

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال هفتم، شماره سی و سوم، آذر و دی ۱۴۰۰

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

روش اپسیلن محدودیت اصلاح شده برای مسائل بهینه‌سازی دو هدفه: کاهش پیچیدگی محاسباتی و افزایش کارایی

آرمین قانع کنفی*

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لاهیجان، لاهیجان، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۰۹/۱۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۸/۰۵

چکیده

یکی از روش‌های مؤثر در حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه، روش ϵ -محدودیت می‌باشد که بر خلاف روش مجموع‌وزن‌دار شده قادر به یافتن نقاط غیرمغلوب در قسمت‌های نامحدب از مرز غیرمغلوب است. از معایب عمده‌ی این روش یافتن نقاط غیرمغلوب تکراری به ازای انتخاب پارامترهای متفاوت و در نتیجه افزایش پیچیدگی محاسباتی الگوریتم و کاهش کارایی آن در حالت کلی است که به لحاظ زمان و هزینه پیاده‌سازی مقرون به صرفه نیست. در این مقاله اصلاحی بر روش ϵ -محدودیت انجام می‌گیرد که به واسطه‌ی هوشمندسازی الگوریتم، نواحی غیرضروری که منجر به تولید نقاط غیرمغلوب تکراری می‌شوند، از همان ابتدا حذف می‌گردند و در نتیجه لزوم تلاش‌های محاسباتی اضافی جهت یافتن نقاط غیرمغلوب تکراری منتفی می‌شود. مباحث و جزئیات روش پیشنهادی به همراه الگوریتم آن، ارائه شده و در بخش مثال عددی، کارایی روش پیشنهادی در مقایسه با روش ϵ -محدودیت، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی چندهدفه، نقاط غیرمغلوب، روش ϵ -محدودیت.

۱- مقدمه

بهینه‌سازی چندهدفه یکی از مهمترین حوزه‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره می‌باشد که در آن تصمیمات بهینه مستلزم مصالحه بین دو یا چند تابع هدف متضاد و متناقض در حضور محدودیت‌های در شکل مساوی یا نامساوی به صورت خطی یا غیرخطی است. بسیاری از علوم در حوزه طراحی مهندسی، مهندسی مالی، یادگیری ماشین و ... و همچنین بسیاری از تصمیم‌گیری‌ها در زندگی واقعی شامل مسائلی هستند که در زمره بهینه‌سازی چندهدفه قرار می‌گیرند.

از آنجایی که در بهینه‌سازی چندهدفه توابع هدف در تضاد با یکدیگر (حتی به صورت جزئی) می‌باشند لذا نقطه‌ای که بتواند تمام توابع هدف را به طور همزمان بهینه نماید وجود ندارد؛ از این رو، با مجموعه‌ای از نقاط روبرو هستیم که شامل بهترین انتخاب فردی توابع هدف و تمام حالت‌های بینابین بهینه می‌شوند، این مجموعه از نقاط را مجموعه نقاط غیرمغلوب می‌نامند. در این نقاط، بهبود در یک مؤلفه‌ی تابع هدف باعث بدتر شدن دست‌کم یک مؤلفه‌ی تابع هدف دیگر می‌گردند. مجموعه‌ی نقاط غیرمغلوب در حالت کلی نامعلوم می‌باشد و از این رو تمام روش‌های موجود در حوزه‌ی بهینه‌سازی چندهدفه در جستجوی راه‌هایی هستند که بتوانند توصیف بهتری از این مجموعه را ارائه دهند. از آنجایی که به دلیل هزینه‌های محاسباتی و زمان اجرا، تولید کل مجموعه غیرمغلوب مقرون به صرفه نیست، لذا در عمل به دنبال روش‌هایی هستیم که بتواند نقاط غیرمغلوب را روی مرز (سطح) غیرمغلوب با یک توزیع یکنواخت، گسترش مناسب و تقریب قابل قبول ارائه دهند به طوری که پاسخگوی خواسته تصمیم‌گیرندگان باشند. اگرچه کاهش زمان محاسباتی در این میان قابل اهمیت نیز می‌باشد. محققین معمولاً مسائل در حوزه‌ی بهینه‌سازی چندهدفه را از جهات مختلف مورد

مطالعه قرار می‌دهند و در نتیجه رویکردهای متفاوت و اهداف گوناگونی پیرامون آن وجود دارد. یک رویکرد ممکن است یافتن یک مجموعه از نقاط غیرمغلوب و/یا تعیین مقدار بدهستان که در اهداف مختلف صدق می‌نماید و/یا یافتن یک جواب باشد که خواسته‌های تصمیم‌گیرنده را برآورده می‌سازد. الگوریتم‌ها و روش‌های متعددی برای یافتن نقاط غیرمغلوب در یک مسأله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه وجود دارند که از آن قبیل می‌توان به روش جستجوی مستقیم [۱]، تکنیک‌های برنامه‌ریزی هدف [۲] شامل روش ϵ -محدودیت [۳، ۴] یا روش‌های وزنی به همراه تغییر وزن‌ها [۵] و روش‌های بر پایه گرادیان از قبیل روش اشتراک مرزی نرمال [۶] اشاره نمود.

روش ϵ -محدودیت نخستین بار توسط هایمز و همکاران [۷] ارائه شد. در روش ارائه شده توسط آنها، یک مولفه‌ی تابع هدف به دلخواه کمینه می‌شود و این در حالی است که سایر توابع هدف به صورت محدودیت‌های از بالا محدود شده در مجموعه قیود قرار گرفته‌اند. مشکل عمده‌ی روش پیشنهاد شده آن است که در بسیاری از مواقع، مدل به دلیل انتخاب نامناسب کران‌های بالای اعمال شده روی توابع هدف، نشدنی شده و یا محکوم به جستجوی تمام ناحیه شدنی در هر تلاش محاسباتی می‌باشد که باعث افزایش پیچیدگی محاسباتی الگوریتم می‌گردد. یک اصلاح از رفع مشکل نشدنی شدن مدل توسط پیروز و همکاران [۸] با به کار گرفتن مفهوم نقاط لنگر و محدود نمودن ناحیه جستجوی هدف انجام گرفت که مشکل نشدنی شدن مدل اولیه را برطرف نمود. با این حال امکان یافتن نقاط غیرمغلوب تکراری به قوت خود باقی مانده است. کاربردهای زیادی از روش ϵ -محدودیت در بسیاری از پژوهش‌های اخیر وجود دارد. برای نمونه، در [۹] از روش ϵ -محدودیت در بهینه‌سازی چرخه زندگی برای مسأله‌ی زنجیره‌ی

