دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و سوم، آذر و دی ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

در باب nse بعضی گروه‌های خاص

بهاره اسدیان[۱]، ندا آهنجیده[۲]*

[۱و۲] گروه ریاضی محض (جبر)، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۱/۲۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۲/۱۶

چکیده

برای گروه G، گیریم nse(G) نشان‌دهنده مجموعه تعداد عناصر از مرتبه مشابه در G باشد. در این مقاله، نشان می‌دهیم برای یک گروه متناهی و فروبنیوس G با ساختار مشخص و گروه دلخواه L، اگر $nse(G)=nse(L)$، آنگاه $G \cong L$. همچنین با استفاده از عناصر مجموعه nse، محک جدیدی برای تشخیص گروه‌های پوچ‌توان ارائه می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: مجموعه nse، گروه‌های فروبنیوس، گروه‌های ۲-فروبنیوس، گروه‌های پوچ‌توان.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: ahanjideh.neda@sci.sku.ac.ir

۱- مقدمه

در این مقاله، G و S گروه‌هایی متناهی و p یک عدد اول است. $|G|$ مرتبه گروه G، $\pi(G)$ مجموعه شمارنده‌های اول $|G|$ و $\omega(G)$ مجموعه مرتبه عنصرهای گروه G می‌باشد. $m_i(G)$ تعداد عناصر از مرتبه i در G و $nse(G) := \{m_i(G): i \in \omega(G)\}$ تعریف می‌شود. قرار می‌دهیم:

$$M_t(G) := \{g \in G: g^t = 1\}.$$

گروه‌های G و S از نوع مرتبه مشابه نامیده می‌شوند اگروتنها اگر $|M_t(G)| = |M_t(S)|$, $t = 1,2, \ldots$. اگر G و S گروه‌هایی از نوع مرتبه مشابه باشند، آنگاه $|G| = |S|$, $\omega(G) = \omega(S)$ و $nse(G) = nse(S)$. مسئله‌ی مهمی که در رابطه با گروه‌هایی از نوع مرتبه مشابه مطرح می‌شود، مسئله‌ی تامپسون [۸، مسئله ۱۲٫۳۷] است، گیریم:

$$T(G) = \{(n, m_n): n \in \omega(G), m_n \in nse(G)\}$$

که m_n تعداد عناصر از مرتبه n در گروه G و $T(G) = T(S)$. اگر S گروهی حل‌پذیر باشد، آنگاه لزوماً G گروهی حل‌پذیر است؟

بدیهی است که اگر $T(G) = T(S)$، آنگاه $\omega(G) = \omega(S)$. مسئله‌ی تامپسون از جهات مختلف مورد بررسی قرار گرفته است، اما تاکنون کسی موفق به حل آن در حالت کلی نشده است. به طور مثال در [۷]، گروه $L_2(q)$ برای مقادیر خاص q توسط مجموعه nse مورد بررسی قرار گرفت. در [۱۰] ثابت شد که اگر S و G از نوع مرتبه مشابه باشند و S پوچ‌توان باشد، آنگاه G نیز پوچ‌توان است. در این مقاله، محک جدیدی برای بررسی پوچ‌توانی گروه‌ها اثبات می‌شود که در ادامه به آن خواهیم پرداخت.

قضیه ۱. گروه متناهی G پوچ‌توان است اگر و تنها اگر برای هر دو شمارنده‌ی اول u و t از $|G|$ و اعداد طبیعی i و j داشته باشیم،

$$m_{t^i.u^j}(G) = m_{t^i}(G).m_{u^j}(G).$$

گراف اول $\Gamma(G)$ از گروه G گرافی است با مجموعه رئوس $\pi(G)$ که دو رأس r و s مجاورند هرگاه G شامل عنصری از مرتبه rs باشد. اگر $\Gamma(G)$ گرافی ناهمبند باشد آنگاه t(G) تعداد مؤلفه‌های همبندی و OC(G) مرتبه مؤلفه‌های همبندی گروه G نامیده می‌شوند. مجموعه مرتبه مؤلفه‌های همبندی گروه‌های ساده با گراف اول ناهمبند در [۹] و [۱۳] قابل مشاهده می‌باشند.

با توجه به مسئله تامپسون، یافتن مجموعه‌ی nse گروه‌های متناهی از بسیاری جهات، حائز اهمیت است. در این مقاله، در گزاره‌های ۳- ۳- و ۳- ۴- خواهیم دید که می‌توان مجموعه nse گروه‌های مهمی مانند گروه‌های فروبنیوس و ۲-فروبنیوس را محاسبه نمود. در حالت خاص، ثابت خواهیم کرد:

قضیه ۲. فرض کنیم G گروهی فروبنیوس باشد که هسته‌ی آن یک ۱۱-گروه آبلی مقدماتی از مرتبه ۱۱[۲] و مکمل آن با گروه $SL_2(5)$ یکریخت است. اگر L گروهی دلخواه باشد که $nse(G) = nse(L)$، آنگاه $G \cong L$.

