دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و سوم، آذر و دی ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

پایداری معادلات دیفرانسیل غیر کراندار در فضاهای k- نرم‌دار فازی به روش نقطه ثابت

معصومه مددی ماهانی[۱]، رضا سعادتی[۲*]

(۱) دکتری، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران
(۲) دانشیار، گروه ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۱۲/۰۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۱/۲۹

چکیده

ابتدا فضای k – نرم‌دار فازی را با کمک نرم‌های مثلثی و مجموعه‌های فازی معرفی کرده و سپس پایداری رده‌ای از معادلات دیفرانسیل را مورد بحث قرار می‌دهیم. روش مورد استفاده در این مقاله استفاده از قضیه نقطه ثابت می‌باشد. استفاده از روش نقطه ثابت برای بررسی پایداری معادلات تابعی در فضاهای نرمدار و فضاهای نرم‌دار تصادفی اولین بار توسط رادو معرفی شده است. در این مقاله به بررسی معادلات دیفرانسیل $\upsilon'(\nu) = \Gamma(\nu, \upsilon(\nu))$ می‌پردازیم که معادله انتگرالی معادله دیفرانسیل فوق به صورت زیر است

$$\upsilon(\nu) = \upsilon(m) - \int_m^\nu \Gamma(\tau, \upsilon(\tau)) d\tau.$$

در این مقاله معادله‌ی شبه انتگرالی برگرفته از معادله دیفرانسیل فوق را به وسیله تابع فازی تحت کنترل قرار می‌دهیم تا پایدار شود و در نهایت با استفاده از روش نقطه ثابت یک تقریب برای معادله شبه انتگرالی بدست می‌آوریم. این نتایج پایداری هایزر- اولام – راسیاس و پایداری هایزر- اولام را در فضاهای k- نرم دار فازی به روش نقطه ثابت مورد مطالعه قرار می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: معادله انتگرالی، معادله دیفرانسیل، پایداری هایرز – اولام، پایداری هایرز – اولام- راسیاس، فضاهای k- نرم دار فازی.

*عهده دار مکاتبات: Email: rsaadati@iust.ac.ir

۱- مقدمه

مساله پایداری معادلات تابعی از یک سوال اولام (۱۹۶۰) در مورد پایداری همریختی‌ها روی گروه‌ها نشات گرفته است. سوال اولام به صورت زیر است: نگاشت $h: G_1 \to G_2$ را در نظر بگیرید که $(G_1, .)$ یک گروه و (G_2, d) یک گروه متریک باشد. آیا برای $\varepsilon > 0$ می‌توان $\delta > 0$ ای پیدا کرد به گونه‌ای که اگر برای هر $x, y \in G_1$ داشته باشیم $d(h(xy), h(x)(y)) < \delta$ آن‌گاه همریختی $H: G_1 \to G_2$ موجود باشد که برای هر $x, y \in G_1$ داشته باشیم $d(h(x), H(x)) < \varepsilon$؟

به عبارت دیگر اگر یک نگاشت به شکل تقریبی یک همریختی باشد چه موقعی یک همریختی نزدیک به آن وجود دارد. این مساله برای نگاشت‌های جمعی تقریبی وقتی که G_1 و G_2 فضای باناخ هستند توسط هایرز (۱۹۴۱) حل شد و نتیجه‌ی هایرز توسط راسیاس (۱۹۷۸) تعمیم یافت.

اکثر مسائل در ریاضیات کاربردی به معادلات دیفرانسیل منجر می‌شوند. ساده ترین مورد، معادله دیفرانسیل

$$\upsilon'(\nu) = \Gamma(\nu, \upsilon(\nu)) \qquad (1)$$

است. معادله انتگرالی معادله دیفرانسیل فوق به صورت زیر است

$$\upsilon(\nu) = \upsilon(\mathrm{m}) - \int_{\mathrm{m}}^{\nu} \Gamma(\tau, \upsilon(\tau)) d\tau.$$

در این مقاله معادله‌ی شبه انتگرالی برگرفته از معادله دیفرانسیل فوق به وسیله تابع فازی تحت کنترل قرار می‌دهیم وسپس یک تقریب برای معادله شبه انتگرالی به دست می‌آوریم. این نتایج پایداری هایزر- اولام– راسیاس را در فضای نرم‌دار فازی به روش نقطه ثابت، اثبات می‌کند. استفاده از روش نقطه ثابت برای بررسی پایداری معادلات اولین بار توسط رادو معرفی شده است[2,3].

پایداری معادلات دیفرانسیل اولین بار توسط السیناو ژر مورد مطالعه قرار گرفت و بعدها توسط میوراوتاکاهاسی و همکاران [21,20,19,18] و همچنین توسط جونگ (۲۰۰۲) تعمیم داده شده است [14,13,12,11,10].

۲- پیش نیازها

۲-۱ تعریف. یک نرم مثلثی پیوسته یا به طور خلاصه $\boldsymbol{t}$–نرم پیوسته ($\boldsymbol{ct}$- نرم) یک نگاشتی مانند $*$ از $\boldsymbol{I} = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]^2$ به $\boldsymbol{I}$ است به طوری که:

۱. $\tau * \vartheta = \vartheta * \tau$ و $\tau * (v * \vartheta) = (t * v) * \vartheta$ برای هر $\tau, v, \vartheta \in I$،
۲. $\tau * 1 = \tau$ برای هر $\tau \in I$،
۳. $\tau * \vartheta \leq \vartheta * l$ که $\tau \leq \vartheta$ و $v \leq l$ برای هر $\tau, v, \vartheta, l \in I$. [25,7]

نمونه‌هایی از چنین $\boldsymbol{t}$- نرم‌ها عبارتند از:

