دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و ششم، خرداد و تیر ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

عدم قطعیت جعبه‌ای در بهینه‌سازی چندهدفه: یک رویکرد ε-قید

شیما سلیمانی منش[۱]، منصور سراج[۲*]، مریم مومنی شهرکی[۳]، محمود علیزاده[۴]

[(۱و۳و۴)] گروه ریاضی، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران
[(۲)] دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، گروه ریاضی، اهواز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۸/۱۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۱/۰۲

چکیده

در چند دهه اخیر توجه بسیار زیادی در بحث بهینه‌سازی استوار در ادبیات موضوع توسط محققین صورت گرفته است. از انجا که تکنیک اپیسلون قید در چند هدفه‌ها از تکنیک‌های مهم مسایل برهم کنشی است، لذا دراین مقاله، با توجه به اهمیت بحث بهینه‌سازی استوار و مسایل چند هدفه، یک مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه را در حالتی که ضرائب توابع هدف دارای عدم قطعیت جعبه‌ای هستند را در نظر می‌گیریم. یک رویکرد بر پایه روش‌های اپسیلون قید و چارنزکوپر برای مسئله کسری در حالت چند هدفه برای بدست آوردن جواب‌های کارای ضعیف استوار که دارای اهمیت ویژه در ادبیات موضوع است را برای مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه کسری خطی در حالت عدم قطعیت پیشنهاد می‌دهیم. از تکنیک چارنز کوپر در تبدیل مسئله کسری به غیر کسری استفاده کرده و در انتها همتای استوار مدل UMOLFP را در حالتی که ضرائب تابع هدف متعلق به مجموعه عدم قطعیت جعبه‌ای باشند را هم ارز با یک مسئله برنامه‌ریزی خطی نوشته و در انتها یک مثال عددی برای نشان دادن کارایی رویکرد پیشنهاد شده ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه، بهینه‌سازی استوار، عدم قطعیت جعبه‌ای، روش ε-قید، جواب کارای ضعیف استوار.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: msaraj@scu.ac.ir

۱- مقدمه

مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی (LFP) شاخه‌ای از برنامه‌ریزی غیرخطی هستند که در آن‌ها تابع هدف به صورت نسبی از دو تابع خطی است. روش تبدیل متغیر چارنز کوپر [۱]، روش تابع هدف اصلاح شده بیرتان و نواس [۲]، روش گیلمور و گومور [۳]، نمونه‌هایی از روش‌های پیشنهاد شده برای حل مسائل LFP هستند.

مسائل برنامه‌ریزی چند هدفه، دسته‌ای از مسائل بهینه‌سازی است که اقدام به بهینه‌سازی چند تابع هدف به صورت همزمان روی یک ناحیه شدنی می‌کند. اگر توابع هدف نسبت دو تابع خطی و ناحیه شدنی چند وجهی باشد آنگاه مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه (MOLFP) نامیده می‌شود. باتوجه به کاربردهای بسیار مسائل MOLFP در طرح‌های تولیدی، مالی و مهندسی و ... این‌گونه مسائل مورد توجه بسیاری از محققین قرار دارند. برای مطالعه در زمینه روش‌های یافتن جواب‌های کارای مسائل MOLFP منابع [۸-۴] را پیشنهاد می‌دهیم.

عدم قطعیت داده‌ها به دلیل خطای اندازه‌گیری، پیش‌بینی و تخصیص داده‌ها یکی از مسائل مهم در دنیای واقعی است که اغلب در مسائل برنامه‌ریزی نادیده گرفته می‌شود [۹].

رویکردهای مختلفی در برخورد با عدم قطعیت داده‌ها مانند برنامه‌ریزی تصادفی [۱۰]، برنامه‌ریزی فازی[۱۲, ۱۱] و بهینه‌سازی استوار وجود دارد.

بهینه‌سازی استوار یک رویکرد برای برخورد با عدم قطعیت داده‌ها است که هدف آن تعیین جواب بهینه‌ای است که به ازای تمام حالت‌های ممکن پارامترهای غیرقطعی بهترین باشد. [۱۶-۱۳]

سویستر [۱۷] مدل بهینه‌سازی خطی را برای یافتن جواب‌های بهینه استوار در حالتی که داده‌های غیرقطعی در یک بازه قرار می‌گیرند ارائه داد. بعد از آن بن – تال و نمیروفسکی، القایی، برتسیماس و سیم [۲۲-۱۸] مجموعه‌های عدم قطعیت بیضوی و چند وجهی را مورد بررسی قرار دادند و مدل‌های متفاوتی برای یافتن جواب‌های بهینه استوار پیشنهاد دادند. در سال ۲۰۰۹، بک و بن – تال [۲۳] به بررسی دوگان همتای استوار یک مسئله برنامه‌ریزی خطی در حالت عدم قطعیت پرداختند. جیاکومار و همکاران [۲۴,۲۵] دوگان قوی را بین همتای استوار و همتای بهینه دوگان ولف مسائل برنامه‌ریزی کسری و مینی‌ماکس ثابت کردند. سان و شای استوار [۲۶] نشان دادند که برای مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی در حالت عدم قطعیت بازه‌ای، همواره دوگان قوی برقرار است. لازم به ذکر است که تا کنون به طور مستقل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه بررسی نشده است.