برای زیرگروه H از G، $C_G(H)$ مرکزساز زیرگروه H در G است. برای $p \in \pi(G)$، نماد $S_p(G)$ p- زیرگروه سیلوی G، $Syl_p(G)$ مجموعه‌ی p- زیرگروه‌های سیلو و n_p تعداد p- زیرگروه‌های سیلوی G را نشان می‌دهد.

از نماد $\alpha|n$ وقتی α شمارنده n و $|n|_\alpha = \alpha^e$ (برای عدد اول α) وقتی $\alpha^e \| n$ یعنی $\alpha^e | n$ اما $\alpha^{e+1} \nmid n$ استفاده می‌کنیم. از نماد φ برای تابع اویلر یک عدد استفاده می‌شود.

گروه دوری از مرتبه n را با $\mathbb{Z}_n$، گروه متقارن و گروه متناوب از درجه n را به ترتیب با $Sym(n)$ و $Alt(n)$ نشان می‌دهیم.

۲- پیش‌نیازها و مقدمات

لم ۲- ۱. [۶] فرض کنیم G گروهی فروبنیوس با مکمل H و هسته K باشد. در این صورت داریم:

(الف) K گروهی پوچ‌توان است؛

(ب) $|K| \equiv 1\ (mod|H|)$؛

(ج) هر زیرگروه H از مرتبه pq که p و q اولند، دوری است. در حالت خاص، هر زیرگروه سیلوی H از مرتبه فرد دوری است و ۲- زیرگروه سیلوی H، دوری یا تعمیم گروه کواترنیون است؛

(د) $t(G) = 2$ و $OC(G) = \{|H|, |K|\}$؛

(ه) $K = \left(G - \cup_{g\in G} H^g\right) \cup \{1\}$؛

(و) برای هر $g \in G - H$ ،$H^g \cap H = \{1\}$؛

(ی) اگر H گروه غیر حل‌پذیر باشد، آنگاه H دارای زیرگروه از اندیس حداکثر ۲ و یکریخت با $Z \times SL_2(5)$ می‌باشد که Z دارای p- زیرگروه‌های سیلوی دوری است. به‌علاوه $\pi(Z) \cap \{2,3,5\} = \emptyset$ و $15 \notin \omega(H)$.

لم ۲- ۲. [۳] فرض کنیم G گروهی ۲-فروبنیوس باشد یعنی دارای سری نرمال $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ است به‌طوری‌که K و G/H گروه‌های فروبنیوس به ترتیب با هسته‌های H و K/H می‌باشند. در این صورت، G/K و K/H گروه‌های دوری هستند و

$$|G/K|\,\big|\,|K/H| - 1, G/K \le Aut\left(\frac{K}{H}\right).$$

لم ۲- ۳. [۱۱] فرض کنیم G گروهی با بیش از دو عضو باشد. اگر:

$$s = Sup\{m_k : k \in \omega(G)\},$$

آنگاه G یک گروه متناهی است که $|G| \le s(s^2-1)$.

لم ۲- ۴. [۱] برای گروه متناهی G :

(۱) اگر $n\,\big|\,|G|$، آنگاه $n \mid \sum_{s|n} m_s$؛

(۲) اگر $n \in \omega(G)$، آنگاه $m_n = \phi(n)k$، که k تعداد زیرگروه‌های دوری از مرتبه n در G می‌باشد. در حالت خاص، $\phi(n) | m_n$.

(۳) فرض کنیم $P \in Syl_p(G)$ گروه دوری باشد. در این صورت $m_{|P|} = n_p(G)\phi(|P|)$.

(۴) اگر $nse(G)$ شامل عضو فرد α باشد، در این صورت $2 \in \pi(G)$ و $m_2(G) = \alpha$.

اثبات. برای اثبات قسمت‌های ۱ تا ۳ به [۱] مراجعه شود.

برای قسمت (۴)، اگر $s \in \pi(G) - \{2\}$، آنگاه چون $\varphi(s)$ عددی زوج است، $m_s(G)$ نیز عددی زوج خواهد بود. α عددی فرد است و طبق قسمت (۱) $2 | 1 + m_2(G)$. بنابراین $m_2(G) = \alpha$ و اثبات کامل است.

تعریف ۲- ۵. گروه G را k_n -گروه می‌نامیم هرگاه $n = |\pi(G)|$. اگر G یک گروه ساده و $|\pi(G)| = n$، آنگاه گروه G را یک k_n -گروه ساده می‌نامیم.