$$\min_{x \in X_\theta} g(f_1(x), \dots, f_p(x), \theta) \quad (1)$$

که در آن θ پارامتر برداری است و مجموعه‌ی $X_\theta \subseteq X$ وابسته به پارامتر θ است و $g: \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع می‌باشد. بررسی روش‌های متفاوت کمی‌سازی را می‌توان در [۱۴-۱۶] یافت. عملکرد روش‌های کمی‌سازی در مواجهه با حالت‌هایی که ناحیه‌ی شدنی در فضای هدف به صورت نامحدب باشد، نیز متفاوت است. برای مثال روش مجموع وزن دار شده تنها قادر به یافتن نقاط غیرمغلوب مسائل محدب به ازای انتخاب پارامترهای وزنی مناسب است و همچنین روش ϵ -محدودیت تنها برای محاسبه نقاط غیرمغلوب (ضعیف) کارایی دارد. یکی از ویژگی‌های ممتاز روش ϵ -محدودیت در مقایسه با روش مجموع وزن دار شده آنست که قادر به یافتن نقاط غیرمغلوب در نواحی نامحدب از مرز غیرمغلوب می‌باشد. این کار به واسطه کمینه نمودن یک تابع هدف در حالی که سایر توابع هدف به صورت محدودیت‌هایی که از بالا محدود شده‌اند انجام می‌پذیرد. به ازای انتخاب‌های مناسب بردار کران بالا، نقاط متفاوتی روی مرز غیرمغلوب پیدا می‌شوند. یکی از معایب عمده‌ی این روش آنست که به ازای کران بالاها، متفاوت ممکن است یک نقطه‌ی غیرمغلوب یکسان و تکراری روی مرز غیرمغلوب حاصل شود که موجب افزایش پیچیدگی محاسباتی و کاهش کارایی الگوریتم در عمل می‌شود. در این مقاله، با هدف قرار دادن این اشکال عمده در روش ϵ -محدودیت، روش اصلاح شده‌ای را معرفی می‌نماییم که فواصل غیرضروری را که منجر به نقطه‌ی غیرمغلوب تکراری می‌شود را حذف می‌کند و الگوریتم با سرعت بالاتر نسبت به روش ϵ -محدودیت معمولی قادر به یافتن تقریب مناسب از مرز غیرمغلوب خواهد بود. نحوه عملکرد الگوریتم پیشنهادی به گونه‌ای است که با تعریف یک معیار مناسب فاصله‌ی نرم‌دار شده‌ی بین نقطه‌ی

تأمین هیدروژن استفاده شده است. همچنین، یک کاربرد روش ϵ -محدودیت نیز در [۱۰] در حوزه بهینه‌سازی چندهدفه زنجیره تأمین سوخت‌های زیستی با استفاده از ژنراتورهای ماتریس‌های تصادفی ارائه شده است. کاربرد دیگری از روش ϵ -محدودیت در [۱۱] ارائه شده است که از بهینه‌سازی روش ϵ -محدودیت برای اصلاح روش بهینه‌سازی Grey wolf کسری در برنامه‌ریزی چندهدفه محاسبات ابری استفاده شده است. کاربرد دیگری از روش ϵ -محدودیت در [۱۲] آمده است که از الگوریتم جستجوی انتقال حرارت ϵ -محدودیت برای حل مسائل طراحی مهندسی چندهدفه استفاده شده است. این نشان می‌دهد که روش‌های بهینه‌سازی چندهدفه در بسیاری از مفاهیم موجود در علوم مهندسی و مدیریتی کاربرد فراوانی دارد. با این حال در مقاله پیش‌رو، اصلاحی بر روش ϵ -محدودیت انجام گرفته است به طوری که با هر تغییر بردار کران بالای محدودیتی روی توابع هدف موجود در محدودیت‌ها، یک نقطه‌ی غیرمغلوب متمایز حاصل شده و از هدر رفتن تلاش‌های محاسباتی که منجر به یافتن نقاط غیرمغلوب تکراری می‌گردد، جلوگیری می‌گردد.

روش‌های مختلفی برای مواجهه با مسائل بهینه‌سازی چندهدفه وجود دارد. در این بین، برخی از روش‌ها مسأله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه را به یک مسأله‌ی بهینه‌سازی تک‌هدفه پارامتری (SOP) تبدیل می‌نمایند [۸، ۱۳]. چنین مسأله‌ای را یک مسأله‌ی بهینه‌سازی کمی شده می‌نامند. اگر کمی‌سازی به دقت انجام پذیرد، بهینگی پارتو جواب‌های به دست آمده از آن تضمین خواهد شد.

یک روش معمول برای تعیین جواب‌های یک مسأله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه، دوباره فرموله کردن آن در قالب یک مسأله‌ی بهینه‌سازی تک‌هدفه پارامتری است. یک مسأله‌ی بهینه‌سازی کمی شده پارامتری در حالت کلی به صورت زیر است:

که در آن $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ، $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{pe}$ و $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{pe}$ توابع $(n, p, pe, pi \in \mathbb{N}, p \geq 2)$ پیوسته می‌باشند.

قرار می‌دهیم $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ که در آن $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، $i = 1, \dots, p$ که در آن دست‌کم دو تابع هدف در تضاد با یکدیگر هستند. فرض کنید S یک مجموعه‌ی محدب بسته و $C \subseteq \mathbb{R}^{pe}$ یک مخروط محدب بسته است.

مجموعه‌ی C یک مخروط محدب است اگر برای هر $\lambda \geq 0$ و هر $x, y \in C$ داشته باشیم $\lambda(x+y) \in C$.

مجموعه‌ی $X = \{x \in S \mid g(x) \in C, h(x) = 0_q\}$ را مجموعه محدودیت‌های مسأله‌ی (۲) در فضای تصمیم می‌نامیم. فرض کنید $X \neq \emptyset$ ، تصویر نقاط $x \in X$ تحت نگاشت $f(X)$ مجموعه‌ی $f(X) = \{f(x) \in \mathbb{R}^p \mid x \in X\}$ را می‌سازد که به آن مجموعه شدنی در فضای هدف می‌گوییم. واضح است که به دنبال یافتن نقاط غیرمغلوب f روی مجموعه X هستیم. هنگامی که توابع هدف در تضاد با یکدیگر باشند، نقطه‌ای که بتواند تمام توابع هدف را به‌طور همزمان بهینه نماید وجود ندارد، از این‌رو حائز اهمیت خواهد بود که یک تعریف از بهینگی یا کارایی پارتو که در اقتصاد و سیستم‌های مهندسی کارایی فراوانی دارد، ارائه نماییم.

