۱
۱۹	۵۷۵۷	۲۶۰۱	۹۳	۱	۰.۸۹۶
۲۰	۱۷۶۳	۴۹۶	۲۹	۰.۸۴۳	۰.۸۴۳
۲۱	۳۸۲۵	۱۹۶۱	۸۳.۱	۰.۷۰۸	۰.۷۰۸
۲۲	۲۳۵۴	۷۹۲	۴۲.۴	۰.۷۴۵	۰.۷۴۵
۲۳	۵۲۸۹	۳۱۶۰	۱۰۴	۱	۰.۸۹۸
۲۴	۱۱۰۸	۳۳۲	۲۴.۲	۰.۸۹۳	۰.۸۹۳
۲۵	۷۴۳	۳۵۴	۲۲.۴	۰.۹۶۴	۰.۹۶۴

در ابتدا مدل‌های ماهیت ورودی را در نظر می‌گیریم. ستون چهارم و پنجم از جدول (۵) مقادیر کارایی تکنیکی حاصل از مدل‌های BCC و شبه‌جمعی را در ماهیت ورودی نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌گردد، شعب ۵، ۸، ۱۲ و ۱۵ در ارزیابی بر اساس هر دو مدل BCC و شبه‌جمعی کارا می‌باشند و شعب ۱۹ و ۲۳ بر اساس مدل BCC کارا و بر اساس مدل شبه‌جمعی ناکارا می‌باشند. از نقطه نظر مدیریت شعب ۱۲ و ۱۳ و ۱۵ دارای بهترین عملکرد در بین شعب می‌باشند. با توجه به نظر مدیریت بانک می‌توانند به عنوان واحدهای MPU انتخاب شوند. شعبه ۱۳ یک واحد ناکارا در ارزیابی با هر دو مدل می‌باشد، اما شعب ۱۲ و ۱۵ را به عنوان الگو در مجموعه مرجع متناظر خود انتخاب می‌کنند. مجموعه مرجع متناسب با شعب ۱۲ و ۱۵ خود این واحدها می‌باشند. در جدول (۶) مجموعه مرجع متناظر با واحدهای مختلف آمده است.

جدول ۶ مجموعه مرجع متناظر با هریک از شعب بانک براساس مدل‌های ماهیت ورودی

DMU	مدل BCC (مدل ۷)	مدل شبه جمعی (مدل ۶)
۱	DMU _{۰.۵}	DMU _{۰.۵}
۲	DMU _{۰.۸} , DMU _{۱۲} , DMU _{۱۵}	DMU _{۰.۸} , DMU _{۱۲} , DMU _{۱۵}
۳	DMU _{۰.۸} , DMU _{۱۲} , DMU _{۱۵}	DMU _{۰.۸} , DMU _{۱۲} , DMU _{۱۵}
۴	DMU _{۰.۵}	DMU _{۰.۵}
۵	DMU _{۰.۵}	DMU _{۰.۵}
۶	DMU _{۰.۸} , DMU _{۱۲} , DMU _{۱۵}	DMU _{۰.۸} , DMU _{۱۲} , DMU _{۱۵}
۷	DMU _{۰.۵} , DMU _{۰.۸} , DMU _{۱۵}	DMU _{۰.۵} , DMU _{۰.۸} , DMU _{۱۵}
۸	DMU _{۰.۸}	DMU _{۰.۸}
۹	DMU _{۰.۵}	DMU _{۰.۵}

۱۰	DMU۰۵, DMU۰۸, DMU۱۵	DMU۰۵, DMU۰۸, DMU۱۵
۱۱	DMU۰۵	DMU۰۵
۱۲	DMU۱۲	DMU۱۲
۱۳	DMU۰۸, DMU۱۲, DMU۱۵	DMU۰۸, DMU۱۲, DMU۱۵
۱۴	DMU۰۸, DMU۱۲, DMU۱۵	DMU۰۸, DMU۱۲, DMU۱۵
۱۵	DMU۱۵	DMU۱۵
۱۶	DMU۱۲, DMU۱۵	DMU۱۲, DMU۱۵
۱۷	DMU۱۲, DMU۱۵	DMU۱۲, DMU۱۵
۱۸	DMU۱۲, DMU۱۵	DMU۱۲, DMU۱۵
۱۹	DMU۱۶	DMU۱۲, DMU۱۴, DMU۱۵
۲۰	DMU۰۵, DMU۱۵	DMU۰۵, DMU۱۵
۲۱	DMU۰۸, DMU۱۲, DMU۱۵	DMU۰۸, DMU۱۲, DMU۱۵
۲۲	DMU۰۸, DMU۱۲, DMU۱۵	DMU۰۸, DMU۱۲, DMU۱۵
۲۳	DMU۲۳	DMU۰۸, DMU۱۲
۲۴	DMU۰۵	DMU۰۵
۲۵	DMU۰۵	DMU۰۵

ما می‌توانیم واحدهای MPU را متناظر با واحد تحت ارزیابی از میان این واحدها انتخاب نماییم. با توجه به نتایج در جدول (۶)، و نظر تصمیم‌گیرنده ما واحدهای MPU متفاوتی را برای ارزیابی کارایی ارزشی انتخاب می‌کنیم. آنالیز کارایی ارزشی مربوط به همه شعب را با انتخاب شعب ۱۲ و ۱۳ و ۱۵ به عنوان واحدهای MPU انجام می‌دهیم. نتایج آنالیز کارایی ارزشی در دو تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر و شبه‌جمعی با انتخاب واحدهای MPU متفاوت در جداول (۷) و (۸) آمده است.