لم ۲- ۶. [۵] اگر G یک k_3 -گروه ساده باشد، آنگاه G با یکی از گروه‌های A_5، A_6، $L_2(7)$، $L_2(8)$، $L_2(17)$، $L_3(3)$، $U_3(3)$، $U_4(2)$ یکریخت می‌باشد.

لم ۲- ۷. [۲] اگر G یک k_4 -گروه ساده باشد، آنگاه G با یکی از گروه‌های زیر یکریخت می‌باشد:

(۱) A_7، A_8، A_9، A_{10}، M_{11}، M_{12}، J_2، $L_2(16)$، $L_2(25)$، $L_2(49)$، $L_2(81)$، $L_3(4)$، $L_3(5)$، $L_3(7)$، $L_3(8)$، $L_3(17)$، $L_4(3)$، $S_4(4)$، $S_4(5)$، $S_4(7)$، $S_4(9)$، $S_6(2)$، $O_8^+(2)$، $G_2(3)$، $U_3(4)$، $U_3(5)$، $U_3(7)$، $U_3(8)$، $U_3(9)$، $U_4(3)$، $U_5(2)$، $Sz(8)$، $Sz(32)$، ${}^3D_4(2)$، $F_4(2)'$؛

(۲) $L_2(r)$، که r عددی اول است که $r^2-1=2^a3^b.\upsilon^c$ و $a,b,c\geq 1$. همچنین $\upsilon>3$ عددی اول است؛

(۳) $L_2(2^m)$، که $m\geq 5$ به طوری که $2^m-1=u$ و $2^m+1=3t^b$، که u و t اعدادی اول هستند که $t>3$ و $b\geq 1$؛

(۴) $L_2(3^m)$، که $m\geq 3$ به طوری که $3^m+1=4t$، $3^m-1=2u^c$ یا $3^m+1=4t^b$، $3^m-1=2u$ می‌باشد که u و t اعداد اولی هستند که $b,c\geq 1$.

لم ۲- ۸. [۱۲] اگر s، t و u اعضای متمایز $\pi(G)$ باشند و $tu,ts,us\notin\omega(G)$، آنگاه G حل‌پذیر نیست.

۳- اثبات نتایج

اثبات قضایای ۱ و ۲ نیاز به ارائه و اثبات چند لم و گزاره دارد که در ادامه آورده خواهند شد.

لم ۳- ۱. اگر G گروهی پوچ‌توان باشد و $t,s\in\omega(G)$ که $gcd(t,s)=1$، آنگاه:

$$m_{st}(G)=\sum_{\alpha\in G:o(\alpha)=t}m_s\left(C_G(\alpha)\right).$$

اثبات. فرض کنیم $\left\{x_1,\dots,x_{m_t(G)}\right\}$ مجموعه عناصر از مرتبه t در G باشند. برای هر عنصر $x\in G$ از مرتبه st $1\leq i\leq m_t(G)$ وجود دارد که $y_i\in C_G(x_i)$ از مرتبه s باشد و $x=x_iy_i$. اگر $x_iy_i=x_jy_j$ که $1\leq i,j\leq m_t(G)$، آنگاه چون $o(y_i^{-1}y_i)=o(x_i^{-1}x_j)$ مقدار $gcd(t,s)=1$ را عاد می‌کند، پس $x_i=x_j$ و $y_i=y_j$ بنابراین داریم:

$$m_{st}(G)=|\{(x,y):o(x)=t,y\in C_G(x),o(y)=s\}|$$
$$=\sum_{\alpha\in G\ s.t.\ o(\alpha)=t}m_s\left(C_G(\alpha)\right).$$

بدین ترتیب، اثبات کامل می‌گردد.

حال با استفاده از لم ۳- ۱-، قضیه ۱ را اثبات می‌کنیم.

اثبات قضیه ۱. فرض کنیم G گروهی پوچ‌توان و u و t شمارنده‌های اولی از $|G|$ باشند. در این صورت:

$$m_{t^i.u^j}(G)=\sum_{\alpha\in G\ s.t.\ o(\alpha)=t^i}m_{u^j}\left(C_G(\alpha)\right)=\sum_{\alpha\in S_t(G)\ s.t.\ o(\alpha)=t^i}m_{u^j}\left(C_G(\alpha)\right).\qquad (۱)$$

چون G پوچ‌توان است و $gcd(t,u)=1$ داریم $n_u(G)=1$ و $S_u(G)\leq C_G\left(S_t(G)\right)$. بنابراین (۱) ایجاب می‌کند که:

$$m_{t^i.u^j}(G)=\sum_{\alpha\in S_t(G)\ s.t.\ o(\alpha)=t^i}m_{u^j}(G)=m_{t^i}(G).m_{u^j}(G).$$