اخیرا در زمینه سود سهام، بازار بورس و تحلیل پوششی داده‌ها با استفاده از بهینه‌سازی استوار مقالاتی توسط پیکانی و همکاران مورد بررسی قرار گرفته است[۲۹-۲۷].

در این مقاله مسئله MOLFP در حالتی که ضرائب تابع هدف در مجموعه عدم قطعیت جعبه‌ای تغییر می‌کنند مورد مطالعه قرار می‌گیرد و یک مدل برنامه‌ریزی خطی ارائه می‌شود.

این مقاله به صورت زیر سازمان‌دهی شده است:

در بخش دوم برخی تعاریف و مفاهیم اولیه بهینه‌سازی استوار در مسائل برنامه‌ریزی خطی بیان می‌شود. در بخش سوم با استفاده از روش اپسیلون قید، مسئله MOLFP به مسئله LFP تقلیل می‌یابد و یک مسئله برنامه‌ریزی خطی جهت بدست آوردن نقاط کارای ضعیف استوار در حالت عدم قطعیت جعبه‌ای ارائه می‌شود. در بخش چهارم یک مثال عددی جهت کارایی فرمول ارائه شده مطرح می‌شود و در نهایت در بخش پنجم نتیجه‌گیری می‌کنیم.

۲- تعاریف و مفاهیم اولیه

در این بخش، رویکرد بهینه‌سازی استوار در مسائل برنامه‌ریزی خطی و برخی از تعاریف و مفاهیم اساسی را ارائه می‌دهیم.
مسئله برنامه‌ریزی خطی (LP) زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} (LP)\ & \min \tilde{c}^T x, \\ s.t.\ & \tilde{a}_i^T x \le b_i,\ i = 1,\dots,m, \\ & x \ge 0, \end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن $\tilde{c}_i, \tilde{a}_i \in \mathbb{R}^n$ و $b_i \in \mathbb{R}^n$. فرض کنید که $\tilde{c}$ و $\tilde{a}_i$ پارامترهای غیرقطعی مدل (۱) باشند که به‌ترتیب و در مجموعه‌های عدم قطعیت محدب و فشرده U_0 و U_i قرار دارند.
مسئله همتای استوار مدل LP به این صورت نوشته می‌شود [۹]:

$$\begin{aligned} (RC)\ & \min_x \max_{\tilde{c} \in U_0} \tilde{c}^T x, \\ s.t.\ & \max_{\tilde{a} \in U_i} \tilde{a}_i^T x \le b_i, \\ & i = 1,\dots,m, \\ & x \ge 0. \end{aligned} \tag{۲}$$

فرض کنید که $\tilde{a}_i$ و $\tilde{c}$ توزیع متقارن با داده‌های اسمی a_i^0 و c^0 به صورت زیر داشته باشند:

$$\tilde{a}_i = a_i^0 + \tilde{\boldsymbol{A}}_i u_i, \qquad \tilde{c} = c^0 + \hat{\boldsymbol{C}} u,$$

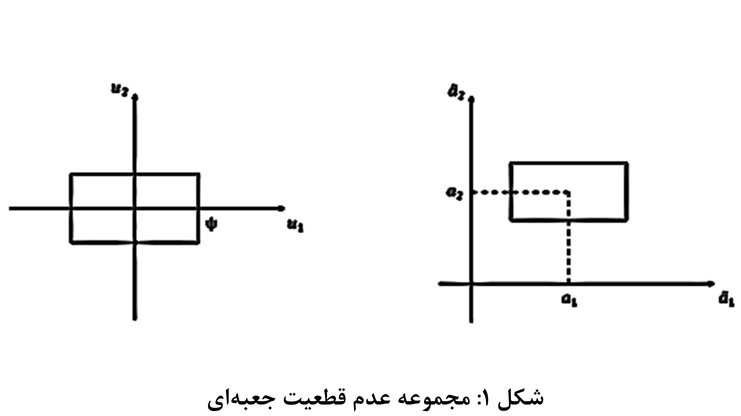
که در آن $\tilde{\boldsymbol{A}}_i$ و $\hat{\boldsymbol{C}}$ ماتریس‌های ثابت آشفتگی در پارامترهای داده‌های اسمی و همچنین u و u_i متغیرهای تصادفی توزیع متقارن هستند.