جدول ۷ مقادیر کارایی ارزشی در تکنولوژی بازده مقیاس متغیر در ماهیت ورودی براساس مدل (۷)

DMU	مقادیر کارایی ارزشی در تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر			
MPU	DMU۱۲	DMU۱۵	DMU۱۲, DMU۱۵	DMU۱۲, DMU۱۳, DMU۱۵
۱	۰.۷۷۵	۰.۸۱۴	۰.۷۷۵	Unb
۲	۰.۸۰۵	۰.۸۰۵	۰.۸۰۵	Unb
۳	۰.۷۹۲	۰.۷۹۲	۰.۷۹۲	Unb
۴	۰.۷۱۵	۰.۸۵۱	۰.۷۱۵	Unb
۵	۰.۹۸۸	۱	۰.۹۸۸	Unb
۶	۰.۷۳۶	۰.۷۳۶	۰.۷۳۶	Unb
۷	۰.۷۲۳	۰.۷۲۵	۰.۷۲۳	Unb
۸	۱	۱	۱	Unb
۹	۰.۸۷۹	۰.۹۵۹	۰.۸۷۹	Unb
۱۰	۰.۸۰۶	۰.۸۱۵	۰.۸۰۶	Unb
۱۱	۰.۷۹۲	۰.۹۲۶	۰.۷۹۲	Unb
۱۲	۱	۱	۱	Unb
۱۳	۰.۹۱۳	۰.۹۱۳	۰.۹۱۳	Unb
۱۴	۰.۹۱۸	۰.۹۱۸	۰.۹۱۸	Unb
۱۵	۱	۱	۱	Unb

۱۶	۰.۷۳۶	۰.۷۳۶	۰.۷۳۶	Unb
۱۷	۰.۸۳۸	۰.۸۳۸	۰.۸۳۸	Unb
۱۸	۰.۸۹۴	۰.۸۹۴	۰.۸۹۴	Unb
۱۹	۱	۰.۹۷۷	۰.۹۷۷	Unb
۲۰	۰.۸۱۳	۰.۸۴۳	۰.۸۱۳	Unb
۲۱	۰.۷۰۸	۰.۷۰۸	۰.۷۰۸	Unb
۲۲	۰.۷۴۵	۰.۷۴۵	۰.۷۴۵	Unb
۲۳	۱	۰.۸۳۲	۰.۸۳۲	Unb
۲۴	۰.۷۲۲	۰.۸۷۸	۰.۷۲۲	Unb
۲۵	۰.۷۱۳	۰.۸۶۹	۰.۷۱۳	Unb
میانگین	۰.۸۴	۰.۸۶۳	۰.۸۳۳	Unb

جدول ۸ مقادیر کارایی ارزشی در تکنولوژی شبه جمعی در ماهیت ورودی براساس مدل (۱۱)

DMU	مقادیر کارایی ارزشی در تکنولوژی شبه جمعی			
MPU	DMU _{۱۲}	DMU _{۱۵}	DMU _{۱۲} , DMU _{۱۵}	DMU _{۱۲} , DMU _{۱۳} , DMU _{۱۵}
۱	۰.۷۷۵	۰.۸۱۷	۰.۷۷۵	۰.۴۱۷
۲	۰.۸۰۵	۰.۸۰۵	۰.۸۰۵	۰.۶۲۷
۳	۰.۷۹۲	۰.۷۹۲	۰.۷۹۲	۰.۶۵
۴	۰.۷۱۵	۰.۸۵۲	۰.۷۱۵	۰.۳۸۵
۵	۰.۹۸۸	۱	۰.۹۸۸	۰.۵۵۵
۶	۰.۷۳۶	۰.۷۳۶	۰.۷۳۶	۰.۶۱۷
۷	۰.۷۲۳	۰.۷۲۵	۰.۷۲۳	۰.۴۶۴
۸	۱	۱	۱	۰.۵۸۵
۹	۰.۸۷۹	۰.۹۵۹	۰.۸۷۹	۰.۴۸۷
۱۰	۰.۸۰۶	۰.۸۱۵	۰.۸۰۶	۰.۴۵۸
۱۱	۰.۷۹۲	۰.۹۳۶	۰.۷۹۲	۰.۳۸۲
۱۲	۱	۱	۱	۰.۸۴۴
۱۳	۰.۹۱۳	۰.۹۱۳	۰.۹۱۳	۰.۷۳۶
۱۴	۰.۹۱۸	۰.۹۱۸	۰.۹۱۸	۰.۷۵۵
۱۵	۱	۱	۱	۰.۸۰۹
۱۶	۰.۷۲۵	۰.۷۲۵	۰.۷۲۵	۰.۶۰۹
۱۷	۰.۷۶۸	۰.۷۶۸	۰.۷۶۸	۰.۶۷۷
۱۸	۰.۸۳	۰.۸	۰.۸	۰.۷۰۶
۱۹	۰.۸۹۱	۰.۸۹۶	۰.۸۹۱	۰.۷۹۷
۲۰	۰.۸۱۳	۰.۸۴۳	۰.۸۱۳	۰.۵۷۲
۲۱	۰.۷۰۸	۰.۷۰۸	۰.۷۰۸	۰.۵۸
۲۲	۰.۷۴۵	۰.۷۴۵	۰.۷۴۵	۰.۵۸۲
۲۳	۰.۸۹۸	۰.۸۷	۰.۸۳۲	۰.۷۲۵
۲۴	۰.۷۲۲	۰.۸۸۱	۰.۷۲۲	۰.۳۸
۲۵	۰.۷۱۳	۰.۸۸۵	۰.۷۱۳	۰.۳۹۸
میانگین	۰.۸۲۶	۰.۸۵۶	۰.۸۲۲	۰.۵۸۸