۱. $\tau *_P v = \tau v$
۲. $\tau *_M v = min\{\tau, v\}$
۳. $\tau *_L v = max\{\tau + v - 1, 0\}$ (t–نرم لوکاسویچ)

۲-۲ تعریف. [9,1] فرض کنید $*$، **یک $\boldsymbol{t}$**–نرم پیوسته، $\mathbf{S}$ فضای خطی و $\boldsymbol{\eta}$ زیر مجموعه فازی از $\boldsymbol{S^k} \times (\mathbf{0}, \infty)$ به $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ باشد در این حالت سه تایی $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{\eta}, *)$ فضای خطی $\boldsymbol{k}$- نرم دار فازی نامیده می‌شود (یا به طورخلاصه $\boldsymbol{f - k - NLS}$) اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\eta(s_1, \dots, s_k, \tau) = 1$ برای همه $\tau > 0$ اگر و تنها اگر $s_1, \dots, s_k$ وابسته خطی باشند،
۲. $\eta(\alpha s_1, \dots, s_k, \tau) = \eta\left(s_1, \dots, s_k, \frac{\tau}{|\alpha|}\right)$ اگر $\alpha \neq 0$،
۳. $\eta(s_0 + s_1, \dots, s_k, \tau + \varsigma) \geq \eta(s_0, s_2 \dots, s_k, \tau) * \eta(s_1, s_2 \dots, s_k, \varsigma)$،
۴. $\eta(s_1, \dots, s_k, \tau)$ تحت هر جایگشت از $s_1, \dots, s_k \in S$ ثابت است،
۵. $\eta(s_1, \dots, s_k, .): (0, \infty) \to (0,1]$ پیوسته چپ است،
۶. $\lim_{\tau \to \infty} \eta(s_1, \dots, s_k, \tau) = 1$.

برای جزئیات بیشتر به مراجع [24,23,22,15,8,6] مراجعه کنید.

۲-۳ مثال. فرض کنید $(S, \|.,\dots,.\|)$ فضای k- نرمدار خطی باشد. مجموعه فازی η را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\eta(s_1,\dots,s_k,\tau) = \exp\left(-\frac{\|s_1,\dots,s_k\|}{\tau}\right)$$

برای $s_1,\dots,s_k \in S$ و $\tau \in (0,\infty)$. در این صورت سه تایی $(S,\eta,*)$ فضای خطی k- نرم دار فازی است.

۲-۴ قضیه. (نقطه ثابت لوگزامبورگ-جونگ) فرض کنید $(\sum,\delta)$ یک فضای متریک تعمیم یافته باشد و $\Lambda:\sum\to\sum$ یک تابع اکیداً انقباضی، با ثابت لیپشیتز $\beta<1$ باشد آنگاه به ازای هر $\sigma\in\sum$ یا به ازای هر $n\in N$،

$$\delta(\Lambda^n\sigma,\Lambda^{n+1}\sigma)=\infty.$$

یا $n_0\in N$ وجود دارد به طوری که:

۱. به ازای هر $n\ge n_0$، $\delta(\Lambda^n\sigma,\Lambda^{n+1}\sigma)<\infty$

۲. دنباله $\{\Lambda^n\sigma\}$به نقطه ثابت s^* از Λ همگراست،

۳. s^* یک نقطه ثابت منحصر به فرد از Λ در مجموعه $V=\{s\in\delta(\Lambda^{n_0}\sigma,s)<\infty\}$ است،

۴. $(1-\beta)\delta(s,s^*)\le\delta(s,\Lambda s)$.

برهان: مرجع [4].

۳- نتایج اصلی

پایداری هایرز -اولام- راسیاس در فضای خطی k - نرم دار فازی

۳-۱ قضیه. فرض کنید $\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbb{R}$ که در آن $0<p<q$ و $\rho=\mathbf{p}-\mathbf{q}$. فرض کنید $J=[p,q]$ و $m\in J$ انتخاب می‌کنیم و ثابت مثبتی مانند $\boldsymbol{\beta}$ در نظر می‌گیریم به‌طوری که $0<\rho\beta<1$ باشد. فرض کنید برای هر $\mathbf{v_j}\in\mathbf{J}$، $\boldsymbol{\upsilon}_\mathbf{j},\boldsymbol{\vartheta}_\mathbf{j}\in\mathbb{R}$ که $(j=1,\dots,k)$ و $\mathbf{t}>\mathbf{0}$ تابع پیوسته $\Gamma:J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در شرط لیپ شیتز صدق کند:

$$\eta\big(\Gamma(\nu_1,\upsilon_1)-\Gamma(\nu_1,\vartheta_1),\dots,\Gamma(\nu_k,\upsilon_k)-\Gamma(\nu_k,\vartheta_k),\rho\beta t\big)\ge\eta(\upsilon_1-\vartheta_1,\dots,\upsilon_k-\vartheta_k,t). \quad (۲)$$

اگر معادله شبه انتگرالی $\upsilon:J\to\mathbb{R}$ در شرط زیر برای هر $\nu_j\in J$ که $(j=1,2,\dots,k)$ و $t>0$ صدق کند:

$$\eta\Big(\upsilon(\nu_1)-\upsilon(m)-\int_m^{\nu_1}\Gamma\big(\tau,\upsilon(\tau)\big)d\tau,\dots,\upsilon(\nu_k)-\upsilon(m)-\int_m^{\nu_k}\Gamma\big(\tau,\upsilon(\tau)\big)d\tau,t\Big)\ge\varphi(\nu_1,\dots,\nu_k,t) \quad (۳)$$