به طور عکس، فرض کنیم که برای هر دو شمارنده اول t و u از $|G|$ داشته باشیم:

$$m_{t^i.u^j}(G)=m_{t^i}(G).m_{u^j}(G).\qquad (۲)$$

بدون کاسته شدن از کلیت، می‌توان فرض کرد که $t^i,u^j\in\omega(G)$. واضح است که برای هر $\alpha\in G$ داریم $m_{u^j}\left(C_G(\alpha)\right)\leq m_{u^j}(G)$. بنابراین (۲) ایجاب می‌کند که برای هر $\alpha\in G$ که $o(\alpha)=t^i$، $m_{u^j}(G)=m_{u^j}\left(C_G(\alpha)\right)$. این نتیجه نشان می‌دهد که هر عنصر از مرتبه u^j در $C_G(\alpha)$ قرار می‌گیرد که α عنصر دلخواهی از G ازمرتبه t^i می‌باشد. بنابراین هر دو عنصر از مرتبه‌های t^i و u^j با هم جابجا می‌شوند. لذا مرکزساز t- سیلو زیرگروه T از G شامل همه t'- عنصرهای G باشد و بنابراین T زیرگروه نرمال G است. پس هر زیرگروه سیلوی گروه G در G نرمال است و این معادل است با این‌که G گروهی پوچ‌توان می‌باشد.

لم ۳- ۲. فرض کنیم G گروهی متناهی با زیرگروه نرمال N باشد. اگر برای $t\in\omega(G)$،

$gcd(t, |G/N|) = 1$ آنگاه $m_t(G) = m_t(N)$.

اثبات. با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم که $m_t(G) \neq m_t(N)$. بنابراین G شامل یک عنصر x از مرتبه t می‌باشد که $x \notin N$ بنابراین $N \neq xN \in G/N$ و $o(xN)$ عدد $gcd(o(x), |G/N|) = gcd(t, |G/N|) = 1$ را می‌شمارد که این یک تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

گزاره ۳- ۳. فرض کنیم G گروهی فروبنیوس با هسته K و متمم H باشد. اگر $t \in \omega(G)$، آنگاه یکی از حالات زیر رخ خواهد داد:

(الف) $t||H|$ و $m_t(G) = |K|.m_t(H)$؛

(ب) $t||K|$ و $m_t(G) = m_t(K)$. به‌علاوه $|H||m_t(G)$.

اثبات. با توجه به فرض، بنا بر لم ۲- ۱ (د) داریم $OC(G) = \{|H|, |K|\}$. بنابراین $t||H|$ یا $t||K|$. فرض کنیم $t||H|$. طبق تعریف گروه فروبنیوس داریم:

$$G - K = \left(\cup_{g \in G} H^g\right) - \{1\}.$$

پس می‌توان استنباط نمود که برای هر عنصر $x \in G$ از مرتبه t، $g \in G$ وجود دارد که $x \in H^g$ از سویی دیگر، طبق تعریف داریم، برای هر $y \in G - H$، $H^y \cap H = \{1\}$. بنابراین $m_t(H^y \cap H^g) \neq 0$ اگر و تنها اگر $H^g = H^y$ اگر و تنها اگر $yg^{-1} \in H$. بنابراین اگر $\{g_1, \dots, g_l\}$ یک مجموعه مورب از H در G باشد، آنگاه طبق آنچه گفته شد، خواهیم داشت $m_t(G) = \sum_{i \in \{1,\dots,l\}} m_t(H^{g_i})$. واضح است که $m_t(H^{g_i}) = m_t(H)$ و $l = |K|$. بنابراین $m_t(G) = |K|.m_t(H)$ و اثبات قسمت (الف) تمام است.

حال فرض کنیم $t||K|$. چون K زیرگروه نرمال G است و $gcd(|K|, |G/K|) = 1$، لم ۳- ۲ ایجاب می‌کند که $m_t(G) = m_t(K)$. همچنین لم ۲- ۱ (د) نشان می‌دهد که $OC(G) = \{|H|, |K|\}$ و بنابراین H به صورت بدون نقطه ثابت روی $\{x \in G: o(x) = t\}$ عمل می‌کند. بنابراین $|H|\ |m_t(G)$ و اثبات قسمت (ب) کامل می‌شود.

گزاره ۳- ۴. فرض کنیم G یک گروه ۲-فروبنیوس با سری نرمال $G \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq 1$ باشد.