تعریف ۲-۱: [۱۵] نقطه‌ی شدنی $\hat{x} \in X$ را

- یک جواب کارای ضعیف مسأله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۲) می‌گوییم اگر $x \in X$ وجود نداشته باشد که $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ ، $i = 1, \dots, p$.
- یک جواب کارای مسأله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۲) می‌گوییم اگر $x \in X$ وجود نداشته باشد که $f_i(x) \leq f_i(\hat{x})$ ، $i = 1, \dots, p$ و دست‌کم در یک نامساوی علامت به‌صورت اکید باشد.

غیرمغلوب به‌دست آمده به ازای کران بالای انتخابی و بردار کران بالای انتخاب‌شده روی توابع هدف محدودیتی را اندازه‌گیری می‌نماید و در صورتی که از معیار پیش‌تعیین شده توسط تصمیم‌گیرنده تجاوز نماید، آن فاصله‌ی مورد نظر را از ناحیه شدنی هدف حذف می‌نماید و با یک پرش مناسب بین نقاط افراز شده، انتخاب بردار کران بالا به گونه‌ای که حل مسأله‌ی بهینه‌سازی متناظر منجر به یافتن یک نقطه‌ی غیرمغلوب جدید روی مرز غیرمغلوب شود، ادامه می‌دهد تا وقتی که تمام نقاط افراز مورد بررسی قرار بگیرند.

در ادامه ساختار مقاله به‌صورت زیر معرفی می‌گردد: در بخش دوم، به‌طور خلاصه مفاهیم پایه‌ای در بهینه‌سازی چندهدفه مورد مطالعه قرار می‌گیرند و در ادامه همین بخش روش ϵ -محدودیت به‌طور اجمالی مطالعه می‌شود. توصیف روش پیشنهادی همراه با بیان جزئیات و الگوریتم اجرا در بخش سوم مطالعه می‌شود. در ادامه و در بخش چهارم، یک مثال عددی معروف به منظور مقایسه کارایی روش‌های ϵ -محدودیت و ϵ -محدودیت اصلاح‌شده آورده می‌شود و بخش پنجم نیز به نتیجه‌گیری و پیشنهاد برای مطالعات آتی تخصیص پیدا می‌کند.

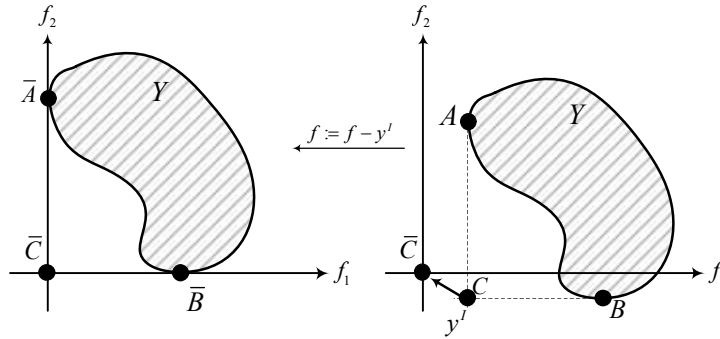
۲- مفاهیم پایه‌ای و روش ϵ -محدودیت

این بخش از دو زیر بخش تشکیل شده است. در زیر بخش اول به‌طور مختصر تعاریف و مفاهیم مرتبط با مقاله ارائه می‌شوند و سپس، در زیر بخش دوم یک مرور اجمالی از روش ϵ -محدودیت را آورده می‌شود.

۲-۱- مفاهیم پایه‌ای

مسأله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min & f(x), \\ \text{s.t.} & g(x) \in C, \\ & h(x) = 0_q, \\ & x \in S \end{aligned} \quad (2)$$



شکل (۱): انتقال نقطه‌ی ایده‌آل y^I به مبدأ مختصات که به واسطه‌ی آن نقاط لنگر و ناحیه شدنی در فضای هدف منتقل می‌گردند و Y شامل مقادیر نامنفی می‌شود.

نقاط لنگر وجود دارند و منحصر به فرد هستند.

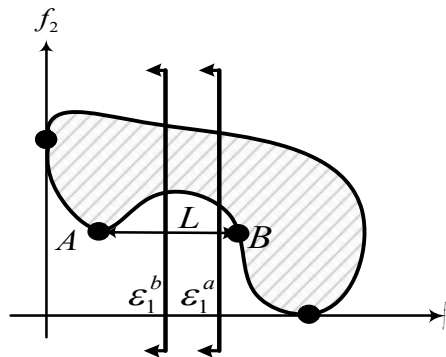
تعریف ۲-۳: (نقطه‌ی ایده‌آل) [۱۵] نقطه‌ی $y^I := \min_{x \in X} f_i(x)$ که در آن $y^I = (y_1^I, \dots, y_p^I)$ را نقطه‌ی ایده‌آل مسأله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۲) می‌نامیم.

به منظور سادگی، نقطه‌ی ایده‌آل را به مبدأ مختصات انتقال می‌دهیم. این امر موجب می‌گردد که تمام توابع هدف روی مجموعه‌ی Y مقادیر نامنفی اختیار نمایند. این موضوع در شکل (۱) نشان داده شده است.

در ادامه مباحث، توضیح مختصری از نحوه عملکرد روش ϵ -محدودیت آورده می‌شود.

مجموعه‌ی تمام جواب‌های کارا و کارای ضعیف مسأله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۲) را به ترتیب با X_E و X_{wE} نشان می‌دهند و تصویر آن‌را تحت نگاشت $Y = f(X)$ به ترتیب با نمادهای Y_N و Y_{wN} نشان داده و مجموعه نقاط غیرمغلوب و غیرمغلوب ضعیف می‌نامند. هدف اصلی در حل یک مسأله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه تعیین تقریب مناسب از این مجموعه‌ها است.