که درآن $\varphi:J^k\times(0,\infty)\to(0,1]$ تابع کنترل فازی است و برای هر $\nu_j\in J$ که $(j=1,2,\dots,k)$ و $t>0$ داریم:

$$\inf_{\vartheta_j\in[m,\nu_j]}\varphi(\vartheta_1,\dots,\vartheta_k,t)\ge\varphi(\nu_1,\dots,\nu_k,t) \quad (۴)$$

در این صورت تابع پیوسته منحصر به فردی مانند $\upsilon_0:J\to\mathbb{R}$ موجود است به طوری که برای هر $\nu_j\in J$ که $(j=1,2,\dots,k)$ و $t>0$ داریم:

$$\upsilon_0(\nu_j)=\upsilon(m)-\int_m^{\nu_j}\Gamma\big(\tau,\upsilon_0(\tau)\big)d\tau \quad (۵)$$

υ_0 یک جواب معادله (۱) است و

$$\eta(\upsilon(\nu_1)-\upsilon_0(\nu_1),\dots\upsilon(\nu_k)-\upsilon_0(\nu_k),t)\ge\varphi(\nu_1,\dots,\nu_k,(1-\rho\beta)t). \quad (۶)$$

برهان: مجموعه $\sum$را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sum=\Big\{\sigma:J\to\mathbb{R}:\text{پیوسته }\sigma\Big\}. \quad (۷)$$

روی $\sum$ متر زیر را تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $\sigma,\varrho\in\sum$ باشد در این صورت داریم:

$$\delta(\sigma,\varrho)=inf\{M>0:\eta(\sigma(\nu_1)-\varrho(\nu_1),\dots,\sigma(\nu_k)-\varrho(\nu_k),Mt)\ge\varphi(\nu_1,\dots,\nu_k,t),\forall\nu_j\in J,t>0\} \quad (۸)$$

در [16] میهت و رادو ثابت کردند δ یک متر تعمیم یافته کامل است (همچنین [17] را ببینید).

حال نگاشت $\Lambda:\sum \to \sum$ را برای هر $\upsilon \in \sum$ با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\Lambda\upsilon)(\nu_j) = \upsilon(m) - \int_m^{\nu_j} \Gamma(\tau, \upsilon_0(\tau))d\tau \;(\nu_j \in J) \qquad (۹)$$

نشان می‌دهیم که Λ یک نگاشت انقباضی است. فرض کنید $\sigma, \varrho \in \sum$ و $\varepsilon = \varepsilon_{\sigma,\varrho} > 0$ یک عدد مثبت باشد به طوری که $\delta(\sigma, \varrho) \leq \varepsilon$ در نتیجه برای هر $\nu_j \in J$ که $(j = 1,2, \dots, k)$ و $t > 0$ داریم:

$$\eta(\sigma(\nu_1) - \varrho(\nu_1), \dots, \sigma(\nu_k) - \varrho(\nu_k), \varepsilon t) \geq \varphi(\nu_1, \dots, \nu_k, t)$$

فرض کنید $m = \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_3 = \nu_j$، $\tau_j \in [\mu_j, \mu_{j+1}]$، $\Delta s_j = \mu_j - \mu_{j+1} = \frac{\nu_j - m}{k}$ و $j = 1, \dots, k$.

با استفاده روابط (۲)، (۳)، (۸) و (۱۰) برای هر $\nu_j \in J$ که $(j = 1,2, \dots, k)$ و $t > 0$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\eta((\Lambda\sigma)(\nu_1) - (\Lambda\varrho)(\nu_1), \dots, (\Lambda\sigma)(\nu_k) - (\Lambda\varrho)(\nu_k), \varepsilon\rho\beta t) = \eta\Big(\int_m^{\nu_1}\{\Gamma(\tau, \sigma(\tau)) - \Gamma(\tau, \varrho(\tau))\}d\tau, \dots, \int_m^{\nu_k}\{\Gamma(\tau, \sigma(\tau)) - \Gamma(\tau, \varrho(\tau))\}d\tau, \varepsilon\rho\beta t\Big) \\
&= \eta\Big(\lim_{\|\Delta s_j\|\to 0} \sum_{j=1}^{k} \Big\{\Gamma\big(\tau_j, \sigma(\tau_j)\big) - \Gamma\big(\tau_j, \varrho(\tau_j)\big)\Big\}\Delta s_j, \dots, \lim_{\|\Delta s_j\|\to 0} \sum_{j=1}^{k} \Big\{\Gamma\big(\tau_j, \sigma(\tau_j)\big) - \Gamma\big(\tau_j, \varrho(\tau_j)\big)\Big\}\Delta s_j, \varepsilon\rho\beta t\Big) \\
&= \lim_{\|\Delta s_j\|\to 0} \eta\Big(\sum_{j=1}^{k} \Big\{\Gamma\big(\tau_j, \sigma(\tau_j)\big) - \Gamma\big(\tau_j, \varrho(\tau_j)\big)\Big\}\Delta s_j, \dots, \sum_{j=1}^{k} \Big\{\Gamma\big(\tau_j, \sigma(\tau_j)\big) - \Gamma\big(\tau_j, \varrho(\tau_j)\big)\Big\}\Delta s_j, \varepsilon\rho\beta t\Big) \\
&= \lim_{\|\Delta s_j\|\to 0} \wedge \eta\Big(\Gamma\big(\tau_j, \sigma(\tau_j)\big) - \Gamma\big(\tau_j, \varrho(\tau_j)\big), \dots, \Gamma\big(\tau_j, \sigma(\tau_j)\big) - \Gamma\big(\tau_j, \varrho(\tau_j)\big), \frac{\varepsilon\rho\beta t}{|\Delta s_j|k}\Big) \geq \wedge \eta\Big(\Gamma\big(\tau_j, \sigma(\tau_j)\big) - \Gamma\big(\tau_j, \varrho(\tau_j)\big), \dots, \Gamma\big(\tau_j, \sigma(\tau_j)\big) - \Gamma\big(\tau_j, \varrho(\tau_j)\big), \frac{\varepsilon\rho\beta t}{\rho}\Big) \\
&\geq \inf_{\tau_j \in [m, \nu_j]}\big(\sigma(\tau_j) - \varrho(\tau_j), \dots, \sigma(\tau_j) - \varrho(\tau_j), \varepsilon t\big) \geq \inf_{\tau_j \in [m, \nu_j]} \varphi(\tau_1, \dots, \tau_k, t) \geq \varphi(\nu_1, \dots, \nu_k, t).
\end{aligned}$$