(الف) اگر $r \in \pi(G) - \pi(G/H_1)$ و $e = |G|_r$، آنگاه $|M_e(G)| = e$؛

(ب) اگر $t||K_1/H_1|$ و $t \in \omega(G)$، آنگاه:

$m_t(G) = \phi(t).|H_1|.$

اثبات. چون $r \in \pi(G) - \pi(G/H_1)$، پس $r \in \pi(H_1)$ و $S_r(G) \leq H_1$، اما H_1 پوچتوان است. پس $S_r(G)$ زیرگروه مشخصه H_1 می‌باشد. همچنین H_1 زیرگروه نرمال G است، این ایجاب می‌کند که $S_r(G)$ در گروه G نرمال باشد. بنابراین $S_r(G)$ شامل همه r -عنصرهای G می‌باشد و از اینجا داریم $S_r(G) = \{x \in G: x^e = 1\}$، که $e = |S_r(G)|$. پس $|M_e(G)| = |S_r(G)| = e$ که اثبات قسمت (الف) را تکمیل می نماید. برای اثبات قسمت دوم، چون $gcd\left(\left|\frac{K_1}{H_1}\right|, \left|\frac{G}{K_1}\right|\right) = 1$، لم ۳- ۲ ایجاب می‌کند که $m_t(G) = m_t(K_1)$، اما K_1 خود گروهی فروبنیوس با هسته H_1 و متمم K_1/H_1 می‌باشد و t مقدار $|K_1/H_1|$ را عاد می‌کند. بنابراین گزاره ۳- ۳ (الف) ایجاب می‌کند $m_t(K_1) = |H_1|.m_t(K_1/H_1)$. به‌علاوه، طبق لم ۲- ۲ (ب)، K_1/H_1 دوری است. این نتیجه ایجاب می‌کند که $m_t(K_1/H_1) = \phi(t)$ و اثبات قسمت دوم کامل می‌گردد.

لم ۳- ۵. فرض کنیم $N \trianglelefteq G$، $\left(|N|, \left|\frac{G}{N}\right|\right) = 1$ و همچنین $t \in \pi\left(\frac{G}{N}\right)$، آنگاه:

$\sum_{y\in\omega(N)}\sum_{x|t} m_{xy}(G)=|N|m_t\left(\frac{G}{N}\right)+|N|.$

اثبات. گیریم $\omega_1 N,\dots,\omega_s N$ عناصر متمایز از مرتبه t در $\frac{G}{N}$ باشند. در این صورت هر عنصر مرتبه xy که $x|t$ و $y\in\omega(N)$ در $N\cup\left(\cup_{i=1}^{s}\omega_i N\right)$ قرار می‌گیرد. از سوی دیگر برای هر $z\in N\cup\left(\cup_{i=1}^{s}\omega_i N\right)$، $z\in N$ یا $z\in\omega_j N$ که $1\le j\le s$. لذا $|z|=t^i u^j$ که $i\in\{0,1\}$ و $u^j\in\omega(N)$ بدین ترتیب اثبات کامل می‌گردد.

اثبات قضیه ۲. با استفاده از مرجع [۴] می‌توان دید $\omega(SL_2(5))=\{1,2,3,4,5,6,10\}$، $m_2(SL_2(5))=1$، $m_3(SL_2(5))=20$، $m_6(SL_2(5))=20$، $m_4(SL_2(5))=30$ و $m_5(SL_2(5))=m_{10}(SL_2(5))=24$ اگر $P\in Syl_{11}(G)$، آنگاه $P\trianglelefteq G$ و P یک ۱۱-گروه آبلی مقدماتی است. لذا $11\in\omega(G)$ و $m_{11}(G)=11^2-1$. طبق گزاره ۳- -۳ داریم:

$$nse(G)=nse(L)=\{1,11^2,11^2-1,20.11^2,24.11^2,30.11^2\} \qquad (I)$$

از اینجا طبق لم ۲- -۳، L گروهی متناهی است. اگر $t\in\pi(L)-\{2,3,5,11\}$ وجود داشته باشد، آنگاه به موجب لم ۲- -۴ (۱)، $\alpha\in nse(L)$ وجود دارد که $t-1|\alpha$ و $t|\alpha+1$. لذا طبق (I) می‌توان دید که $t=3631$ و $m_t=30.11^2=t-1$. بنابراین:

$$\pi(L)\subseteq\{2,3,5,11,3631\}. \quad (II)$$

حال اثبات را در گام‌های زیر دنبال می‌نماییم:

گام ۱. $2\in\pi(L)$ و $m_2(L)=11^2$.

اثبات. طبق لم ۲- -۴ (۴)، چون تنها عدد فرد در مجموعه $nse(L)$ برابر 11^2 می‌باشد، پس $2\in\pi(L)$ و $m_2=11^2$.

گام ۲. اگر $u\in\pi(L)-\{2\}$، آنگاه $m_u(L)$ طبق جدول (۱) به دست می‌آید.

اثبات. طبق لم ۲- ۴ (۱)، داریم $u|m_u(L)+1$ و به‌علاوه $u-1|m_u(L)$. با توجه به عناصر مجموعه $nse(L)$ در (I) اثبات کامل می‌گردد.