اکنون یکی از این واحدها را به دلخواه انتخاب کرده و مقادیر کارایی ارزیابی مربوط به این واحد را بر اساس انتخاب واحدهای MPU متفاوت شرح می‌دهیم. به عنوان مثال شعبه ۲۳ را در نظر بگیرید. با توجه به جدول (۵)، این واحد، یک واحد کارا در تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر و یک واحد ناکارا در تکنولوژی شبه‌جمعی می‌باشد. در صورتی که شعبه ۱۲ را به عنوان واحد MPU در نظر بگیریم. مطابق نتایج در جداول (۷) و (۸) مقادیر کارایی ارزیابی بر اساس مدل BCC (مدل (۷)) و مدل شبه‌جمعی (مدل (۱۱)) به ترتیب برابر با ۰.۸۹۸ و ۰.۸۹۸ می‌باشد. که مقدار کارایی ارزیابی بر پایه مدل BCC از مقدار متناظر خود حاصل از مدل شبه‌جمعی بزرگتر می‌باشد. در صورتی که شعبه ۱۲ را به عنوان واحد MPU در نظر بگیریم. مطابق نتایج در جداول (۷) و (۸) مقادیر کارایی ارزیابی بر اساس مدل BCC (مدل (۷)) و مدل شبه‌جمعی (مدل (۱۱)) به ترتیب برابر با ۰.۸۳۲ و ۰.۸۷ می‌باشد. که مقدار کارایی ارزیابی بر پایه مدل BCC از مقدار متناظر خود حاصل از مدل شبه‌جمعی کوچک‌تر می‌باشد.

در صورتی که شعب ۱۲ و ۱۳ را به طور همزمان به عنوان واحدهای MPU انتخاب نماییم، مقادیر کارایی ارزیابی حاصل از این مدل‌ها مانند حالتی است که تنها شعبه ۱۵ را به عنوان واحد MPU انتخاب نماییم. در صورتی که سه شعبه ۱۲، ۱۳ و ۱۵ را به طور همزمان به عنوان واحدهای MPU انتخاب نماییم. مدل ارزیابی کارایی ارزیابی بر اساس مدل BCC (مدل (۷)) بیکران می‌باشد و نتیجه‌ای را در بر ندارد و نمی‌توان یک مقدار مشخص را برای کارایی ارزیابی به دست آورد. اما مقدار کارایی ارزیابی حاصل مدل شبه‌جمعی (مدل (۱۱)) برای واحد ۲۳ برابر با ۰.۷۲۵ می‌باشد.

باید توجه داشت که فلسفه ارائه آنالیز کارایی ارزیابی بدین صورت می‌باشد که مدیر یک یا چند واحد که در بین واحدهای تصمیم‌گیرنده دارای بهترین عملکرد می‌باشند را به عنوان منتخب یا الگو برای سایر واحدها انتخاب می‌نماید. در این مقاله ما این واحدها را، واحدهای با بیشترین برتری یا واحدهای MPU می‌نامیم. این واحدها می‌توانند در مجموعه مرجع متناظر با آن واحد تحت ارزیابی قرار داشته باشند و توسط تصمیم‌گیرنده انتخاب شوند. در ادامه بر اساس تکنولوژی انتخابی، ما کارایی ارزیابی هر یک از واحدهای تحت ارزیابی را به دست می‌آوریم. این واحدها، واحدهایی می‌باشند که دارای عملکرد یکسان با واحدهای MPU می‌باشند. همچنین واحدهای ناکارا، باید سطح ورودی‌ها و خروجی‌های خود را به سطح ورودی‌ها و خروجی‌ها از واحدهای MPU برسانند تا بتوانند یک عملکرد مطلوب مطابق با نظر مدیر داشته باشند. بنابراین با بکار بردن آنالیز کارایی ارزیابی می‌توانیم نظر تصمیم‌گیرنده را در پروسه آنالیز کارایی به کار ببریم.

اکنون با توجه به این که خروجی‌ها در آنالیز کارایی شعب می‌توانند برای مدیر دارای اهمیت بالاتری نسبت به ورودی‌ها باشند. آنالیز مشابه بر اساس تکنولوژی‌های بازده به مقیاس متغیر و شبه‌جمعی در ماهیت خروجی نیز ارائه می‌گردد. نتایج در جدول (۹) آمده است.