تعریف ۲-۲: (نقطه‌ی لنگر) [۱۷] i -امین نقطه‌ی لنگر به صورت $y^{i*} = (f_1(x^{i*}), \dots, f_p(x^{i*}))^T$ تعریف می‌شود که در آن $x^{i*} = \arg \min_{x \in X} f_i(x)$ ، $i = 1, \dots, p$ در این مقاله فرض بر این است که



شکل (۲): نقاط A و B غیرمغلوب می‌باشند. شکل فوق نشان می‌دهد که به ازای هر انتخاب ϵ_1 در فاصله‌ی به طول L و سپس حل مسأله‌ی کمی‌شده‌ی ϵ -محدودیت نقطه‌ی غیرمغلوب تکراری A حاصل می‌شود که این تلاش‌های بیهوده منجر به افزایش پیچیدگی محاسباتی روش ϵ -محدودیت و افزایش زمان اجرای الگوریتم می‌گردد.

۲-۲- روش ϵ -محدودیت

در کنار روش مجموع وزن‌دار شده [۱۸، ۱۹]، روش ϵ -محدودیت یکی از روش‌های مؤثر در حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه است. در این روش معیار افزوده شده‌ای وجود ندارد، در عوض فقط یکی از توابع هدف در حالی که سایر توابع هدف در مجموعه‌ی محدودیت‌ها قرار گرفته‌اند و از بالا محدود شده‌اند، کمینه می‌گردد. اولین بار این روش توسط هایمز و همکاران (۱۹۷۱) [۷] ارائه شد و سپس توسط چانگونگ و هایمز (۱۹۸۳) [۲۰] توسعه داده شد. در روش ϵ -محدودیت مسأله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه‌ی (۲) با مسأله‌ی کمی‌شده‌ی (۳) جایگزین می‌شود.

$$\begin{aligned} \min f_j(x), \\ \text{s.t. } f_k(x) \leq \epsilon_k, k=1, \dots, p, k \neq j, \\ x \in X \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن $\epsilon \in \mathbb{R}^{p-1}$. جزئیات روش ϵ -محدودیت در [۱۵] آورده شده است. به شکل (۲) توجه نمایید. فرض کنید بخواهیم تابع هدف $f_2(x)$ را با اعمال محدودیت اضافی $f_1(x) \leq \epsilon_1$ کمینه نماییم. در صورتی که $\epsilon_1 = \epsilon_1^a$ انتخاب شود، کمینه‌ی مسأله‌ی کمی‌شده‌ی $\min_{x \in X} f_2(x)$ با محدودیت اضافی $f_1(x) \leq \epsilon_1$ نقطه‌ی A خواهد بود. به ازای انتخاب بعدی $\epsilon_1 = \epsilon_1^b$ کمینه تابع هدف $f_2(x)$ همچنان در نقطه‌ی A خواهد بود. این روند تا زمانی که ϵ_1 مقادیر بزرگتر از مولفه‌ی اول نقطه‌ی A داشته باشد، نیز تکرار خواهد شد. لذا یک تلاش محاسباتی بزرگ و هزینه‌بر، به ازای انتخاب کران‌های بالای متفاوت برای $f_1(x)$ به منظور تولید یک نقطه‌ی غیرمغلوب تکراری A هدر می‌رود. در روش جدید ϵ -محدودیت اصلاح شده تلاش داریم که با هوشمند سازی روش به واسطه تعریف معیارهای کیفی ویژه از تولید نقاط غیرمغلوب تکراری جلوگیری نماییم و بدین واسطه باعث بهبود

چشمگیر در پیچیدگی محاسباتی و زمان اجرای الگوریتم ϵ -محدودیت شویم. جزئیات روش ϵ -محدودیت اصلاح شده به همراه الگوریتم اجرا و معیارهای کیفی مؤثر به منظور جلوگیری از تولید نقاط غیرمغلوب تکراری در بخش بعدی آورده می‌شود.

۳- جزئیات روش پیشنهادی و الگوریتم روش

شکل (۲) نشان می‌دهد که هر انتخاب ϵ_1 از فاصله‌ی به طول L و سپس حل مسأله‌ی بهینه سازی کمی‌شده (۳) به ازای $p=2$ و $j=2$ منجر به تولید نقطه‌ی غیرمغلوب تکراری A می‌شود. در ادامه جزئیات روشی را توضیح می‌دهیم که به کمک آن از تولید نقاط غیرمغلوب تکراری جلوگیری می‌گردد. پس از آن، الگوریتم اجرای روش ϵ -محدودیت اصلاح شده برای حل مسائل بهینه‌سازی دوهدفه در حالت کلی (خطی یا غیرخطی) آورده می‌شود.

۳-۱- ارائه‌ی روشی کارا برای حذف کران‌های

بالای بی‌اثر

در این زیربخش، روشی ارائه می‌گردد که با استفاده از آن می‌توان سرعت اجرای روش ϵ -محدودیت را افزایش داد و به واسطه‌ی آن پیچیدگی محاسباتی الگوریتم کاهش پیدا نماید. مسأله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه (۲) را در حالت $p=2$ در نظر بگیرید. در مسأله‌ی کمی‌سازی شده‌ی (۳) قرار دهید $j=2$. در این صورت مسأله‌ی بهینه‌سازی زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \min f_2(x), \\ \text{s.t. } f_1(x) \leq \epsilon_1, \\ x \in X \end{aligned} \quad (4)$$

حل مسأله‌ی بهینه‌سازی (۴) به انتخاب مناسب ϵ_1 وابسته است. در صورتی که انتخاب ϵ_1 مناسب نباشد، می‌تواند منجر به نشدنی شدن مسأله‌ی

حل مسأله‌ی بهینه‌سازی تک‌هدفه‌ی (۴) نقطه‌ی غیرمغلوب روی مرز غیرمغلوب حاصل می‌شود. اکنون شکل (۳) را در نظر بگیرید:

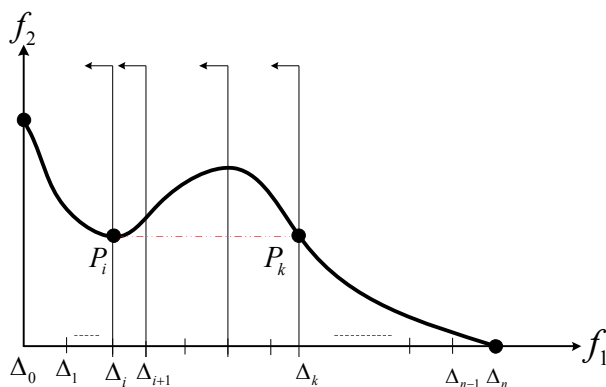
یک افراز از فاصله‌ی $[\Delta_0, \Delta_n]$ به صورت $I = \{\Delta_0, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_k, \dots, \Delta_n\}$ که در آن $\Delta_0 < \dots < \Delta_i < \dots < \Delta_k < \dots < \Delta_n$ در نظر بگیرید به طوری که $\Delta_i = i \cdot h$ ، $i = 0, 1, \dots, n$ و $h = \frac{\sum_{i=1}^n (-1)^i f_1(x^{i*})}{n}$ است.