گام ۳. اگر $5\in\pi(L)$، آنگاه $11\in\pi(L)$.

اثبات. طبق (I) می‌توان دید که $\beta\in nse(L)$ وجود ندارد که $\varphi(5^3)|\beta$. بنابراین $5^3\notin\omega(G)$. فرض کنیم $5^2\in\omega(L)$. در این صورت $\varphi(5^2)|m_{5^2}$ و $1+m_5+m_{5^2}=1+11^2.24+m_{5^2}$ و لذا $m_{25}=20.11^2$.
از سوی دیگر، $|L|_5\,|1+m_5+m_{5^2}$ و لذا $|L|_5=25$. پس $20.11^2=20.n_5$. در نتیجه، $n_5=11|\,|L|$. حال گیریم $5^2\notin\omega(L)$. بنابراین $|L|_5\,|1+m_5$ و از اینجا $|L|_5=5$ و $24.11^2=m_5=4.n_5$ که می‌توان استنباط نمود $n_5=6.11^2$. لذا $11|\,|L|$ و اثبات کامل می‌گردد.

گام ۴. اگر $u\in\{3,5\}$ و $\{u,11\}\subseteq\pi(L)$، آنگاه: $11.u\notin\omega(L)$ و $|L|_u=u.$

اثبات. اگر $u=5$، آنگاه چون $\varphi(11.u)=40$ هیچ عضوی از مجموعه $nse(L)$ را نمی‌شمارد. لذا می‌توان نتیجه گرفت $5.11\notin\omega(L)$.

جدول (۱)

u	۳	۵	۱۱	۳۶۳۱
$m_u(L)$	$۲۰.۱۱^۲$	$۲۴.۱۱^۲$	$۱۱^۲-۱$	$۳۰.۱۱^۲$

حال فرض کنیم $u = 3$. اگر $3.11 \in \omega(L)$، آنگاه $20 = \varphi(3.11)|m_{3.11}$. پس $m_{3.11} = 20.11^2$ و از سوی دیگر:

$$3.11 \nmid 1 + m_{11} + m_3 + m_{3.11} = 1 + 11^2 - 1 + 20.11^2 + 20.11^2 = 11^2.41$$

که با لم ۲- ۴ (۱) در تناقض است و نتیجه می‌گیریم $3.11 \notin \omega(L)$. لذا u-زیرگروه سیلوی L روی مجموعه عناصر مرتبه ۱۱ از L بدون نقطه ثابت عمل می‌کند. بنابراین$|L|_u \; |m_{11} = 11^2 - 1$ و از اینجا داریم $|L|_u = u$ و اثبات تمام است.

گام ۵. اگر $3 \in \pi(L)$، آنگاه $9 \notin \omega(L)$ و $|L|_3 \leq 9$.

اثبات. طبق اثبات گام‌های قبل داریم $m_3 = 20.11^2$. اگر $9 \in \omega(L)$، آنگاه $6 \;|m_9$ و بنابر (I)، نتیجه می‌شود:

$$m_9 \in \{11^2 - 1, 30.11^2, 24.11^2\}$$

اما ۹ هیچ یک از اعضای مجموعه زیر را نمی‌شمارد:

$$\{1 + 20.11^2 + 24.11^2, 1 + 20.11^2 + 30.11^2, 1 + 20.11^2 + 11^2 - 1\}.$$

لذا به تناقض با لم ۲- ۴- (۱) خواهیم رسید. بنابراین $9 \notin \omega(L)$. پس $|L|_3 \; |1 + m_3 = 1 + 20.11^2$ و از اینجا داریم $|L|_3 \leq 9$ و ادعا اثبات می‌گردد.

گام ۶. اگر $11 \in \pi(L)$، آنگاه داریم $11^2 \notin \omega(L)$ و $|L|_{11} \leq 11^2$.

اثبات. می‌دانیم $m_{11} = 11^2 - 1$ اگر $11^2 \in \omega(L)$، آنگاه داریم $\varphi(11^2) \;|m_{11^2}$ و از (I) می‌توان استنباط نمود $m_{11^2} \in \{11^2.20, 11^2.30\}$.

حال اگر $11^3 \in \omega(L)$، آنگاه $m_{11^3} \in \{20.11^2, 30.11^2\}$، اما $11^3 \nmid 1 + m_{11} + m_{11^2} + m_{11^3}$ که یک تناقض است. نتیجه می‌گیریم $11^3 \notin \omega(L)$. لذا $|L|_{11} \; |1 + m_{11} + m_{11^2}$ که نشان می‌دهد $|L|_{11} = 11^2$. از اینجا می‌توان استنباط نمود $m_{11^2} = 11.10.n_{11}$ و $n_{11} \in \{2.11, 3.11\}$ که غیر ممکن است.