جدول ۹ مقادیر کارایی تکنیکی در ماهیت خروجی

مدل شبه جمعی	مدل BCC	DMU	مدل شبه جمعی	مدل BCC	DMU
۰.۹	۰.۹۰۷	۱۳	۰.۷۰۸	۰.۷۰۸	۱
۰.۹۰۸	۰.۹۱	۱۴	۰.۷۷۶	۰.۷۷۶	۲
۱	۱	۱۵	۰.۷۸۳	۰.۸۰۸	۳
۰.۷۲۵	۰.۷۸۴	۱۶	۰.۶۲۵	۰.۶۲۵	۴
۰.۷۷۳	۰.۸۷۱	۱۷	۱	۱	۵

۶	۰.۷۸۴	۰.۷۳۵	۱۸	۰.۹۱۹	۰.۸۵۲
۷	۰.۶۶۶	۰.۶۶۶	۱۹	۱	۰.۹۰۴
۸	۱	۱	۲۰	۰.۷۶۲	۰.۷۶۲
۹	۰.۸۶۱	۰.۸۶۱	۲۱	۰.۷۶۶	۰.۷۱۷
۱۰	۰.۷۵	۰.۷۵	۲۲	۰.۷۵۷	۰.۷۲۴
۱۱	۰.۷۳۵	۰.۷۳۵	۲۳	۱	۰.۹۰۶
۱۲	۱	۱	۲۴	۰.۶۴۷	۰.۶۴۷
۱۳	۰.۹۰۷	۰.۹	۲۵	۰.۶۱۲	۰.۶۱۲

همانطور که مشاهده می‌گردد، مشابه مدل‌های ماهیت ورودی، براساس مدل‌های ماهیت خروجی نیز شعب ۵، ۸، ۱۲، و ۱۵ در ارزیابی بر اساس هر دو مدل BCC و شبه‌جمعی کارا می‌باشند و شعب ۱۹ و ۲۳ بر اساس مدل BCC کارا و بر اساس مدل شبه‌جمعی ناکارا می‌باشند. مشابه آنالیز نتایج در ماهیت ورودی، در آنالیز نتایج براساس ماهیت خروجی، شعب ۱۲ و ۱۳ و ۱۵ دارای بهترین عملکرد در بین شعب می‌باشند. با توجه به نظر مدیریت بانک می‌توانند به عنوان واحدهای MPU انتخاب شوند. در جدول (۱۰) مجموعه مرجع متناظر با واحدهای مختلف بر اساس مدل‌ها در ماهیت خروجی آمده است و می‌توانیم واحدهای MPU را متناظر با واحد تحت ارزیابی از میان این واحدها انتخاب نماییم.

جدول ۱۰ مجموعه مرجع متناظر با هریک از شعب بانک براساس مدل‌های ماهیت خروجی

DMU	مدل BCC	مدل شبه جمعی
۱	DMU۰.۵, DMU۰.۸, DMU۱.۵	DMU۰.۵, DMU۰.۸, DMU۱.۵
۲	DMU۰.۸, DMU۱.۲, DMU۱.۵	DMU۰.۸, DMU۱.۲, DMU۱.۵
۳	DMU۱.۲, DMU۱.۵	DMU۱.۲, DMU۱.۵
۴	DMU۰.۵, DMU۰.۸, DMU۱.۵	DMU۰.۵, DMU۰.۸, DMU۱.۵
۵	DMU۰.۵	DMU۰.۵
۶	DMU۱.۲, DMU۱.۹	DMU۱.۲, DMU۱.۴, DMU۱.۵
۷	DMU۰.۸, DMU۱.۲, DMU۱.۵	DMU۰.۸, DMU۱.۲, DMU۱.۵
۸	DMU۰.۸	DMU۰.۸
۹	DMU۰.۵, DMU۱.۵	DMU۰.۵, DMU۱.۵
۱۰	DMU۰.۵, DMU۰.۸, DMU۱.۵	DMU۰.۵, DMU۰.۸, DMU۱.۵
۱۱	DMU۰.۵, DMU۱.۵	DMU۰.۵, DMU۱.۵
۱۲	DMU۱.۲	DMU۱.۲
۱۳	DMU۱.۲, DMU۱.۵	DMU۱.۲, DMU۱.۵
۱۴	DMU۱.۲, DMU۱.۵	DMU۱.۲, DMU۱.۵
۱۵	DMU۱.۵	DMU۱.۵
۱۶	DMU۱.۲, DMU۱.۹	DMU۱.۲, DMU۱.۵
۱۷	DMU۱.۲, DMU۱.۹	DMU۱.۲, DMU۱.۳, DMU۱.۵
۱۸	DMU۱.۲, DMU۱.۵	DMU۱.۳, DMU۱.۵
۱۹	DMU۱.۹	DMU۱.۲, DMU۱.۴, DMU۱.۵

۲۰	DMU۰۸, DMU۱۲, DMU۱۵	DMU۰۸, DMU۱۲, DMU۱۵
۲۱	DMU۱۲, DMU۱۹, DMU۲۳	DMU۰۸, DMU۱۲, DMU۱۴
۲۲	DMU۱۲, DMU۱۵	DMU۱۲, DMU۱۵
۲۳	DMU۲۳	DMU۰۸, DMU۱۲, DMU۲۳
۲۴	DMU۰۵, DMU۱۵	DMU۰۵, DMU۱۵
۲۵	DMU۰۵, DMU۰۸, DMU۱۵	DMU۰۵, DMU۰۸, DMU۱۵

با توجه به نتایج در جدول (۱۰)، و نظر تصمیم‌گیرنده ما واحدهای MPU متفاوتی را برای ارزیابی کارایی ارزشی در ماهیت خروجی انتخاب می‌کنیم. مشابه ماهیت ورودی، آنالیز کارایی ارزشی مربوط به همه شعب را با انتخاب شعب ۱۲ و ۱۳ و ۱۵ به عنوان واحدهای MPU انجام می‌دهیم. نتایج آنالیز کارایی ارزشی در دو تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر و شبه‌جمعی با انتخاب واحدهای MPU متفاوت در جداول (۱۱) و (۱۲) آمده است.