فرض کنید $P_k = (P_k^1, P_k^2)$ نقطه‌ی غیرمغلوب متناظر با حل (SOP) (۴) به ازای اعمال کران بالای $\varepsilon_1 = \Delta_k$ روی $f_1(x)$ باشد. یک معیار همپوشانی به منظور فاصله‌ی نقطه‌ی غیرمغلوب به دست آمده از خط تراز $f_1(x) = \varepsilon_1$ در نظر می‌گیریم که فاصله‌ی بین این دو را اندازه‌گیری می‌کند. این معیار را با نماد δ نشان می‌دهیم که توسط تصمیم‌گیرنده (DM) انتخاب می‌شود و هرگاه شرط $|P_k^1 - \Delta_k| \leq \delta$ برقرار باشد به آن معنی است که نقطه‌ی غیرمغلوب P_k روی خط تراز $f_1(x) = \Delta_k$ در محل تقاطع آن با مرز پایینی فضای شدنی هدف (Y) قرار دارد و کران بالای اعمال شده روی تابع هدف اول، یک محدودیت فعال بوده است.

بهینه‌سازی (۴) شود و یا ممکن است به ازای انتخاب‌های گوناگون ε_1 تنها یک نقطه‌ی غیرمغلوب منحصر به فرد به دست آید. برای جلوگیری از این اتفاقات، با فرض وجود و یکتایی، لنگرها را تعیین می‌کنیم و سپس نقطه‌ی ایده‌آل که در حالت کلی نقطه‌ی نشدنی است، به دست می‌آوریم. انتقال نقطه‌ی ایده‌آل به مبدأ مختصات موجب می‌گردد که لنگرها روی محورهای مختصات در ناحیه‌ی اول از دستگاه مختصات قرار بگیرند.

انتخاب سیستماتیک با توزیع یکنواخت ε_1 در بازه $[0, \sum_{i=1}^n (-1)^i f_1(x^{i*})]$ که در آن $x^{i*} = \arg \min_{x \in X} f_i(x)$ می‌باشد و سپس حل مسأله‌ی بهینه‌سازی (۴) منجر به تولید نقاط غیرمغلوب می‌گردد.

به منظور دستیابی به یک توزیع تقریباً یکنواخت از نقاط غیرمغلوب روی مرز غیرمغلوب، یک توزیع یکنواخت از انتخاب‌های ε_1 را در نظر می‌گیریم. فرض کنید Δ_i ، $i = 0, 1, \dots, n$ ، نمایش i -امین زیر بازه از بازه‌ی $[0, \sum_{i=1}^n (-1)^i f_1(x^{i*})]$ با طول $h = \frac{\sum_{i=1}^n (-1)^i f_1(x^{i*})}{n}$ باشد، در این صورت با انتخاب $\varepsilon_1 = \Delta_i = i \cdot h$ ، $i = 0, 1, \dots, n$ و سپس



شکل (۳): هر انتخاب از ε_1 در فاصله‌ی $[\Delta_i, \Delta_k)$ و سپس حل مسأله‌ی بهینه‌سازی تک‌هدفه (۴) منجر به تولید نقطه‌ی غیرمغلوب P_i از مسأله بهینه‌سازی چندهدفه (۲) می‌گردد.

δ توسط تصمیم‌گیرنده تعیین شود. فرض کنید $Y_N \neq \emptyset$ مجموعه نقاط غیرمغلوب و \tilde{Y}_N یک مجموعه گسسته و تقریبی از Y_N باشد، در حالت کلی $\tilde{Y}_N \subseteq Y_N$ در ابتدا قرار دهید $Y_N = \emptyset$.

مرحله اصلی

گام اول: مقدار $n \in \mathbb{N}$ تعداد نقاط افراز را مشخص کنید. یک افراز n تایی تشکیل دهید، به طوری که در آن $\Delta_i = i \cdot h$ ، $i = 0, 1, \dots, n$ و $h = \frac{\sum_{i=1}^n (-1)^i f_1(x_i^*)}{n}$ است.

گام دوم: قرار دهید $i = n - 1$ تا وقتی که $i \geq 1$ می‌باشد، فرایند زیر را تکرار کنید.

فرض کنید نقطه‌ی غیرمغلوب متناظر با مسأله بهینه‌سازی تک هدفه (۴) به ازای $\Delta_i = \varepsilon_i$ به صورت P_i باشد.

گام سوم: یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد.

(الف) اگر $|\Delta_i - P_i^1| \leq \delta$ آنگاه قرار دهید $i := i - 1$. تشکیل می‌دهیم $\tilde{Y}_N = \{P_k\}_{k=i}^n$ و به گام دوم برگردید.

(ب) در غیر این صورت، با توجه به $\Delta_r = \max_{k=0, \dots, i-1} \{\Delta_k \in I \mid \Delta_k - P_i^1 < 0\}$ که $\varepsilon_i = \Delta_r$ قرار می‌دهیم $i := r$. تشکیل می‌دهیم $\tilde{Y}_N = \{P_k\}_{k=i}^n \setminus \{P_k\}_{k=r+1}^{i-1}$ و به گام دوم می‌رویم.

مرحله نهایی: پس از حل مسأله‌ی بهینه‌سازی تک‌هدفه (۴) برای تمام نقاط افراز شده، مجموعه غیرمغلوب \tilde{Y}_N به دست می‌آید که تقریبی از Y_N است.