تعریف ۲–۱ (مجموعه عدم قطعیت جعبه‌ای [۱۶]). مجموعه عدم قطعیت جعبه‌ای با استفاده از نرم بی نهایت بردار داده غیرقطعی به‌صورت زیر توصیف می‌شود (شکل ۱):

$$\begin{aligned} U_\infty &= \left\{ u \,\middle|\, \|u\|_\infty \le \Psi \right\} \\ &= \left\{ u \,\middle|\, |u_j| \le \Psi, \forall j \in J_i \right\}, \end{aligned}$$

که در آن Ψ پارامتر قابل تنظیم است و سایز مجموعه عدم قطعیت را کنترل می‌کند؛ J_i زیرمجموعه اندیس‌های متغیرهایی است که دارای ضرائب غیرقطعی هستند.
اگر مجموعه U مجموعه عدم قطعیت جعبه‌ای باشد آنگاه مسئله همتای استوار (RLP) متناظر با مدل خطی (۱) به صورت زیر است [۵]:

$$\begin{aligned} & \min\ z, \\ s.t.\ & c^{0^T} x + \max_{\|u\|_\infty \le \Psi} u^T \hat{\boldsymbol{C}}^T x - z \le 0, \\ & a_i^{0^T} x + \max_{\|u_i\|_\infty \le \Psi_i} \boldsymbol{u}_i^T \hat{\boldsymbol{A}}_i^T x \le b_i, \\ & i = 1,\dots,m, \\ & x \ge 0. \end{aligned} \tag{۳}$$



شکل ۱: مجموعه عدم قطعیت جعبه‌ای

با استفاده از نامساوی هولدر داریم:

$$\max_{\|u_i\|_\infty \le \Psi_i} \boldsymbol{u}_i^{T} \hat{\boldsymbol{A}}_i^T x = \Psi_i \left\|\hat{\boldsymbol{A}}_i^T x\right\|_1$$

و

$$\max_{\|u\|_\infty \le \Psi} u^T \hat{\boldsymbol{C}}^T x = \Psi \left\|\hat{\boldsymbol{C}}^T x\right\|_1 .$$

چون $x \ge 0$ لذا مدل (۳) هم‌ارز با مسئله برنامه‌ریزی خطی مدل (۴) است:

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ s.t.\ & c^{0^T} x + \Psi \hat{c}^T x - z \le 0, \\ & a_i^{0^T} x + \Psi \hat{a}_i^T x \quad \le b_i , \\ & i = 1,\dots,m, \\ & x \ge 0. \end{aligned} \tag{۴}$$

که در آن

$$\hat{c}^T = \left(\hat{c}_1,\dots,\hat{c}_n\right), \hat{a}_i^T = \left(\hat{a}_{i1},\dots,\hat{a}_{in}\right).$$

۳- فرمول همتای استوار UMOLFP با استفاده از روش اپسیلون قید

در این بخش روش اپسیلون قید و تعریف جواب‌های کارای ضعیف استوار را برای یک مسئله برنامه‌ریزی چند هدفه کسری غیرقطعی (UMOLFP) بیان می‌کنیم و مدل برنامه‌ریزی خطی بر پایه روش اپسیلون قید جهت بدست آوردن نقاط کارای ضعیف استوار UMOLFP ارائه می‌دهیم.

مسئله MOLFP زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & \text{MOLFP} \\ & \min \ \left(f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)\right), \\ & \quad s.t. \quad x \in X , \end{aligned} \tag{۵}$$

که در آن

$$f_k(x) = \frac{c_k^T x + \alpha_k}{d_k^T x + \beta_k},$$

و

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \le b_i , x \ge 0, \ i = 1,\dots,m \right\}.$$

فرض کنید $a_k^T, c_k^T, d_k^T \in \mathbb{R}^n$ و $\alpha_k, \beta_k, b_k \in \mathbb{R}$؛ همچنین فرض کنید که به ازای همه جواب‌های شدنی x در مدل (۵) داشته باشیم: $d_k^T x + \beta_k > 0, \forall k = 1,\dots,p.$

مسئله اپسیلون قید متناظر با مدل (۵) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \left(\mathrm{MOLFP}(\varepsilon_k)\right) \\ & \min \frac{c_j^T x + \alpha_j}{d_j^T x + \beta_j}, \\ & s.t. \ \frac{c_k^T x + \alpha_k}{d_k^T x + \beta_k} \le \varepsilon_k , \\ & k = 1,\dots,m, k \ne j, \\ & \quad x \in X , \end{aligned} \tag{۶}$$

که در آن

$$\min f_k(x) \le \varepsilon_k \le \max f_k(x).$$

حال فرض کنید که ضرائب توابع هدف مدل (۵) پارامترهای غیرقطعی باشند، در این صورت مسئله UMOLFP می‌تواند به صورت زیر فرمول‌بندی شود:

$$\begin{aligned} & (\text{UMOLFP}) \\ & \quad \min \ \left(f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)\right), \\ & \quad s.t. \quad x \in X , \end{aligned} \tag{۷}$$

که در آن

$$f_k(x) = \frac{\tilde{c}_k^T x + \tilde{a}_k}{\tilde{d}_k^T x + \tilde{\beta}_k}, \quad k = 1,\dots,p,$$

و

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \le b_i , x \ge 0, \ 1,\dots,m \right\}.$$