جدول ۱۱ مقادیر کارایی ارزشی در تکنولوژی بازده مقیاس متغیر در ماهیت خروجی

DMU	مقادیر کارایی ارزشی در تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر			
MPU	DMU۱۲	DMU۱۵	DMU۱۲, DMU۱۵	DMU۱۲, DMU۱۳, DMU۱۵
۱	۰.۷۰۵	۰.۷۰۸	۰.۷۰۵	Unb
۲	۰.۷۷۶	۰.۷۷۶	۰.۷۷۶	Unb
۳	۰.۸۰۸	۰.۸۰۸	۰.۸۰۸	Unb
۴	۰.۶۲۲	۰.۶۲۵	۰.۶۲۲	Unb
۵	۰.۹۸۳	۱	۰.۹۸۳	Unb
۶	۰.۷۸۴	۰.۷۷۷	۰.۷۷۷	Unb
۷	۰.۶۶۶	۰.۶۶۶	۰.۶۶۶	Unb
۸	۱	۱	۱	Unb
۹	۰.۸۳۳	۰.۸۶۱	۰.۸۳۳	Unb
۱۰	۰.۷۴۹	۰.۷۵	۰.۷۴۹	Unb
۱۱	۰.۷۱	۰.۷۳۵	۰.۷۱	Unb
۱۲	۱	۱	۱	Unb
۱۳	۰.۹۰۷	۰.۹۰۷	۰.۹۰۷	Unb
۱۴	۰.۹۱	۰.۹۱	۰.۹۱	Unb
۱۵	۱	۱	۱	Unb
۱۶	۰.۷۸۴	۰.۷۸۱	۰.۷۸۱	Unb
۱۷	۰.۸۷۱	۰.۸۶۵	۰.۸۶۵	Unb
۱۸	۰.۹۱۹	۰.۹۱۹	۰.۹۱۹	Unb
۱۹	۱	۰.۹۸	۰.۹۸	Unb
۲۰	۰.۷۶۲	۰.۷۶۲	۰.۷۶۲	Unb
۲۱	۰.۷۶۶	۰.۷۱۷	۰.۷۱۷	Unb
۲۲	۰.۷۵۷	۰.۷۵۷	۰.۷۵۷	Unb
۲۳	۱	۰.۸۲۱	۰.۸۲۱	Unb
۲۴	۰.۶۲۶	۰.۶۴۷	۰.۶۲۶	Unb
۲۵	۰.۶۰۳	۰.۶۱۲	۰.۶۰۳	Unb
میانگین	۰.۸۳۲	۰.۸۱۵	۰.۸۱۱	Unb

جدول ۱۲ مقادیر کارایی ارزشی در تکنولوژی شبه جمعی در ماهیت خروجی

DMU	مقادیر کارایی ارزشی در تکنولوژی شبه جمعی			
MPU	DMU۱۲	DMU۱۵	DMU۱۲, DMU۱۵	DMU۱۲, DMU۱۳, DMU۱۵
۱	۰.۷۰۵	۰.۷۰۸	۰.۷۰۵	۰.۴۷۷
۲	۰.۷۷۶	۰.۷۷۶	۰.۷۷۶	۰.۶۵۹
۳	۰.۷۸۳	۰.۷۸۳	۰.۷۸۳	۰.۶۸۳
۴	۰.۶۲۲	۰.۶۲۵	۰.۶۲۲	۰.۴۶۹
۵	۰.۹۸۳	۱	۰.۹۸۳	۰.۶۰۶
۶	۰.۷۳۵	۰.۷۳۵	۰.۷۳۵	۰.۶۵۴
۷	۰.۶۶۶	۰.۶۶۶	۰.۶۶۶	۰.۵۱۳
۸	۱	۱	۱	۰.۶۲۱
۹	۰.۸۳۳	۰.۸۶۱	۰.۸۳۳	۰.۵۵۵
۱۰	۰.۷۴۹	۰.۷۵	۰.۷۴۹	۰.۵۱۱
۱۱	۰.۷۱	۰.۷۳۵	۰.۷۱	۰.۴۵۶
۱۲	۱	۱	۱	۰.۸۵۴
۱۳	۰.۹	۰.۹	۰.۹	۰.۷۷
۱۴	۰.۹۰۸	۰.۹۰۸	۰.۹۰۸	۰.۷۷۴
۱۵	۱	۱	۱	۰.۸۴۹
۱۶	۰.۷۲۵	۰.۷۲۵	۰.۷۲۵	۰.۶۵۶
۱۷	۰.۷۷۳	۰.۷۶۸	۰.۷۶۸	۰.۷۲۱
۱۸	۰.۸۴۹	۰.۸	۰.۸	۰.۷۶۵
۱۹	۰.۸۹۱	۰.۹۰۴	۰.۸۹۱	۰.۸۲
۲۰	۰.۷۶۲	۰.۷۶۲	۰.۷۶۲	۰.۶۳۱
۲۱	۰.۷۰۳	۰.۷۱۴	۰.۶۹۶	۰.۶۱۸
۲۲	۰.۷۲۴	۰.۷۲۴	۰.۷۲۴	۰.۶۳۹
۲۳	۰.۸۹۹	۰.۸۸۲	۰.۸۲۱	۰.۷۷۲
۲۴	۰.۶۲۶	۰.۶۴۷	۰.۶۲۶	۰.۴۶۷
۲۵	۰.۶۰۳	۰.۶۱۲	۰.۶۰۳	۰.۳۷۵
میانگین	۰.۷۹۷	۰.۷۹۹	۰.۷۹۱	۰.۶۳۷