۳-۳- بررسی همگرایی الگوریتم پیشنهادی

همگرایی الگوریتم پیشنهادی، وابسته به روش استفاده شده برای حل مسأله‌ی بهینه‌سازی تک

در این حالت مسأله‌ی بهینه‌سازی تک‌هدفه (۴) به ازای یک نقطه‌ی افراز دیگر مانند $\varepsilon_1 = \Delta_{k-1}$ پیاده سازی می‌شود. بدون آن که از کلیت موضوع کاسته شود فرض کنید نقطه‌ی غیرمغلوب متناظر با مسأله‌ی بهینه‌سازی تک‌هدفه (۴) به صورت $P_i = (P_i^1, P_i^2)$ باشد به طوری که $|P_i^1 - \Delta_{k-1}| > \delta$ است. این بدان معنی است که نقطه‌ی غیرمغلوب، در مکانی به غیر از محل تقاطع محدودیت $f_1(x) = \Delta_{k-1}$ و مرز پایینی فضای شدنی هدف اتفاق افتاده است. واضح است که $P_i^1 < P_k^1$. هر انتخاب کران بالای محدودیت $f_1(x) \leq \varepsilon_i$ با شرط $\varepsilon_i = [\Delta_i, \Delta_k)$ منجر به همین نقطه‌ی غیرمغلوب می‌گردد و این به معنی هدر رفتن تلاش محاسباتی و افزایش زمان حل الگوریتم می‌باشد. برای آن که از تولید نقاط غیرمغلوب تکراری جلوگیری نماییم و بدین وسیله کارایی الگوریتم را افزایش بدهیم، کران بالای محدودیتی بعدی را به صورت زیر انتخاب می‌نماییم.

$$\varepsilon_i = \max_{i=1, \dots, n} \{ \Delta_i \in I \mid \Delta_i - P_i^1 < 0 \} \quad (5)$$

اکنون با انتخاب کران بالای $f_1(x)$ از روی رابطه‌ی (۵) در هر تکرار از حل مسأله‌ی بهینه‌سازی تک هدفه (۴) یک نقطه‌ی غیرمغلوب جدید حاصل می‌گردد. نتیجه‌ی این فرایند تکراری مجموعه‌ی نقاط غیرمغلوب \tilde{Y}_N خواهد بود که تقریبی از مرز غیرمغلوب Y_N می‌باشد.

۲-۳- الگوریتم روش پیشنهادی

مرحله آغازین: مسأله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه‌ی (۲) را به ازای $p = 2$ در نظر بگیرید. فرض کنید لنگرها طبق تعریف ۲-۲ وجود دارند و منحصر به فرد است. نقطه‌ی ایده‌آل را طبق تعریف ۲-۳ به دست آورده و اگر منطبق بر مبدأ نباشد، به مبدأ مختصات انتقال دهید. این عمل موجب می‌گردد که نقاط لنگر روی محورها واقع شوند. یک معیار همپوشانی

بروزرسانی نمایید [۲۲].

مرحله سوم: اگر معیار توقف برقرار شد، توقف کنید. در غیراین صورت، k را افزایش داده و به مرحله یک بروید.

توضیحات کافی درباره هر یک از مراحل الگوریتم ۳-۳-۱ را می‌توانید در [۲۲] مشاهده نمایید. همچنین اثبات همگرایی الگوریتم‌های بر پایه جستجوی تصادفی چندشروع نیز در قضیه‌ی ۳-۲-۱ [۲۳] مورد بررسی قرار گرفته است. از طرفی، معیارهای توقف برای الگوریتم‌های بهینه‌سازی سراسری چندشروع بر پایه جستجوی تصادفی را می‌توانید در [۲۴] مشاهده نمایید.

در بخش بعدی، به کمک یک مثال نمونه‌ای معروف به mZDT3 که توسط دب [۲۵] برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه توسط الگوریتم‌های تکاملی ژنتیک برپایه مرتب‌سازی غلبه (NSGA) مورد استفاده قرار گرفت و بسیاری از الگوریتم‌های بر پایه‌ی ریاضی را با چالش جدی مواجه می‌کند، مورد ارزیابی قرار می‌دهیم. این ارزیابی، کارایی روش اصلاح شده را در مقایسه با روش ϵ -محدودیت به خوبی نشان می‌دهد.

۴- شبیه‌سازی عددی

در این بخش کارایی روش پیشنهادی را در مقایسه با روش ϵ -محدودیت در قالب یک مثال نمونه‌ای معروف که از [۲۵] انتخاب شده است و با نماد mZDT3 نمایش داده می‌شود مورد بررسی و ارزیابی قرار می‌دهیم. برای شبیه‌سازی از یک نوت بوک با 2 GB RAM و پردازنده‌ی Intel Atom 1.67 GHz و برنامه‌نویسی در محیط نرم افزار Maple 2019 استفاده شده است. تمامی محاسبات تا چهار رقم بامعنا دارای دقت درست می‌باشند. مسئله‌ی نمونه‌ای mZDT3 به صورت زیر بیان می‌شود:

هدفه (۴) از گام دوم می‌باشد. در این مقاله، برای یافتن مینیمم سراسری مسأله بهینه‌سازی تک‌هدفه (۴) از روش بهینه‌سازی چندشروع بر پایه‌ی الگوریتم جستجوی تصادفی استفاده شده است. این نوع الگوریتم‌ها برای بسیاری از مسائل بهینه‌سازی سراسری بدساختار که تابع هدف آن نامحدب، دیفرانسیل‌ناپذیر با متغیرهای تصادفی از نوع گسسته و/یا پیوسته (احتمالی) می‌باشند، مفید هستند. برای نمونه، الگوریتم‌های جستجوی ممنوعه، ژنتیک، برنامه‌ریزی تکاملی، بهینه‌سازی ازدحام ذرات، بهینه‌سازی کلونی مورچه‌ها، آنتروپی متقاطع و... برخی از الگوریتم‌های جستجوی تصادفی هستند. در [۲۱]، نشان داده شده است که الگوریتم‌های جستجوی تصادفی می‌توانند به طور متوسط با پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای یک مسأله‌ی بهینه‌سازی تک‌هدفه را حل کنند و این در حالی است که روش‌های قطعی برای یافتن بهینه سراسری مسائل بهینه‌سازی تک‌هدفه دارای پیچیدگی محاسباتی از نوع مسائل NP-hard می‌باشند. الگوریتم‌هایی از پیاده‌سازی روش‌های چندشروع برپایه‌ی جستجوی تصادفی را می‌توانید در [۲۲، ۲۳] مشاهده نمایید. در حالت کلی، الگوریتم‌های جستجوی تصادفی مبتنی بر چندنقطه شروع در ادامه آمده است [۲۲].

۳-۳-۱- الگوریتم جستجوی تصادفی عمومی

مرحله آغازین: پارامترهای اولیه θ_0 ، نقاط شدنی آغازین x_0 و اندیس تکرار $k=0$ را در نظر بگیرید. **مرحله یک:** مجموعه‌ای از نقاط کاندید شدنی V_{k+1} را مطابق یک تولیدکننده خاص نقاط [۲۲، ۲۳] به دست آورده و توزیع آماری نمونه‌برداری نقاط را تعیین کنید.