فرض کنید $\tilde{d}_k$ و $\tilde{c}_k$ پارامترهای غیرقطعی متناظر با مجموعه‌های عدم قطعیت $C_k, D_k \in \mathbb{R}^n$ و $\tilde{\alpha}_k$ و $\tilde{\beta}_k$ پارامترهای غیرقطعی متناظر با مجموعه‌های $A_k, B_k \in \mathbb{R}$ باشند و همچنین فرض کنید به ازای همه جواب‌های شدنی مدل (۷) و $(\tilde{d}_k, \tilde{\beta}_k) \in D_k \times B_k$ داشته باشیم:

$$\tilde{d}_k^T x + \tilde{\beta}_k > 0, \forall k = 1,\dots,p.$$

تعریف ۳-۱ : جواب شدنی $\bar{x} \in X$ را جواب کارای ضعیف استوار مدل (۷) می‌گوییم و اگر تنها وجود نداشته باشد به طوریکه به‌ازای هر $x \in X$

$$(\tilde{c}_k, \tilde{d}_k, \tilde{\alpha}_k, \tilde{B}_k) \in C_k \times D_k \times A_k \times B_k$$

داشته باشیم:

$$f_k(x) < f_k(\bar{x}), \quad \forall k = 1,\dots,p.$$

همتای استوار $\text{RUMOLFP}(\varepsilon_k)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\text{RUMOLFP}(\varepsilon_k) \qquad (۸)$$

$$\min_x \max_{(\tilde{c}_j, \tilde{d}_j, \tilde{\alpha}_j, \tilde{\beta}_j) \in C_j \times D_j \times A_j \times B_j} \frac{\tilde{c}_j^T x + \tilde{\alpha}_j}{\tilde{d}_j^T x + \tilde{\beta}_j}$$

$$s.t. \max_{(\tilde{c}_k, \tilde{d}_k, \tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k) \in C_k \times D_k \times A_k \times B_k} \frac{\tilde{c}_k^T x + \tilde{\alpha}_k}{\tilde{d}_k^T x + \tilde{\beta}_k} \le \varepsilon_k,$$

$$x \in X, k = 1,\dots,p, k \neq j,$$

قضیه ۳-۲: اگر $x^* \in X$ جواب بهینه مدل (۸) برای $\varepsilon \in \mathbb{R}^P$ باشد، آنگاه x^* یک جواب کارای ضعیف استوار برای مدل (۷) است.

اثبات. فرض می‌کنیم $x^* \in X$ جواب بهینه مدل (۸) به ازای یک $\varepsilon \in \mathbb{R}^P$ ولی x^* جواب کارای ضعیف استوار (۷) نباشد، در این صورت $\hat{x} \in X$ وجود دارد به طوریکه:

$$f_i(x) < f_i(x^*), \quad i = 1,\dots,p,$$

این به آن معناست که برای همه

$$(\tilde{c}_i, \tilde{d}_i, \tilde{\alpha}_i, \tilde{B}_i) \in C_i \times D_i \times A_i \times B_i,$$

وجود دارد

$$(\tilde{c}'_i, \tilde{d}'_i, \tilde{\alpha}'_i, \tilde{B}'_i) \in C_i \times D_i \times A_i \times B_i,$$

به‌طوریکه:

$$\frac{\tilde{c}_i^T x + \tilde{\alpha}_i}{\tilde{d}_i^T x + \tilde{\beta}_i} < \frac{\tilde{c}_i'^T x + \tilde{\alpha}'_i}{\tilde{d}_i'^T x + \tilde{\beta}'_i}$$

بنابراین داریم:

$$\max_{(\tilde{c}_i, \tilde{d}_i, \tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i) \in C_j \times D_j \times A_j \times B_j} \frac{\tilde{c}_i^T \hat{x} + \tilde{\alpha}_i}{\tilde{d}_i^T \hat{x} + \tilde{\beta}_i} < \frac{\tilde{c}_i'^T x^* + \tilde{\alpha}'_i}{\tilde{d}_i'^T x^* + \tilde{\beta}'_i},$$

برای $i = 1,\dots,p$.

بنابراین، بر اساس قیود مدل (۸) داریم:

$$\max_{(\tilde{c}_i, \tilde{d}_i, \tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i) \in C_j \times D_j \times A_j \times B_j} \frac{\tilde{c}_k^T \hat{x} + \tilde{\alpha}_k}{\tilde{d}_k^T \hat{x} + \tilde{\beta}_k} < \frac{\tilde{c}_k'^T x^* + \tilde{\alpha}'_k}{\tilde{d}_k'^T x^* + \tilde{\beta}'_k} \le \max_{(\tilde{c}''_i, \tilde{d}''_i, \tilde{\alpha}''_i, \tilde{\beta}''_i) \in C_j \times D_j \times A_j \times B_j} \frac{\tilde{c}_k''^T \hat{x} + \tilde{\alpha}''_k}{\tilde{d}_k''^T \hat{x} + \tilde{\beta}''_k} \le \varepsilon_k, \quad k = 1,\dots,p, \quad k \neq j.$$