مشابه آنالیز نتایج براساس مدل‌های ماهیت خروجی، شعبه ۲۳ را در نظر بگیرید. با توجه به جدول (۹)، این واحد، یک واحد کارا در تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر و یک واحد ناکارا در تکنولوژی شبه جمعی می‌باشد. در صورتی که شعبه ۱۲ را به عنوان واحد MPU در نظر بگیریم. مطابق نتایج در جداول (۱۱) و (۱۲) مقادیر کارایی ارزشی بر اساس مدل BCC و مدل شبه جمعی در ماهیت خروجی به ترتیب برابر با ۰.۸۹۹ و ۰.۸۹۹ می‌باشد. مشابه ماهیت ورودی، مقدار کارایی ارزشی بر پایه مدل BCC از مقدار متناظر خود حاصل از مدل شبه جمعی بزرگ‌تر می‌باشد. در صورتی که شعبه ۱۲ را به عنوان واحد MPU در نظر بگیریم. مطابق نتایج در جداول (۱۱) و (۱۲) مقادیر کارایی ارزشی بر اساس مقادیر کارایی ارزشی بر اساس مدل BCC و مدل شبه جمعی در ماهیت خروجی به ترتیب برابر با ۰.۸۲۱ و ۰.۸۸۲ می‌باشد. که مقدار کارایی ارزشی بر پایه مدل BCC از مقدار متناظر خود حاصل از مدل شبه جمعی کوچک‌تر

می‌باشد. در صورتی که شعب ۱۲ و ۱۳ را به طور همزمان به عنوان واحدهای MPU انتخاب نماییم، مقادیر کارایی ارزیابی حاصل از این مدل‌ها در ماهیت خروجی با هم برابر می‌باشد و برابر با ۰.۸۲۱ می‌باشد، در صورتی که نتایج حاصل از مدل‌ها در ماهیت ورودی مربوط به دو مدل متفاوت بود.

برای اینکه شعب ۱۲ و ۱۳ را به طور همزمان به عنوان واحدهای MPU در مدل (۱۱) بکار ببریم کافی است مضارب مربوط به این واحدها یعنی λ_{12} و λ_{13} را در مدل (۱۱) آزاد در علامت انتخاب نماییم و مضارب λ_l را برای سایر واحدها در مدل (۱۱) نامنفی قرار دهیم. در این صورت مقادیر کارایی ارزیابی حاصل از مدل (۱۱)، بر اساس مجموعه $J_o^{MPU} = \{12, 13\}$ حاصل می‌گردد.

در صورتی که سه شعبه ۱۲، ۱۳، و ۱۵ را به طور همزمان به عنوان واحدهای MPU انتخاب نماییم. مدل ارزیابی کارایی ارزیابی بر اساس مدل BCC در ماهیت خروجی، مشابه مدل ماهیت ورودی بیکران می‌باشد و نتیجه‌ای را در بر ندارد و نمی‌توان یک مقدار مشخص را برای کارایی ارزیابی به دست آورد. اما مقدار کارایی ارزیابی حاصل مدل شبه‌جمعی در ماهیت خروجی برای واحد ۲۳ برابر با ۰.۷۷۲ می‌باشد.

همان‌طور که قبلاً بیان گردید با توجه به اینکه مقدار خروجی‌ها برای مدیر می‌تواند دارای اهمیت باشد، لذا پیشنهاد می‌گردد که مدل‌های ماهیت خروجی را نسبت به مدل‌های ماهیت ورودی مورد توجه قرار دهیم. اکنون می‌توانیم اهداف پیشنهادی را بر اساس مدل‌های محاسبه کارایی ارزیابی نیز به دست آوریم. این اهداف سطح پیشنهادی را برای ورودی‌ها و خروجی‌ها بر اساس ورودی‌ها و خروجی‌ها از واحدهای MPU به عنوان واحدهای هدف ارائه می‌دهند و واحدهای ناکارا با رساندن سطح ورودی‌ها و خروجی‌های خود به سطح ورودی‌ها و خروجی از واحدهای MPU می‌تواند عملکرد مطلوب را از دیدگاه مدیریت داشته باشند. باید توجه داشت که اهداف حاصل از مدل‌ها بر پایه کارای تکنیکی نسبت به اهداف ارائه شده از مدل‌ها بر پایه کارای ارزیابی با هم متفاوت می‌باشد و برای تصمیم‌گیرنده اهداف حاصل از مدل‌ها بر پایه‌های ارزیابی مطلوب‌تر و مناسب می‌باشند، زیرا این مدل‌ها نظر تصمیم‌گیرنده را در ارزیابی کارایی دخالت می‌دهند و این واحدها بر اساس نظر مدیر و انتخاب واحدهای MPU به عنوان واحدهایی که دارای بهترین عملکرد در بین واحدهای تصمیم‌گیرنده می‌باشند، انتخاب شده‌اند.