مرحله دوم: x_{k+1} را بر اساس نقاط کاندیدای V_{k+1} ، تکرارهای پیشین و پارامترهای الگوریتم بروزرسانی کنید. همچنین پارامترهای الگوریتم، θ_{k+1} را

شکل (۵) نشان داده شده است.

نتایج به دست آمده از اجرای الگوریتم دو روش \mathcal{E} - محدودیت و اصلاح شده‌ی آن روی مسأله‌ی mZDT3 منجر به تولید نقاط غیرمغلوب یکسان روی مرز غیرمغلوب شده است؛ با این تفاوت که در روش اصلاح شده تعداد ۲۹ نقطه‌ی افزاز شده که کران بالای محدودیت $f_1(x)$ را تشکیل می‌دهند به دلیل آن که منجر به تولید نقطه‌ی غیرمغلوب یکسان می‌شدند به‌طور هوشمند شناسایی و حذف شدند و از این‌رو الگوریتم روش اصلاح شده‌ی \mathcal{E} - محدودیت بدون به‌هدر رفتن تلاش محاسباتی در هر تکرار یک نقطه‌ی غیرمغلوب جدید را روی مرز غیرمغلوب تولید می‌کند و از این‌رو نسبت به روش \mathcal{E} - محدودیت که تعداد ۲۹ تلاش بی‌په‌وده داشته است و همه‌ی آن‌ها منجر به تولید نقاط غیرمغلوب یکسان شده است، دارای ویژگی ممتازی است. جدول (۱) مقایسه‌ی این دو روش را به لحاظ تعداد نقاط غیرمغلوب تولید شده، تعداد تلاش‌های بی‌په‌وده، زمان اجرای الگوریتم و تعداد فراخوانی توابع نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned} \min f_1(x) &= x_1, \\ \min f_2(x) &= g(x) \cdot h(x), \end{aligned} \quad (۶)$$

s.t.

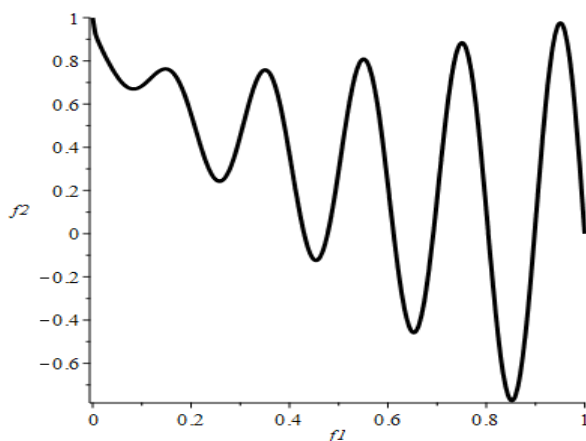
$$g(x) = 1 + \frac{9}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i^2,$$

$$h(x) = 1 - \sqrt{\frac{x_1}{g(x)} - \frac{x_1}{g(x)} \sin 10x_1}$$

که در آن متغیرها محدود به کران‌های $x_1 \in [0, 1]$ و $x_i \in [-1, 1]$ برای $i = 2, \dots, n$ می‌باشند. شکل (۴) مرز غیرمغلوب را تحت شرایط گفته شده نشان می‌دهد.

قرار می‌دهیم $n = 30$. این مسأله دارای مرز غیرمغلوب ناپیوسته و محدب می‌باشد و جواب‌های کارا متناظر با $x_1^* \in [0, 1]$ و $x_i^* = 0$ برای $i = 2, \dots, n$ است. روش پیشنهادی و روش \mathcal{E} - محدودیت را با یک افزاز اولیه از ۵۰ نقطه با فاصله‌های مساوی مورد مقایسه قرار می‌دهیم. معیار همپوشانی را در روش اصلاح شده، $\delta = 0.05$ در نظر می‌گیریم.

نقاط غیرمغلوب به دست آمده توسط دو روش در



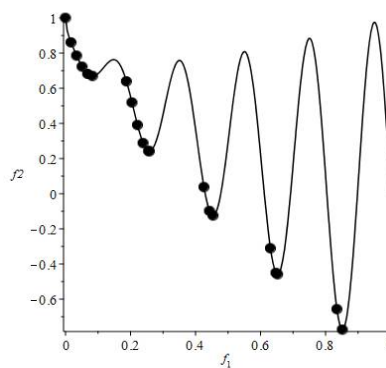
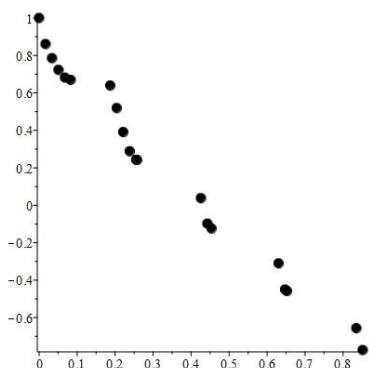
شکل (۴): تصویری از مرز غیرمغلوب مسأله mZDT3

شد که از تولید نقاط غیرمغلوب تکراری به ازای کران‌های بالای متفاوت اعمال شده روی توابع هدف جلوگیری می‌کند. این عمل به واسطه‌ی یک معیار همپوشانی که توسط تصمیم‌گیرنده در نظر گرفته می‌شود و یک معیار کنترلی انجام گرفت. کار این معیار کنترلی در واقع بررسی فاصله‌ی بین نقطه‌ی افراز در تکرار بعدی و مؤلفه‌ی اول نقطه‌ی غیرمغلوب تولید شده در تکرار فعلی می‌باشد که به واسطه‌ی آن به‌طور هوشمند تشخیص داده می‌شود که کران بالای کاندید، آیا می‌تواند تولید کننده‌ی نقطه‌ی غیرمغلوب جدید باشد یا خیر؟ این نوع عملکرد مؤثر، تأثیر به‌سزایی روی زمان اجرای الگوریتم و تعداد فراخوانی توابع می‌گذارد و موجب می‌گردد که تلاش‌های بی‌پوده‌ای که منجر به تولید نقاط غیرمغلوب تکراری شوند، حذف گردند. کارایی روش پیشنهادی در قالب یک مثال نمونه‌ای معروف نشان داده شده است. تعمیم این روش برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه می‌تواند عنوان پژوهش بعدی در این زمینه باشد.