از طرف دیگر، مطابق تابع هدف مدل(۸) داریم:

$$\max_{(\tilde{c}_j, \tilde{d}_j, \tilde{\alpha}_j, \tilde{\beta}_j) \in C_j \times D_j \times A_j \times B_j} \frac{\tilde{c}_j^T \hat{x} + \tilde{\alpha}_j}{\tilde{d}_j^T \hat{x} + \tilde{\beta}_j} < \frac{\tilde{c}_j'^T x^* + \tilde{\alpha}'_j}{\tilde{d}_j'^T x^* + \tilde{\beta}'_j} \le \max_{(\tilde{c}''_j, \tilde{d}''_j, \tilde{\alpha}''_j, \tilde{\beta}''_j) \in C_i \times D_i \times A_i \times B_i} \frac{\tilde{c}_j''^T x + \tilde{\alpha}''_j}{\tilde{d}_j''^T x + \tilde{\beta}''_j}$$

برای $j = 1,\dots,p$.

که با بهینگی x^* برای مدل (۸) به ازای یک ε تناقض دارد. بنابراین x^* جواب کارای ضعیف استوار مدل UMOLFP است.

قضیه بعد بهترین نتیجه این مقاله را بیان می‌کند.

قضیه ۳-۳: همتای استوار مدل UMOLFP در حالتی که ضرائب تابع هدف متعلق به مجموعه عدم قطعیت جعبه‌ای باشند هم ارز مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر است:

$$
\begin{aligned}
&\min (c_j^0 + \Psi_{\mathrm{C}} \hat{c}_j)^T + (\alpha_j^0 + \Psi_{\mathrm{A}} \hat{\alpha}_j) t \\
&s.t. \\
&(d_j^0 - \Psi_{\mathrm{D}} d_j)^T y + (\beta_j^0 - \Psi_{\mathrm{B}} \hat{\beta}_j) t = 1, \\
&(c_k^0 + \Psi_{\mathrm{C}} \hat{c}_k)^T y + (\alpha_k^0 + \Psi_{\mathrm{C}} \hat{\alpha}_k) t \\
&\le \varepsilon_k \left[(d_k^0 - \Psi_{\mathrm{D}} \hat{d}_k)^T + (\beta_k^0 - \Psi_{\mathrm{B}} \hat{\beta}_k) t \right] \\
&\qquad y \in Y ,
\end{aligned} \tag{۹}
$$

که در آن

$$
Y = \left\{ y \in \square^n \mid a_i^T y - b_i \le 0, y \ge 0, \; i = 1, \dots, m \right\},
$$

و

$$
\begin{aligned}
&\min f_k(x) \le \varepsilon_k \le \max f_k(x), \\
&\qquad k = 1, \dots, p \;\; , k \ne j, \\
&\tilde{c}_i = c_i^0 + \hat{\boldsymbol{C}}_i \mu_i , \qquad \tilde{\alpha}_i = \alpha_i^0 + \hat{\alpha}_i \lambda_i \\
&\tilde{d}_i = d_i^0 + \hat{\boldsymbol{D}}_i v_i , \qquad \beta_i = \beta_i^0 + \hat{\beta}_i \lambda_i
\end{aligned}
$$

و همچنین

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{C}_i = \left\{ \mu_i \; \| \mu_i \|_\infty \le \Psi_{\mathrm{C}} \right\}, \\
&\mathrm{D}_i = \left\{ \lambda_i \; \| \lambda_i \|_\infty \le \Psi_{\mathrm{D}} \right\}, \\
&\mathrm{A}_i = \left\{ v_i \; \| v_i \|_\infty \le \Psi_{\mathrm{A}} \right\}, \\
&\mathrm{B}_i = \left\{ \xi_i \; \| \xi_i \|_\infty \le \Psi_{\mathrm{B}} \right\},
\end{aligned}
$$

برای $i = 1, \dots, p$.

اثبات. فرض کنید ضرائب توابع هدف مدل (۷) پارامترهای غیرقطعی تعریف شده در فرض قضیه باشند. مسئله همتای استوار مدل(۷) با استفاده از روش اپسیلون قید می‌تواند به صورت مسئله تک هدفه LFP به صورت زیر نوشته شود:

$$
\begin{aligned}
&\min_x \max_{(\tilde{c}_j, \tilde{d}_j, \tilde{\alpha}_j, \tilde{\beta}_j) \in \mathrm{C}_j \times \mathrm{D}_j \times \mathrm{A}_j \times \mathrm{B}_j} \frac{\tilde{c}_j^T x + \tilde{\alpha}_j}{\tilde{d}_j^T x + \tilde{\beta}_j} \\
&s.t. \max_{(\tilde{c}_k, \tilde{d}_k, \tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k) \in \mathrm{C}_k \times \mathrm{D}_k \times \mathrm{A}_k \times \mathrm{B}_k} \frac{\tilde{c}_k^T x + \tilde{\alpha}_k}{\tilde{d}_k^T x + \tilde{\beta}_k} \\
&\le \varepsilon_k , \\
&\qquad x \in X , k = 1, \dots, p, k \ne j ,
\end{aligned}
$$