باید توجه داشت که در تکنولوژی شبه‌جمعی واحدهای جدید که دارای سطح مجموع ورودی‌ها و خروجی‌ها از واحدهای مشاهده شده می‌باشند، ایجاد می‌گردند. این واحدها ممکن است به عنوان واحدهای MPU نیز انتخاب گردند. در این بخش تنها شعب موجود را به عنوان واحدهای MPU انتخاب کردیم، زیرا مدل‌های ارائه شده در این مقاله برای محاسبه کارایی ارزیابی در این مقاله تنها بر اساس واحدهای مشاهده شده ارائه شده‌اند. لذا می‌توان گفت که مدل‌های ارائه شده در این مقاله برای محاسبه کارایی ارزیابی تنها واحدهای مشاهده شده را به عنوان واحدهای MPU انتخاب می‌کنند و نتایج مربوط به محاسبه کارایی ارزیابی در تمام جداول با انتخاب این استراتژی حاصل گردیده‌اند. البته ما می‌توانیم واحدهای جدید ایجاد شده بر پایه فرض شبه‌جمعی را نیز به عنوان واحدهای MPU انتخاب نماییم و نتایج متفاوتی را به دست آوریم، که می‌تواند در تحقیقات بعدی مورد توجه قرار گیرد.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله ما یک تقریب جدید برای آنالیز کارایی ارزیابی بر اساس تکنولوژی شبه‌جمعی ارائه دادیم. با استفاده از آنالیز کارایی ارزیابی می‌توانیم نظر تصمیم‌گیرنده را در پروسه ارزیابی کارایی اعمال کنیم. در تکنولوژی شبه‌جمعی واحدهای تصمیم‌گیرنده جدید که دارای مجموع سطح ورودی‌ها و خروجی‌ها از واحدهای مشاهده شده می‌باشند، را ایجاد می‌کنیم. این واحدها می‌توانند در مقایسه با سایر واحدها کارا یا ناکارا باشند. کارایی هر واحد تصمیم‌گیرنده

بر اساس مرز مجموعه امکان تولید جدید محاسبه می‌گردد. همان‌طور که در بخش مثال عددی و مطالعه موردی مشاهده گردید مقادیر کارایی تکنیکی و ارزشی در تکنولوژی‌های بازده به مقیاس متغیر و شبه‌جمعی می‌تواند متفاوت باشد. در ادامه مدل‌های ارزیابی کارایی ارزشی را بر اساس تکنولوژی شبه‌جمعی ارائه دادیم. مدل ارائه شده با میزان محاسبات کمتر و تنها بر اساس واحدهای مشاهده شده موجود میزان کارایی ارزشی را در حضور واحدهای مشاهده شده و واحدهای شبه‌جمعی محاسبه می‌کند. با انتخاب واحدهای MPU مناسب می‌توانیم نظر تصمیم‌گیرنده را در پروسه ارزیابی کارایی اعمال نماییم. در صورتی که هدف تصمیم‌گیرنده ایجاد واحدهای جدید با مجموع سطح ورودی‌ها و خروجی‌ها از واحدهای مشاهده شده باشد، می‌توانیم تکنولوژی شبه‌جمعی را انتخاب نماییم. این واحدها در موارد زیادی می‌تواند قابلیت ایجاد داشته باشند و کارآمد باشند. با انتخاب مدل مناسب محاسبه کارایی ارزشی می‌توانیم اهداف مناسب که دارای عملکرد مشابه با واحدهای MPU یا همان واحدهای مورد نظر تصمیم‌گیرنده، به دست آوریم. به عنوان کارهای آتی می‌توانیم مدل‌های ارزیابی کارایی ارزشی در تکنولوژی شبه‌جمعی برای دیگر ساختار داده‌ها در تحلیل پوششی داده‌ها نظیر داده‌ها با ساختار شبکه دومرحله‌ای توسعه داد. همچنین می‌توانیم مدل‌های فوق را برای پروسه تحلیل پوششی داده‌های معکوس نیز توسعه دهیم.