در این صورت داریم $\delta(\Lambda\sigma, \Lambda\varrho) \leq \varepsilon\rho\beta$ در نتیجه برای هر $\sigma, \varrho \in \sum$ داریم $\delta(\Lambda\sigma, \Lambda\varrho) \leq \rho\beta\delta(\sigma, \varrho)$ و این نشان می‌دهد Λ نگاشت اکیدا انقباضی با ضریب لیپشیتز $\beta\rho \in (0,1)$ روی $\sum$ است. با استفاده ازروابط (۳) و (۹) نتیجه می‌گیریم $\delta(\Lambda\upsilon, \upsilon) \leq 1$ و در نتیجه

$$\delta(\Lambda^{n+1}\upsilon, \Lambda^n\upsilon) \leq (\rho\beta)^n < \infty.$$

پس شرایط قضیه ۲-۴ برقرار است در نتیجه داریم:

۱. Λ دارای نقطه ثابت υ_0 است به عبارت دیگر

$$\Lambda(\upsilon_0) = (\upsilon_0). \qquad (۱۱)$$

۲. $\delta(\Lambda^n\upsilon, \upsilon_0) \to 0$ وقتی $n \to \infty$.

۳. $\delta(\upsilon, \upsilon_0) \leq \frac{1}{1-\rho\beta}\delta(\upsilon, \Lambda\upsilon)$ و چون $\delta(\Lambda\upsilon, \upsilon) \leq 1$ در نتیجه برای هر $\nu_j \in J$ که $(j = 1,2, \dots, k)$ و $t > 0$ داریم:

$$\eta(\upsilon(\nu_1) - \upsilon_0(\nu_1), \dots \upsilon(\nu_k) - \upsilon_0(\nu_k), t) \geq \varphi(\nu_1, \dots, \nu_k, (1 - \rho\beta)t).$$

۳-۲ قضیه. فرض کنید J مساوی $(-\infty, q]$ یا $\mathbb{R}$ یا $[p, \infty)$ باشد که $p, q \in \mathbb{R}$. قرار می‌دهیم $m = p$ برای $J = [p, \infty)$ یا $m = q$ برای $J = (-\infty, q]$ یا اگر $J = \mathbb{R}$ باشد $m \in \mathbb{R}$ را ثابت قرار می‌دهیم. فرض کنید $0 < \beta < 1$ ثابت مثبت باشد و برای هر $\nu_j \in J$، $\upsilon_j, \vartheta_j \in \mathbb{R}$ که $(j = 1,2, \dots, k)$ و $t > 0$ نگاشت پیوسته $\Gamma: J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در رابطه (۲) صدق کند. حال اگر برای هر $\nu_j \in J$ معادله انتگرالی $\upsilon: J \to \mathbb{R}$ در شرط (۳) صدق کند که در آن $\varphi: J^k \times (0, \infty) \to (0,1]$ تابع کنترل فازی است و برای هر $\nu_j \in J$ که $(j = 1,2, \dots, k)$ و $t > 0$ در شرط (۴) صدق می‌کند. در این صورت تابع منحصر به فرد پیوسته $\upsilon_0: J \to \mathbb{R}$ موجود است که برای

هر $\nu_j \in J$ روابط (۵) و (۶) برقرار است.

برهان: برای حالت $J=\mathbb{R}$ ثابت می‌کنیم. برای هر $n \in \mathbb{N}$، تعریف می‌کنیم $J_n=[m-n,m+n]$. (برای $J=[-\infty,q]$ قرار می‌دهیم $J_n=[q-n,q]$ وبرای $J=[p,\infty)$ قرار می‌دهیم $J_n=[p,p+n]$) از قضیه۱-۳ نتیجه می‌گیریم که برای همه $\nu_j \in J_n$ تابع پیوسته منحصر به فرد $\upsilon_n: J_n \to \mathbb{R}$ موجود است به طوری که

$$\upsilon_n(\nu_j)=\upsilon(m)-\int_m^{\nu_j}\Gamma(\tau,\upsilon_n(\tau))d\tau \quad (۱۲)$$

و

$$\eta(\upsilon_n(\nu_1)-\upsilon_0(\nu_1),\dots\upsilon_n(\nu_k)-\upsilon_0(\nu_k),t)\geq\varphi(\nu_1,\dots,\nu_k,(1-\rho\beta)t) \quad (۱۳)$$

حال υ_n را به صورت زیر

$$\upsilon_n(\nu)=\upsilon_{n+1}(\nu)=\upsilon_{n+2}(\nu)=\cdots,\forall\nu\in\mathbb{R} \quad (۱۴)$$

و زیر دنباله زیر $n(\nu)=\wedge\{n\in\mathbb{N}|\nu\in J_n\}$ را در نظر می‌گیریم. حال $\upsilon_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\upsilon_0(\nu)=\upsilon_{n(\nu)}(\nu) \quad (۱۵)$$

با توجه به پیوستگی υ_n نتیجه می‌گیریم υ_0 پیوسته است.