گام ۷. اگر $W = \{4,6,8,12,24\} \subset \omega(L)$، آنگاه m_i که $i \in W$ مطابق جدول (۲) به دست می‌آید.

اثبات. اگر $4 \in \omega(L)$، آنگاه $4 \; |1 + m_2 + m_4$. بنابراین $m_4 = 30.11^2$. همچنین اگر $8 \in \omega(L)$، آنگاه $\varphi(۸)\,|\,m_۸$ و به‌علاوه $8 \; |1 + m_2 + m_4 + m_8$. پس $m_8 = 24.11^2$. گیریم $6 \in \omega(L)$. لذا $6 \; |1 + m_2 + m_3 + m_6$. پس $m_6 = 20.11^2$. حال اگر $12 \in \omega(L)$، آنگاه لم ۲- ۴ ایجاب می‌کند $\varphi(12)|m_{12}$ و لذا $m_{12} \in \{20.11^2, 30.11^2, 11^2 - 1\}$. حال چون $12 \; |1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_6 + m_{12}$، طبق استدلال و مقادیر به‌دست‌آمده از گام‌های قبل می‌توان استنباط نمود که $m_{12} = 11^2 - 1$. در آخرین حالت اگر $24 \in \omega(L)$، آنگاه $\varphi(24)|m_{24}$. بنابراین $m_{24} = 24.11^2$ و اثبات کامل می‌گردد.

گام ۸. $16 \notin \omega(L)$.

اثبات. فرض کنیم $16 \in \omega(L)$. در این صورت، چون $\varphi(16)|m_{16}$، پس $m_{16} = 24.11^2$.

جدول (۲)

i	۴	۶	۸	۱۲	۲۴
m_i	۳۰ .۱۱^۲	۲۰ .۱۱^۲	۲۴ .۱۱^۲	۱۱^۲ - ۱	۲۴ .۱۱^۲

از سوی دیگر داریم:

$$16 \nmid 1 + m_2 + m_4 + m_8 + m_{16}$$
$$1 + 11^2 + 11^2.30 + 11^2.24 + 11^2.24$$

که تناقض با لم ۲- ۴ (۱) است.

گام ۹. $\pi(L) \subseteq \{2,3,5,11\}$.

اثبات. اگر $3631 \in \pi(L)$، آنگاه بنا بر آنچه قبلاً دیدیم $m_{3631} = 30.11^2 = 3631 - 1$. همچنین چون ۳۶۳۱ هیچ یک از اعضای مجموعه *nse(L)* را نمی‌شمارد، می‌توان نتیجه گرفت $3631^2 \notin \omega(L)$. بنابراین ۳۶۳۱-زیرگروه سیلوی L دوری و نرمال است. طبق گام ۲، $2 \in \pi(L)$. پس $\pi(L) - \{3631\} \neq \emptyset$ اگر $t \in \pi(L)$ و $t.3631 \in \omega(L)$ که $t \neq 3631$، آنگاه $3631 \mid 1 + m_{3631} + m_t + m_{t.3631}$ که با توجه با اعضای مجموعه $nse(L)$ غیر ممکن است. بنابراین $3631.t \notin \omega(L)$ و از اینجا می‌توان نتیجه گرفت L یک گروه فروبنیوس با هسته‌ای از مرتبه ۳۶۳۱ می‌باشد. طبق گزاره ۳-۳، برای هر $t \in \pi(L)$ که $t \neq 3631$ داریم، $m_t(L) = 3631.k$ که k یک عدد صحیح مثبت است. پس ۳۶۳۱ باید عضوی از مجموعه $nse(L)$ را بشمارد که امکان‌پذیر نیست. بنابراین $3631 \notin \pi(L)$ و لذا طبق (II) داریم $\pi(L) \subseteq \{2,3,5,11\}$.

گام ۱۰. $\pi(L) \not\subset \{۲,۳\}$.

اثبات. فرض کنیم $\pi(L) \subseteq \{2,3\}$. پس بنا بر استدلال گام‌های قبلی می‌توان دید $\omega(L) \subseteq \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$. لذا ضریب تکرار $11^2 - 1$ در مجموعه $nse(L)$ برابر با یک می‌باشد، بنابراین:

$$|L| = 1 + 11^2 + (11^2 - 1) +$$
$$30.11^2.k_1 + 24.11^2.k_2 + 20.11^2.k_3$$

که k_1 ضریب تکرار 30.11^2، k_2 ضریب تکرار 24.11^2 و k_3 ضریب تکرار 20.11^2 در $nse(L)$ می‌باشند. لذا $11 \mid |L|$ که غیر ممکن است و ادعا اثبات می‌گردد.

گام ۱۱. $\pi(L) \nsubseteq \{2,11\}$.