فهرست منابع

- [۱] A. Chares, W.W. Cooper and E. Rhodes, "Measuring the efficiency of decision-making units, " *Eur. J. Oper. Res.*, vol. ۲, pp. ۴۲۹-۴۴۴, ۱۹۷۸.
- [۲] W. D. Cook and L. M. Seiford, "Data envelopment analysis (DEA)—thirty years on, " *Eur. J. Oper. Res.*, vol. ۱۹۲, pp. ۱-۱۷, ۲۰۰۹.
- [۳] J. S. Liu, L. Y. Lu, W-M. Lu and B. J. Lin, "A survey of DEA applications, *Omega.*, vol. ۴۱, pp. ۸۹۳-۹۰۲, ۲۰۱۳.
- [۴] A. Emrouznejad and G. L. Yang, "A survey and analysis of the first ۴۰ years of scholarly literature in DEA: ۱۹۷۸-۲۰۱۶, " *Socio-Econ. Plan. Sci.*, Vol. ۶۱, pp. ۴-۸, ۲۰۱۸.
- [۵] R. D. Banker, A. Charnes and W. W. Cooper, "Some Model for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis, " *Management Science.*, Vol. ۳۰, pp. ۱۰۷۸-۱۰۹۲, ۱۹۸۴.
- [۶] T. C. Koopmans, "Activity analysis of production and allocation. An analysis of production as an efficient combination of activities, " *New York: Wiley*, ۱۹۵۱.
- [۷] D. Deprins, L. Simar and H. Tulkens, "Measuring labor-efficiency in post offices, Public goods, environmental externalities and fiscal competition, " *Springer*, ۲۰۰۶.
- [۸] N. C. Petersen, "Data envelopment analysis on a relaxed set of assumptions, " *Management Science.*, vol. ۳۶, pp. ۳۰۵-۳۱۴, ۱۹۹۰.
- [۹] Ch. Kao, "Measuring efficiency in a general production possibility set allowing for negative data, " *Eur. J. Oper. Res.*, vol. ۲۸۲, no. ۳, pp. ۹۸۰-۹۸۸, ۲۰۲۰.
- [۱۰] Ch. Kao, "Measuring efficiency in a general production possibility set allowing for negative data: An extension and a focus on returns to scale, " *Eur. J. Oper. Res.*, vol. ۲۹۶, no. ۱, pp. ۲۶۷-۲۷۶, ۲۰۲۲.
- [۱۱] Q. Zhu, J. Aparicio, F. Li, J. Wu and G. Kou, "Determining closest targets on the extended facet production possibility set in data envelopment analysis: Modeling and computational aspects, " *Eur. J. Oper. Res.*, vol. ۲۹۶, no. ۳, pp. ۹۲۷-۹۳۹, ۲۰۲۲.
- [۱۲] R. H. Green and W. D. Cook, "A free coordination hull approach to efficiency measurement, " *J. Oper. Res. Soc.*, vol. ۵۵, pp. ۱۰۵۹-۱۰۶۳, ۲۰۰۴.
- [۱۳] M. Ghiyasi, "A DEA production technology and its usage for incorporation of collaboration in efficiency analysis: an axiomatic approach, " *Int. Trans. Oper. Res.*, vol. ۲۶, pp. ۱۱۱۸-۳۴, ۲۰۱۶.
- [۱۴] M. Karami Khorramabadi, M. Yarahmadi and M. Ghiyasi, "Cost Efficiency Evaluation Based on a Data Envelopment Analysis Approach by Considering Undesirable Outputs on the Basis of the Semi-Disposability Assumption, " *Math. Comput. Appl.*, vol. ۲۵, no. ۱, pp. ۴, ۲۰۲۰.

[۱۵] M. Ghiyasi and W. D. Cook, "Modelling the semi-additive production technology in DEA," *Omega.*, vol. ۱۰۳, pp. ۱۰۲۳۸۵, ۲۰۲۱.

[۱۶] M. Zohrehbandian, "Using Zionts–Wallenius method to improve estimate of value efficiency in DEA," *Appl. Math. Model.*, vol. ۳۵, pp. ۳۷۶۹–۳۷۷۶, ۲۰۱۱.

[۱۷] J. Gerami, "An interactive procedure to improve estimate of value efficiency in DEA," *Expert Sys. Appl.*, vol. ۱۳۷, pp. ۲۹–۴۵, ۲۰۱۹.

[۱۸] M. Halme, T. Joro, P. Korhonen, S. Salo and J. Wallenius, "A value efficiency approach to incorporating preference information in data envelopment analysis," *Manag. Sci.*, vol. ۴۵, no. ۱, pp. ۱۰۳–۱۱۵, ۱۹۹۹.

[۱۹] M. Halme, T. Joro and P. Korhonen, "Restricting weights in value efficiency analysis," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. ۱۲۶, pp. ۱۷۵–۱۸۸, ۲۰۰۰.

[۲۰] T. Joro, P. Korhonen and S. Zionts, "An interactive approach to improve estimates of value efficiency in data envelopments analysis," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. ۱۴۹, pp. ۶۸۸–۶۹۹, ۲۰۰۳.

[۲۱] J. Eskelinen, M. Halme and M. Kallio, "Bank branch sales evaluation using extended value efficiency analysis," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. ۲۳۲, pp. ۶۵۴–۶۶۳, ۲۰۱۴.

[۲۲] M. Halme P. Korhonen and J. Eskelinen, "Non-convex value efficiency analysis and its application to bank branch sales evaluation," *Omega.*, vol. ۴۸, pp. ۱۰–۱۸, ۲۰۱۴.

[۲۳] J. Gerami, M. R. Mozaffari, P. F. Wanke and H. L. Correa, "A generalized inverse DEA model for firm restructuring based on value efficiency," *IMA J. Manag. Math.*, vol. ۳۴, no. ۳, pp. ۵۴۱–۵۸۰, ۲۰۲۳.

[۲۴] G. R. Jahanshahloo, F. Hosseinzadeh Lotfi, H. Zhiani Rezai and F. Rezai Balf, "Finding strong defining hyperplanes of Production Possibility Set," *Eur. J. Oper. Res.*, pp. ۱۷۷, no ۱, pp. ۴۲–۵۴, ۲۰۰۷.

[۲۵] F. Hosseinzadeh Lotfi, G. R. Jahanshahloo, M. R. Mozaffari and J. Gerami, "Finding DEA-efficient hyperplanes using MOLP efficient faces," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. ۲۳۵, no. ۵, pp. ۱۲۲۷–۱۲۳۱, ۲۰۱۱.

[۲۶] A. Ghazi, F. Hosseinzadeh Lotfi and M. Sanei, "Finding the strong efficient frontier and strong defining hyperplanes of production possibility set using multiple objective linear programming," *Oper. Res.*, vol. ۲۲, no. ۱, pp. ۱۶۵–۱۹۸, ۲۰۲۲.

[۲۷] J. Eskelinen and T. Kuosmanen, "Intertemporal efficiency analysis of sales teams of a bank: stochastic semi-nonparametric approach," *J. Bank. Finance.*, vol. ۳۷, no. ۱۲, pp. ۵۱۶۳–۷۵, ۲۰۱۳.