حال نشان می‌دهیم تابع υ_0 برای هر $\nu\in\mathbb{R}$ در روابط (۵) و (۶) صدق می‌کند. فرض می‌کنیم $\nu\in\mathbb{R}$ باشد، $n(\nu)\in\mathbb{N}$ انتخاب می‌کنیم آنگاه بدست می‌آوریم $\nu\in J_{n(\nu)}$. با استفاده از روابط (۱۲)، (۱۳) و (۱۴) داریم

$$\upsilon_0(\nu)=\upsilon_{n(\nu)}(\nu)=\upsilon(m)-\int_m^{\nu}\Gamma\left(\tau,\upsilon_{n(\nu)}(\tau)\right)d\tau=\upsilon(m)-\int_m^{\nu}\Gamma(\tau,\upsilon_0(\tau))d\tau$$

و

$$\upsilon_{n(\nu)}(\nu)=\upsilon_{n(\tau)}(\tau)=\upsilon_0(\tau).$$

برای هر $\nu\in\mathbb{R}$ داریم $\nu\in J_{n(\nu)}$ است، پس با استفاده از روابط (۱۳) و (۱۵) داریم

$$\eta(\upsilon(\nu_1)-\upsilon_0(\nu_1),\dots\upsilon(\nu_k)-\upsilon_0(\nu_k),t)=\eta(\upsilon(\nu_1)-\upsilon_{n(\nu)}(\nu_1),\dots\upsilon(\nu_k)-\upsilon_{n(\nu)}(\nu_k),t)\geq\varphi(\nu_1,\dots,\nu_k,(1-\rho\beta)t).$$

در نهایت نشان می‌دهیم υ_0 منحصر به فرد است. تابع پیوسته دیگری مانند $\vartheta_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم که در روابط (۵) و (۶) صدق کند. فرض کنید $\nu\in\mathbb{R}$، چون $\upsilon_0|_{J_{n(\nu)}}(=\upsilon_{n(\nu)})$ و $\vartheta_0|_{J_{n(\nu)}}$ و هر دو برای همه $\nu\in J_{n(\nu)}$ در روابط (۵) و (۶) صدق می‌کنند، منحصر به فردی $\upsilon_{n(\nu)}=\upsilon_0|_{J_{n(\nu)}}$ بیان می‌کند.

$$\upsilon_0(\nu)=\upsilon_0|_{J_{n(\nu)}}(\nu)=\vartheta_0|_{J_{n(\nu)}}(\nu)=\vartheta_0(\nu).$$

پایداری هایرز–اولام در فضای خطی k – نرم‌دار فازی

۳-۳ قضیه. فرض کنید $m\in\mathbb{R}$، $\rho>0$ و $J=\{\nu\in\mathbb{R}|m-\rho\leq\nu\leq m+\rho\}$ فرض کنید برای هر $\nu_j\in J$، $\upsilon_j,\vartheta_j\in\mathbb{R}$ که $(j=1,2,\dots,k)$ و $t>0$ نگاشت پیوسته $\Gamma:J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در رابطه (۲) صدق کند و β ثابت مثبتی باشد که $0<\rho\beta<1$. فرض کنید برای هر $\nu_j\in J$ که $(j=1,2,\dots,k)$، $t>0$ و $\varepsilon>0$

$$\eta\left(\upsilon(\nu_1)-\upsilon(m)-\int_m^{\nu_1}\Gamma(\tau,\upsilon(\tau))d\tau,\dots,\upsilon(\nu_k)-\upsilon(m)-\int_m^{\nu_k}\Gamma(\tau,\upsilon(\tau))d\tau,t\right)\geq1-\varepsilon \quad (۱۶)$$

که $\upsilon:J\to\mathbb{R}$ معادله شبه انتگرالی است.

در این صورت برای هر $\nu_j\in J$ که $(j=1,2,\dots,k)$ و $t>0$ تابع پیوسته منحصر به فردی مانند $\upsilon_0:J\to\mathbb{R}$ موجود است به طوری که در رابطه (۵) صدق کند و

$$\eta\left(\upsilon(\nu_1)-\upsilon_0(\nu_1),\dots\upsilon(\nu_k)-\upsilon_0(\nu_k),\frac{t}{1-\rho\beta}\right)\geq1-\varepsilon.$$

برهان: مجموعه $\sum$ را به صورت زیر تعریف

می‌کنیم:

$$\sum = \{\sigma: J \to \mathbb{R}: \text{پیوسته } \sigma\}.$$

روی $\sum$ تابع زیر را تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $\sigma, \varrho \in \sum$ باشد در این صورت داریم:

$$\delta(\sigma,\varrho) = inf\{M > 0: \eta(\sigma(\nu_1) - \varrho(\nu_1), \dots, \sigma(\nu_k) - \varrho(\nu_k), Mt) \geq 1 - \varepsilon, \forall \nu_j \in J, t > 0\}.$$

در [16] میهت و رادو ثابت کردند δ یک متر تعمیم یافته کامل است (همچنین [17] را ببینید).