که هم ارز مدل زیر می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\min_x \frac{\max\limits_{(\tilde{c}_j, \tilde{\alpha}_j) \in \mathrm{C}_j \times \mathrm{A}_j} \tilde{c}_j^T x + \tilde{\alpha}_j}{\min\limits_{(\tilde{d}_j, \tilde{\beta}_j) \in \mathrm{C}_j \times \mathrm{B}_j} \tilde{d}_j^T x + \tilde{\beta}_j} \\
&s.t. \max_{(\tilde{c}_k, \tilde{d}_k, \tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k) \in \mathrm{C}_k \times \mathrm{D}_k \times \mathrm{A}_k \times \mathrm{B}_k} \Big(\tilde{c}_k^T x + \tilde{\alpha}_k - \\
&\quad - \varepsilon_k \left((\tilde{d}_k^T x + \tilde{\beta}_k) \right) \Big) \le 0, \\
&\quad k = 1, \dots, p, k \ne j , \\
&\quad x \in X .
\end{aligned} \tag{۱۰}
$$

مدل (۱۰) هم ارز مدل زیر است:

$$
\begin{aligned}
&\min_x \frac{c_j^{0^T} x + \alpha_j^0 + \max\limits_{\|\mu_j\|_\infty \le \Psi_{\mathrm{C}}, \|\lambda_j\|_\infty \le \Psi_{\mathrm{A}}} (\mu_j{}^T \hat{\boldsymbol{C}}_j^T x + \lambda_j \square \alpha_j)}{d_j^{0^T} x + \beta_j^0 - \max\limits_{\|v_j\|_\infty \le \Psi_{\mathrm{D}}, \|\xi_j\|_\infty \le \Psi_{\mathrm{B}}} (v_j{}^T \square \boldsymbol{D}_j^T x + \xi_j \hat{\beta}_j)} \\
&s.t. \\
&c^{0^T}_k x + \alpha_k^0 \\
&+ \max_{\|\mu_j\|_\infty \le \Psi_{\mathrm{C}}, \|\lambda_k\|_\infty \le \Psi_{\mathrm{A}}} (\mu_k \hat{\boldsymbol{C}}_k^T + \lambda_k \tilde{\alpha}_k)
\end{aligned} \tag{۱۱}
$$

$$-\varepsilon_k (d_k^{0^T} x + \beta_k^0)$$
$$-\varepsilon_k \min_{\|v_k\|_\infty \le \Psi_D, \|\xi_k\|_\infty \le \Psi_B} (v_k \hat{D}_k^T x + \hat{\xi}_k \hat{\beta}_k) \le 0,$$
$$k = 1, \ldots, p, k \ne j,$$
$$x \in X.$$

تعریف می‌کنیم:

$$t = \frac{1}{(d_j^0 - \Psi_D \hat{d}_j)^T x + (\beta_j^0 - \Psi_B \hat{\beta}_j)},$$
$$y = xt.$$

با در نظر گرفتن مدل (۴) و تبدیل چارنز و کوپر [۱] به مدل (۹) می‌رسیم و اثبات به پایان می‌رسد.

۴- مثال عددی

در این بخش، مثال عددی جهت توضیح روش ارائه شده و نحوه بدست آوردن جواب‌های کارای ضعیف استوار ارائه می‌دهیم.

مثال ۴-۱. مسئله MOLFP زیر را در نظر بگیرید:

$$\min \left(\frac{-x_1 + 3x_2 + 2}{x_1 + 2x_2 + 1}, \frac{5x_1 + 2x_2 + 2}{2x_1 + 3x_2 + 1} \right)$$
$$s.t. \quad 2x_1 + x_2 \le 4, \quad (۱۲)$$
$$3x_1 - 2x_2 \le 5,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 3,$$
$$x_1 + 3x_2 \le 2,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

دو جواب‌های کارای ضعیف (۰.۹۵۶۶و ۱.۰۸۶۸) و (۰.۹۵۹۷ و ۱.۰۸۰۶) مدل (۱۲) را در نظر می‌گیریم. حال فرض کنید ضرائب توابع هدف پارامترهای غیرقطعی به صورت زیر باشند.

$$\min \left(\frac{\tilde{c}_1^T x + \tilde{\alpha}_1}{\tilde{d}_1^T x + \tilde{\beta}_1}, \frac{\tilde{c}_2^T x + \tilde{\alpha}_2}{\tilde{d}_2^T x + \tilde{\beta}_2} \right)$$
$$s.t. \quad 2x_1 + x_2 \le 4, \quad (۱۳)$$
$$3x_1 - 2x_2 \le 5,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 3,$$
$$x_1 + 3x_2 \ge 2,$$
$$x_1 . x_2 \ge 0.$$