نتایج به‌دست آمده در جدول (۱) به خوبی نشان دهنده‌ی آن است که روش پیشنهادی نسبت به روش ϵ -محدودیت در زمان کمتر و با مجموع تعداد فراخوانی کمتر قادر به تولید نقاط غیرمغلوب روی مرز غیرمغلوب شده است. این موضوع از آن‌جا حائز اهمیت می‌باشد که تعدادی از تلاش‌های روش ϵ -محدودیت به ازای کران‌های بالای اعمال شده روی تابع هدف $f_1(x)$ منجر به تولید نقطه‌ی غیرمغلوب یکسان شده و همین امر باعث افزایش پیچیدگی الگوریتم و افزایش زمان اجرا و در نتیجه کاهش کارایی الگوریتم مورد نظر شده است. در حالی که در روش اصلاح‌شده، به خوبی با تعریف یک معیار کیفی کنترل کننده احتمال وقوع نقاط غیرمغلوب تکراری به صفر رسید و هر اجرای الگوریتم به‌طور مؤثر منجر به تولید نقطه‌ی غیرمغلوب متمایز روی مرز غیرمغلوب می‌گردد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک اصلاح بر روش ϵ -محدودیت ارائه



شکل (۵): تولید نقاط غیرمغلوب روی مرز غیرمغلوب مسئله mZDT3 با دو روش ϵ -محدودیت و اصلاح شده‌ی آن.

جدول (۱): مقایسه‌ی بین روش ϵ -محدودیت و اصلاح شده‌ی آن که به خوبی کارایی روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

روش	تعداد نقاط افراز	تعداد نقاط غیرمغلوب تولید شده	تعداد تلاش‌های بهبوده	زمان اجرای الگوریتم (ثانیه)	مجموع تعداد فراخوانی توابع
ϵ -محدودیت	۵۰	۲۰	۳۰	۳۹۸/۰۷۸	۳۵۲۷۰۸۸
ϵ -محدودیت اصلاح‌شده	۵۰	۲۰	۰	۱۶۹/۲۹۷	۱۳۸۲۶۱۶

optimization. IEEE transactions on systems, man, and cybernetics, 1(3): 296-297 (1971)

[8] B. Pirouz, E. Khorram. A computational approach based on the ϵ -constraint method in multi-objective optimization problems. Adv. Appl. Stat 49: 453 (2016)

[9] M. Ehrenstein, G. Guillén-Gosálbez. Multiobjective Life Cycle Optimization of Hydrogen Supply Chains. In Hydrogen Supply Chains 389-404 (2018)

[10] T. Ganesan, P. Vasant, I. Litvinchev. Multiobjective Optimization of a Biofuel Supply Chain Using Random Matrix Generators in Deep Learning Techniques and Optimization Strategies in Big Data Analytics. IGI Global 206-232 (2020)

[11] K. Sreenu, S. Malempati. MFGMTS: Epsilon constraint-based modified fractional grey wolf optimizer for multi-objective task scheduling in cloud computing. IETE Journal of Research 65(2): 201-215 (2019)

[12] M. A. Tawhid, V. Savsani. ϵ -constraint heat transfer search (ϵ -HTS) algorithm for solving multi-objective engineering design problems. Journal of computational design and engineering 5(1): 104-119 (2018)

[13] A. Ghane-Kanafani, E. Khorram. A new scalarization method for finding the efficient frontier in non-convex multi-objective problems. Applied Mathematical Modelling 39(23): 7483-7498 (2015)

[14] J. Borwein, A. S. Lewis. Convex analysis and nonlinear optimization: theory and examples. Springer Science & Business Media (2010)

[15] M. Ehrgott. Multicriteria optimization. Springer Science & Business Media (2006)

[1] L. He, A. M. Friedman, C. Bailey-Kellogg. A divide-and-conquer approach to determine the Pareto frontier for optimization of protein engineering experiments. Proteins. Structure, Function, and Bioinformatics 80(3): 790-806 (2012)

[2] A. Chakraborty, A. A. Linninger. Plant-wide waste management. 1. Synthesis and multiobjective design. Industrial & engineering chemistry research 41(18): 4591-4604 (2002)

[3] M. Astasuain, A. Bandoni, C. Sarmoria, A. Brandolin. Simultaneous process and control system design for grade transition in styrene polymerization. Chemical engineering science, 61(10), 3362-3378 (2006)

[4] A. Hugo, C. Ciumei, A. Buxton, E. N. Pistikopoulos. Environmental impact minimisation through material substitution: a multi-objective optimisation approach. In Computer Aided Chemical Engineering 14, 683-688 (2003)

[5] Y. L. Lim, P. Floquet, X. Joulia, S. D. Kim. Multiobjective optimization in terms of economics and potential environment impact for process design and analysis in a chemical process simulator. Industrial & engineering chemistry research. 38(12): 4729-4741 (1999)

[6] I. Das, J. E. Dennis. Normal-boundary intersection: A new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems. SIAM journal on optimization. 8(3): 631-657 (1998)

[7] Y. Y. Haimes. On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system

Evolutionary Multiobjective Optimization. Theoretical Advances and Applications. 105-145 (2005)

[16] G. Eichfelder. Adaptive scalarization methods in multiobjective optimization (436): Springer (2008)

[17] A. Messac, A. Ismail-Yahaya, C. A. Mattson. The normalized normal constraint method for generating the Pareto frontier. Structural and multidisciplinary optimization 25(2): 86-98 (2003)

[18] T. Evangelos. Multi-criteria decision making methods: a comparative study. Netherland: Kluwer Academic Publication (2000)

[19] P.C. Fishburn. Letter to the editor—additive utilities with incomplete product sets: application to priorities and assignments. Operations Research 15(3): 537-542 (1967)

[20] V. Chankong, Y. Y. Haimes. Multiobjective decision making: theory and methodology. Courier Dover Publications (2008)

[21] S. A. Vavasis. Complexity issues in global optimization: a survey, in Handbook of global optimization Springer. 27-41 (1995)

[22] Z. B. Zabinsky. Random search algorithms. Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science (2010)

[23] A. A. Zhigljavsky. Theory of global random search. Springer Science & Business Media (65): (2012)

[24] B. Betrò, F. Schoen. Sequential stopping rules for the multistart algorithm in global optimisation. Mathematical Programming 38(3): 271-286 (1987)

[25] K. Deb, L. Thiele, M. Laumanns, E. Zitzler. Scalable test problems for evolutionary multiobjective optimization.