حال نگاشت $\Lambda: \sum \to \sum$ را برای هر $\upsilon \in \sum$ با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\Lambda\upsilon)(\nu_j) = \upsilon(m) - \int_m^{\nu_j} \Gamma(\tau, \upsilon_0(\tau))d\tau \ (\nu_j \in J) \qquad (۱۷)$$

نشان می‌دهیم که Λ یک نگاشت انقباضی است. فرض کنید $\sigma, \varrho \in \sum$ و $\xi = \xi_{\sigma,\varrho} > 0$ یک عدد مثبت باشد به طوری که $\delta(\sigma,\varrho) \leq \xi$ در نتیجه برای هر $\nu_j \in J$ که $(j = 1,2,\dots,k)$ و $t > 0$ داریم:

$$\eta(\sigma(\nu_1) - \varrho(\nu_1), \dots, \sigma(\nu_k) - \varrho(\nu_k), \xi t) \geq 1 - \varepsilon. \qquad (۱۸)$$

فرض کنید $m = \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_3 = \nu_j$، $\tau_j \in [\mu_j, \mu_{j+1}]$ $\Delta s_j = \mu_j - \mu_{j+1} = \frac{\nu_j - m}{k}, j = 1,2,\dots,k$ با استفاده (۲)، (۳)، (۸) و (۱۰) برای هر $\nu_j \in J$ که $(j = 1,2,\dots,k)$ و $t > 0$ داریم:

$$\eta\Big((\Lambda\sigma)(\nu_1) - (\Lambda\varrho)(\nu_1), \dots, (\Lambda\sigma)(\nu_k) - (\Lambda\varrho)(\nu_k), \xi\rho\beta t\Big) = \eta\Big(\int_m^{\nu_1}\{\Gamma(\tau,\sigma(\tau)) - \Gamma(\tau,\varrho(\tau))\}d\tau, \dots, \int_m^{\nu_k}\{\Gamma(\tau,\sigma(\tau)) - \Gamma(\tau,\varrho(\tau))\}d\tau, \xi\rho\beta t\Big)$$
$$= \eta\Big(\lim_{\|\Delta s_j\|\to 0}\sum_{j=1}^{k}\Big\{\Gamma\big(\tau_j,\sigma(\tau_j)\big) - \Gamma\big(\tau_j,\varrho(\tau_j)\big)\Big\}\Delta s_j, \dots, \lim_{\|\Delta s_j\|\to 0}\sum_{j=1}^{k}\Big\{\Gamma\big(\tau_j,\sigma(\tau_j)\big) - \Gamma\big(\tau_j,\varrho(\tau_j)\big)\Big\}\Delta s_j, \xi\rho\beta t\Big)$$
$$= \lim_{\|\Delta s_j\|\to 0}\eta\Big(\sum_{j=1}^{k}\Big\{\Gamma\big(\tau_j,\sigma(\tau_j)\big) - \Gamma\big(\tau_j,\varrho(\tau_j)\big)\Big\}\Delta s_j, \dots, \sum_{j=1}^{k}\Big\{\Gamma\big(\tau_j,\sigma(\tau_j)\big) - \Gamma\big(\tau_j,\varrho(\tau_j)\big)\Big\}\Delta s_j, \xi\rho\beta t\Big) =$$
$$\lim_{\|\Delta s_j\|\to 0}\Lambda\eta\Big(\Gamma\big(\tau_j,\sigma(\tau_j)\big) - \Gamma\big(\tau_j,\varrho(\tau_j)\big), \dots, \Gamma\big(\tau_j,\sigma(\tau_j)\big) - \Gamma\big(\tau_j,\varrho(\tau_j)\big), \frac{\xi\rho\beta t}{|\Delta s_j|k}\Big)$$
$$\geq \Lambda\eta(\Gamma\big(\tau_j,\sigma(\tau_j)\big) - \Gamma\big(\tau_j,\varrho(\tau_j)\big), \dots, \Gamma\big(\tau_j,\sigma(\tau_j)\big) - \Gamma\big(\tau_j,\varrho(\tau_j)\big), \xi\beta t)$$
$$\geq \inf_{\tau_j \in [m,\nu_j]}\eta\big(\sigma(\tau_j) - \varrho(\tau_j), \dots, \sigma(\tau_j) - \varrho(\tau_j), \xi t\big) \geq 1 - \varepsilon$$

در این صورت داریم $\delta(\Lambda\sigma, \Lambda\varrho) \leq \xi\rho\beta$ در نتیجه برای هر $\sigma, \varrho \in \sum$ داریم $\delta(\Lambda\sigma, \Lambda\varrho) \leq \rho\beta\delta(\sigma,\varrho)$ و این نشان می‌دهد Λ نگاشت اکیدا انقباضی با ضریب لیپشیتز $\rho\beta \in (0,1)$ روی $\sum$ است. با استفاده ازروابط (۳) و (۹) نتیجه می‌گیریم $\delta(\Lambda\upsilon, \upsilon) \leq 1$.

در نتیجه $\delta(\Lambda^{n+1}\upsilon, \Lambda^n\upsilon) \leq (\rho\beta)^n < \infty$.

پس شرایط قضیه ۲-۴ برقرار است در نتیجه داریم:

۱. Λ دارای نقطه ثابت υ_0 است به عبارت دیگر

$$\Lambda(\upsilon_0) = (\upsilon_0). \qquad (۱۹)$$

۲. $\delta(\Lambda^n\upsilon, \upsilon_0) \to 0$ وقتی $n \to \infty$.