که $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tilde{c}_{11} = -1 + 0.5\mu_{11}, \tilde{c}_{12} = 3 + 0.1\mu_{12},$$
$$\tilde{c}_{21} = 5 + 0.1\mu_{21}, \tilde{c}_{22} = 2 + 0.1\mu_{22},$$
$$\tilde{d}_{12} = 2 + 0.1v_{12}, \tilde{d}_{21} = 2 + 0.1v_{21},$$
$$\tilde{d}_{22} = 3 + 0.1v_{22}, \tilde{d}_{11} = 1 + 0.1v_{11},$$
$$\tilde{\alpha}_1 = 2 + 0.1\lambda_1, \tilde{\alpha}_2 = 2 + 0.1\lambda_2,$$
$$\tilde{\beta}_1 = 1 + 0.1\xi_1, \tilde{\beta}_2 = 1 + 0.1\xi_2,$$

و

$$\tilde{c}_i \in C_i = \left\{ \mu_i \,\middle|\, \|\mu_i\|_\infty \le 1 \right\},$$
$$\tilde{d}_i \in D_i = \left\{ \lambda_i \,\middle|\, \|\lambda_i\|_\infty \le 1 \right\},$$
$$\tilde{\alpha}_i \in A_i = \left\{ v_i \,\middle|\, \|v_i\|_\infty \le 1 \right\},$$
$$\tilde{\beta}_i \in B_i = \left\{ \xi_i \,\middle|\, \|\xi_i\|_\infty \le 1 \right\},$$

برای $i = 1, 2$.

ابتدا ماکزیمم و مینیمم $f_2(x)$ روی مجموعه X بدست می‌آوریم:

$$\max \quad 4.9y_1 + 1.9y_2 + 1.9t \quad (۱۴)$$
$$s.t. \quad 2.1y_1 + 3.1y_2 + 1.1t = 1,$$
$$2y_1 + y_2 - 4t \le 0,$$
$$3y_1 - 2y_2 - 5t \le 0,$$
$$y_1 + 2y_2 - 3t \le 0,$$
$$y_1 + 3y_2 - 2t \ge 0,$$
$$y_1, y_2, t \ge 0,$$

و

$$\min \quad 5.1y_1 + 2.1y_2 + 2.1t \quad (۱۵)$$
$$s.t. \quad 1.9y_1 + 2.9y_2 + 0.9t = 1,$$
$$2y_1 + y_2 - 4t \le 0,$$
$$3y_1 - 2y_2 - 5t \le 0,$$
$$y_1 + 2y_2 - 3t \le 0,$$
$$y_1 + 3y_2 - 2t \ge 0,$$
$$y_1, y_2, t \ge 0,$$

با حل مدل (۱۴) و (۱۵) داریم:

$$1 \le \varepsilon_2 \le 2.1,$$

حال با فرض $\varepsilon = 1.7$ و قضیه (۲-۳) همتای استوار UMOLFP مدل (۱۳) به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned}
\min \quad & -0.9y_1 + 3.1y_2 + 2.1t \\
s.t. \quad & 0.9y_1 + 1.9y_2 + 0.9t = 1, \\
& 1.87y_1 - 2.83y_2 - 0.57t \le 0, \\
& 2y_1 - y_2 - 4t \le 0, \\
& 3y_1 + 2y_2 - 3t \le 0, \\
& y_1 + 3y_2 - 2t \ge 0, \\
& y_1, y_2, t \ge 0,
\end{aligned}$$

جواب بهینه مدل (۱۶) به صورت زیر است:

$$y_1 = 0.3, y_2 = 0.25, t = 0.27,$$

یعنی:

$$x_1 = \frac{0.3}{0.27} = 1.111, \qquad (۱۷)$$
$$x_2 = \frac{0.25}{0.27} = 0.9295,$$

واضح است که (x_1, x_2) در (۱۷) جواب کارای ضعیف استوار برای مدل (۱۳) هستند و به جواب کارای ضعیف مدل (۱۲) نزدیک هستند.

۵- نتیجه‌گیری

یکی از موضوعات مهم در بهینه‌سازی چندهدفه مسائل MOLFP در حالت عدم قطعیت داده است. این مقاله تکنیکی برای حل مسائل MOLFP در حالتی که ضرائب توابع هدف در مجموعه عدم قطعیت جعبه‌ای قرار دارند، ارائه می‌دهد. این تکنیک می‌تواند برای بدست آوردن جواب کارای ضعیف استوار UMOLFP به کار رود. در نهایت با ارائه یک مثال نشان دادیم که روش پیشنهاد شده می‌تواند تقریب خوبی برای جواب‌های کارای ضعیف مسئله برنامه‌ریزی قطعی با داده‌های اسمی باشد.

فهرست منابع

[1] A. Charnes, W. W. Cooper, *Programming with linear fractional functional*, Navel Research logistic Quarterly, 9(3-4), (1962), 181-183.