۳. $\delta(\upsilon, \upsilon_0) \leq \frac{1}{1-\rho\beta}\delta(\upsilon, \Lambda\upsilon)$

و چون $\delta(\Lambda\upsilon, \upsilon) \leq 1$ در نتیجه برای هر $\nu_j \in J$ که $(j = 1,2,\dots,k)$ و $t > 0$ داریم:

$$\eta\Big(\upsilon(\nu_1) - \upsilon_0(\nu_1), \dots \upsilon(\nu_k) - \upsilon_0(\nu_k), \frac{t}{1-\rho\beta}\Big) \geq 1 - \varepsilon.$$

۴ – مثال‌ها

۱-۴ مثال. فرض کنید $0 < \beta < 1$ برای $0 < \varepsilon < 2\beta$، قرار می‌دهیم $\boldsymbol{\rho = 2\beta - \varepsilon}$. فرض کنید $\boldsymbol{J = [0, 2\beta - \varepsilon]}$ فرض کنید $\boldsymbol{p(\nu)}$ **تابع** چندجمله‌ای و $\boldsymbol{\upsilon}: \mathbf{J} \to \mathbb{R}$ تابع دیفرانسیل

پیوسته‌ای باشد به طوری که برای هر $\mathbf{\nu_j \in J}$ که $\boldsymbol{(j = 1,2, \dots, k)}$ و $\mathbf{t > 0}$ داریم:

$$\eta\left(\upsilon(\nu_1) - \upsilon(m) - \int_m^{\nu_1}\{\beta\upsilon(\tau) - p(\tau)\}d\tau, \dots, \upsilon(\nu_k) - \upsilon(m) - \int_m^{\nu_k}\{\beta\upsilon(\tau) - p(\tau)\}d\tau, t\right) \geq \exp\left(-\frac{|\nu_1,\dots,\nu_k|}{t}\right).$$

اگر قرار دهیم $\Gamma(\nu,\upsilon) = \beta\upsilon - p(\nu)$ و

$$\varphi(\nu_1,\dots,\nu_k,t) = \exp\left(-\frac{|\nu_1,\dots,\nu_k|}{t}\right)$$

بنابراین برای هر $\nu_j \in J$ که $(j=1,2,\dots,k)$ و $t>0$

$$\inf_{\vartheta_j\in[m,\nu_j]} \varphi(\vartheta_1,\dots,\vartheta_k,t) \geq \varphi(\nu_1,\dots,\nu_k,t).$$

در نتیجه طبق قضیه ۳-۳ تابع پیوسته منحصر به فردی مانند $\upsilon_0: J\to\mathbb{R}$ موجود است به طوری که برای همه $\nu_j\in J$ و $t>0$ داریم:

$$\upsilon_0(\nu_j) = \upsilon(0) - \int_0^{\nu_j}\{\beta\upsilon_0(\tau) - p(\tau)\}d\tau$$

و

$$\eta(\upsilon(\nu_1)-\upsilon_0(\nu_1),\dots\upsilon(\nu_k)-\upsilon_0(\nu_k),t) \geq \exp\left(-\frac{|\nu_1,\dots,\nu_k|}{(1-\rho\beta)t}\right).$$

۴-۲ مثال. فرض کنید $p>1$، $0<\beta<\ln a$ و $J=[p,\infty]$ باشد. فرض کنید $p(\nu)$ تابع چند جمله‌ای و $\upsilon: J\to\mathbb{R}$ تابع دیفرانسیل پیوسته‌ای باشد به‌طوری که برای هر $\nu_j\in J$ و $t>0$ داریم:

$$\eta\left(\upsilon(\nu_1) - \upsilon(m) - \int_m^{\nu_1}\{\beta\upsilon(\tau) - p(\tau)\}d\tau, \dots, \upsilon(\nu_k) - \upsilon(m) - \int_m^{\nu_k}\{\beta\upsilon(\tau) - p(\tau)\}d\tau, t\right) \geq \exp\left(-\frac{a^{\nu_1,\dots,\nu_k}}{t}\right).$$

اگر قرار دهیم $\Gamma(\nu,\upsilon) = \beta\upsilon - p(\nu)$ و

$$\varphi(\nu_1,\dots,\nu_k,t) = \exp\left(-\frac{a^{\nu_1,\dots,\nu_k}}{t}\right)$$

بنابراین برای هر $\nu_j \in J$ که $(j=1,2,\dots,k)$ و $t>0$ داریم:

$$\inf_{\vartheta_j\in[m,\nu_j]} \varphi(\vartheta_1,\dots,\vartheta_k,t) \geq \varphi(\nu_1,\dots,\nu_k,t)$$

در نتیجه طبق قضیه ۲-۳ برای هر $\nu_j\in J$ و $t>0$ تابع پیوسته منحصر به فردی مانند $\upsilon_0: J\to\mathbb{R}$ موجود است به طوری که

$$\upsilon_0(\nu_j) = \upsilon(0) - \int_0^{\nu_j}\{\beta\upsilon_0(\tau) - p(\tau)\}d\tau$$

و

$$\eta(\upsilon(\nu_1)-\upsilon_0(\nu_1),\dots\upsilon(\nu_k)-\upsilon_0(\nu_k),t) \geq \exp\left(-\frac{a^{\nu_1,\dots,\nu_k}}{(\ln a-\rho\beta)t}\right).$$

۴-۳ مثال. فرض کنید ρ,β ثابت‌های مثبتی باشند به طوری که $0<\rho\beta<1$. برای $m\in\mathbb{R}$، تعریف می‌کنیم $J=\{\nu\in\mathbb{R}|m-\rho\leq\nu\leq m+\rho\}$ فرض کنید $p(\nu)$ تابع چند جمله‌ای و $\upsilon: J\to\mathbb{R}$ تابع دیفرانسیل پیوسته‌ای باشد به طوری که برای هر $\nu_j\in J$ و $t>0$ که $\varepsilon\geq 0$ داریم:

$$\eta\left(\upsilon(\nu_1) - \upsilon(m) - \int_m^{\nu_1}\{\beta\upsilon(\tau) - p(\tau)\}d\tau, \dots, \upsilon(\nu_k) - \upsilon(m) - \int_m^{\nu_k}\{\beta\upsilon(\tau) - p(\tau)\}d\tau, t\right) \geq 1-\varepsilon .$$