[2] G. R. Britan, A. J. Navaes, *Linear programming with fractional objective function*, Operations Research,21(1) , (1973) , 22-29.

[3] B. D. Craven, Fractional Programming, Helderman Verlag Berlin, (1988).

[4] J. S. H. Kornbulth, On the use of multiple objective linear programming algorithms to solve problems with fractional objectives, European Journal of Operational Research,23(1),(1986),78-81.

[5] H. P. Benson, Finding certain weakly efficient vertices in multiple objective linear fractional programming, Management Science, 31(2), (1985), 240-248

[6] J. P. Costa, An interactive method for multiple objective linear fractional programming problems, OR-Spectrum. 27, (2005), 633-652.

[7] J. P. Costa, Computing non-dominated solutions in MOLFP, European Journl of Operational Research, 181(3), (2007), 1464-1475.

[8] J. P. Costa, M. J. Alaves, A reference point technique to compute non-dominated solution in text MOLFP, Journal of Mathematical Sciences, 161, (2009), 820-830.

[9] A. Ben-Tal, EL. Ghaoui, A. Nemirovski, Robust optimization, Princeton University Press, (2009).

[10] J. R. Birge, F. Louveaux, Introduction to stochastic programming, Springer-Verlag, (1997).

[11] G. B. Dantzing, Linear programming under uncertainly, Management Science, 1(314), (1955), 197-206.

[12] J. Mula, R. Polar, J. P. Garcia, MRP with flexible constraints: fuzzy mathematical programming approach, Fuzzy sets system, 157(1), (2006), 74-97.

[13] D. Bertsimas. V. Gupta, N. Kallus, Data-driven robust optimization, Mathmetical programming, 167(2), (2018), 235-292.

[14] J. M. Buhmann, A. Y. Gronskiy, M. Mihalak, T. Pröger, R. Šramek, P. Widmayer, Robust optimization in the presence of uncertainty: A generic approach, Computer and System Sciences, 94. (2018), 135-166.

[15] J. M. Buhmann, A. Y. Gronskiy, M. Mihalak, T. Pröger, R. Šramek, P. Widmayer, Robust optimization in the presence of uncertainty: A generic approach, Computer and System Sciences, 94. (2018), 135-166.

[16] Z. Li, R. Ding, C. A. Floudas, A comparative theoretical and computational study on Robust counterpart optimization: I. Robust linear optimization and Robust mixed Integer linear optimization, Industrial & Engineering Chemistry Research,50(18), (2011), 10567-10603.

[17] A. L. Soyester, Convert programming with set-inclusive constraint and applications to inexact linear programming, Operations Research, 21(5), (1973), 1154-1157.

[18] A. Ben-Tal, A. Nemirovski, Robust convex optimization, Mathematics of Operations Research,23(4),(1998),769-805.

[19] A. Ben-Tal, A. Nemirovski, Robust convex optimization, Mathematics of Operations Research,23(4),(1998),769-805.

[20] D. Bertsimas, M. Sim, Robust discrete optimization and network flows, Mathematical Programing, 98 (1-3), (2003), 49-71.

[21] D. Bertismas, M. Sim, the price of robustness, Operations Research, 52(1), (2004) , 35-53.

[22] L. El-Ghaoui, F. Oustry. H. Lebret. Robust solution to uncertain semidefinite programs, On Optimization, 9(1), (1998), 33-52.

[23] A. Beck, A. Ben-Tal-, Duality in robust optimization primal worst equals dual best, Operations Research, 37(1), (2009), 1-6.

[24] V. Jeyakumar, G. Y. Li, Robust duality for fractional programming problems with constrains-wise data uncertainly, Optimization Theory and Application, 151, (2001), 292-303.

[25] V. Jeyakumar, G. Y. Li, S. Srisatkunaragah, Strong duality for robust minimax fractional programming problems, European Journal of Operations Research, Elsevier, 228(2), (2013), 331-336.

[26] X. K. Sun, Y. Chai, On robust duality for fractional programming with uncertainty data, Positive, 18(1), (2013), 9-28.

[27] P. Peykani, E. Mohammadi, M. Rostamy-Malkhalifeh, M. S. Pishvaee, A novel two-phase robust portfolio selection and optimization approach under uncertainty: A case study of Tehran stock exchange, PloS ONE,15(10),(2020),1-43.

[28] P. Peykani, E. Mohammadi, R. Farzipoor saen, S. J. Sajadi, M. Rostamy-Malkhalifeh, Data envelopment analysis and robust optimization: A review, Expert Systems, 37(4), (2020), 1-45.

[29] P. Peykani, F. Sadat Seyed Esmaeili, F. Hosseinzadeh Lotfi, Estimating most productive scale size in DEA under uncertainty, The 11th Conference on Data Envelopment Analysis, (2019).

[30] M. Ganji, M. Saraj, Solving Multi Objective Linear Fractional Programming Problem Under Uncertainty via Robust Optimization Approach, Journal of Informatics and Mathematical Sciences, Vol. 11, No. 2, pp. 115–125, 2019