قضیه ۳-۳ بیان می‌کند که برای هر $\nu_j\in J$ و $t>0$ تابع پیوسته منحصر به فردی مانند $\upsilon_0: J\to\mathbb{R}$ موجود است به طوری که:

$$\upsilon_0(\nu_j) = \upsilon(m) - \int_m^{\nu_j}\{\beta\upsilon_0(\tau) - p(\tau)\}d\tau$$

و

$$\eta\left(\upsilon(\nu_1)-\upsilon_0(\nu_1),\dots\upsilon(\nu_k)-\upsilon_0(\nu_k),\frac{t}{1-\rho\beta}\right) \geq 1-\varepsilon.$$

فهرست منابع

[1] Bakery, A. and Mustafa, M. “On lacunary mean ideal convergence in generalized random n-normed spaces”, Abstract and Applied Analysis, 4, (2014), pp. 1-11.

[2] Cădariu, L. and Radu, V. “Fixed points the stability of Jensen's functional equation”, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematical, 4, (2003), 7 pages.

[3] Cădariu, L. and Radu, V. "On the stability of the Cauchy functional equation: a fixed point approach”, Journal of Grazer Mathmatische Berichte, 364, (2004), pp. 43-52.

[4] Diaz, J. B. and Margolis, B. " A fixed point theorem of the alternative, for contractions on a generalized complete metric space”, Journal Bullthe of etin American Mathematical Society, 74, (1968), pp. 305-309.

[5] El-Moneam, A. M., Ibrahim, T. and Elamody, S. “Stability of a fractional difference equation of high order”, Journal of Nonlinear Sciences and Application, 12, (2019), pp65-74.

[6] Font, J. J., Galindo, J., Macario, S. and Sanchis, M. “Mazur- Ulam type theorem for fuzzy normed space”, Journal of Nonlinear Sciences and Application, 10, (2017), pp. 4499-4506.

[7] Hadzic, O. and Pap, E. “A fixed point theorem for multivalued mappings in probabilistic metric spaces and an application in fuzzy metric spaces”, Fuzzy Sets and Systems, 127 (3), (2002), pp. 333-344.

[8] Hazarika, B. and Savaş, E.” λ-statistical convergence in n-normed spaces”, Analele Stiințifice ale Universitatii "Ovidius" Constanțs, 21 , (2013), .pp 141-153.

[9] Jebril, I. and Hatamleh, R. "Random n-normed linear space", International Journal of Open Problems in Computer Sciences and Mathematics, 2, (2009), .pp 489-495.

[10] Jung, S. M. “Hyers-Ulam-Rassias stability of isometries on restricted domains”, Nonlinear Studies, 8 (1), (2001), pp. 125-134.

[11] Jung, S. M. “A fixed point approach to the stability of linear differential equation $y^{'} = F(x, y)$”, Journal Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 33, (2010), pp. 47-56.

[12] Jung, S. M. “Approximate solutions of linear differential equation of third order”, Journal Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 35, (2012), pp. 1063-1073.

[13] Jung, S. M. and Rezaei, H. “A fixed point Approach to the stability of linear differential equation”, Journal of Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 38, (2015), pp. 855-865.

[14] Jung, S. M., Roh, J. and Lee, J. “Optimal Hyers-Ulam's constant for the linear differential equations”, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematical, (2016), 7 pages.

holomorphic mapping", Tamsui Oxford Journal of Mathematical Inequalities, 3, (2007), pp. 377-385.

[22] Nšdăban, S., Bĭnzar, T. and Tudor, P.F. "Some fixed point theorems for φ-contractive mappings in fuzzy normed linear spaces". Journal of Nonlinear Sciences and Application, 10, (2017), pp. 5668-5676.

[23] Savaş, E. "Some new double sequence spaces defined by Orlicz function in n-normed space". Journal of Inequalities and Application Mathematical, Art.ID 592840, (2011), 9 pages.

[24] Savaş, E. and Gürdal, M. "Generalized statistically convergent sequences of functions in fuzzy 2-normed spaces", Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 27, (2014), pp. 2067-2075.

[25] Schweizer, B., Sherwood, H. and Tradiff, R. M. "Contractions on probabilistic metric spaces: examples and counterexamples", Stochastica, 12 (1), (1988), pp. 5-17.

[15] Khan, M., Singh, Y. M. G. and Postolache, M. "Mazur-Ulam type theorems for fuzzy normed space", Journal of Mathematics and Computer Science, 18, (2018), pp. 132-145.

[16] Miheţ, D. and Radu, V. "On the stability of the additive Cauchy functional equation in random normed spaces", Journal of Mathematical Analysis and Application, 343, (2008), pp. 567-572.

[17] Miheţ,D. and Saadati, R. "On the stability of the additive Cauchy functional equation in random normed spaces", of Journal Applied Mathematics Letters, 24, (2011), pp. 2005-2009.

[18] Miura, T., Hirasawa, G., Takahasi, S. E. and Hayata, T. "A characterization of the stability of a system of the Banach space valued differential equations", Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 16, (2013), pp. 717-728.

[19] Miura, T. and Hirasawa, G. "Functional equations in mathematical analysis", Springer Optimization and its Applications, New York, (2012), pp. 191-199.

[20] Miura, T., Takahasi, S. E., Takahiro, T. H. and Tanahashi, K. "Stability of the Banach space valued Chebyshev differential equation", Journal of Applid Mathematics Letters, 25, (2012), pp. 1976-1979.

[21] Miura, T., Takahasi, S. E., Oka, H. and Niwa, N. "Hyers-Ulam stability of the first order linear differential equations for Banach space-valued