اثبات. با استفاده از برهان خلف ادعا را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $\pi(L) \subseteq \{2,11\}$. پس مطابق با استدلال‌های قبل می‌توان دید که $\omega(L) \subseteq \{1,2,4,8,11,22\}$. همچنین اگر $22 \in \omega(L)$، آنگاه $m_{22} \in \{20.11^2, 30.11^2\}$، اما nse(G)=nse(L). پس داریم $m_{22} = 20.11^2$ و به‌علاوه $\omega(L) = \{1,2,4,8,11,22\}$. لذا از اینجا نتیجه می‌گیریم:

$$|L| = 1 + m_2 + m_4 + m_{11} + m_{22} =$$
$$11^2.76$$

پس می‌توان استنباط نمود $19 \mid |L|$ که غیر ممکن است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌گردد.

گام ۱۲. $\pi(L) = \{2,3,5,11\}$.

اثبات. طبق گام‌های ۱ و ۱۰، $2 \in \pi(L) \subseteq \{2,3,5,11\}$ و به موجب گام‌های ۳، ۱۰ و ۱۱ داریم $|\pi(L)| \geq 3$.

حال اگر $t \in \{3,5\}$ و $\pi(L) = \{2,t,11\}$، آنگاه طبق گام ۴ داریم $|L|_t = t$ و لذا $m_t = (t-1)n_t$. با استفاده از گام ۲ داریم $n_5 = 6.11^2$ یا $n_3 = 10.11^2$. بنابراین $3.5 \mid |L|$ که تناقض است. همچنین گام ۳ نشان می‌دهد که $\pi(L) \neq \{2,3,5\}$، پس $\pi(L) = \{2,3,5,11\}$.

گام ۱۳. $3.5, 3.11, 5.11 \notin \omega(L)$ و L حل‌پذیر نیست.

اثبات. اگر $3.5 \in \omega(L)$، آنگاه $\varphi(15) \mid m_{15}$ و بنابراین $m_{15} = 24.11^2$. اما:

$$15 \nmid 1 + m_3 + m_5 + m_{15} =$$
$$1 + 20.11^2 + 24.11^2 + 24.11^2$$

که تناقض با لم ۲- ۴ (۱) است. به طور مشابه می‌توان استنباط کرد که $3.11,5.11 \notin \omega(L)$. چون $3,5,11 \in \pi(L)$ و $3.5,3.11,5.11 \notin \omega(L)$، طبق لم ۲- ۸، L حل‌پذیر نیست.

گام ۱۴. $|L| = 2^3.11^2.3.5$ و $|\omega(L)| = 8$.

اثبات. طبق استدلال گام‌های قبل داریم $|L|_3 = 3$، $|L|_5 = 5$، $|L|_{11} \le 11^2$ و $\pi(L) = \{2,3,5,11\}$. همچنین دیدیم

$\omega(L) = \{1,2,3,4,5,6,8,10,11,12,22,24\}$.

پس $|\omega(L)| \le 12$ و لذا:

$$|L| = 1 + 11^2 + (11^2-1).k_1 \\ +20.11^2.k_2 \\ +30.11^2.k_3 \\ +24.11^2.k_4 \\ = 2^\alpha.3.5.11^i$$

که $1 \le i \le 2$، $1 \le \alpha, k_1, k_2, k_3, k_4$. از سوی دیگر، $k_1+k_2+k_3+k_4 \le 10$ چون $11 \mid |L|$. پس $k_1 = 1$. لذا طبق گام ۲ می‌توان دید که $(k_2,k_3,k_4) = (2,1,2)$ و $|L| = 2^3.3.5.11$. پس $|\omega(L)| = 8$ و اثبات کامل است.

گام ۱۵. $G \cong L$.

اثبات. فرض کنیم M بزرگ‌ترین زیرگروه نرمال و حل‌پذیر از L است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $M \ne L$. گیریم $\frac{N}{M}$ یک زیرگروه نرمال مینیمال $\frac{L}{M}$ است. طبق فرض روی M، $\frac{N}{M}$ حل‌پذیر نیست و از اینجا $3 \le |\pi(N/M)|$. پس $\left|\frac{N}{M}\right|_3 = 3$ یا $\left|\frac{N}{M}\right|_5 = 5$ که نتیجه می‌دهد $\frac{N}{M}$ گروهی ساده است، اما $\left|\frac{N}{M}\right| \le |\pi(L)| \le 4$. لذا $\left|\frac{N}{M}\right|$ یک K_3 -گروه ساده یا یک K_4 - گروه ساده می‌باشد. با استفاده لم‌های ۲-۶ و ۲-۷ داریم $\frac{N}{M} \cong Alt(5)$ یا $\frac{N}{M} \cong L_2(11)$. بنابراین اثبات را در حالت‌های زیر ادامه می‌دهیم:

حالت (۱): فرض کنیم $\frac{N}{M} \cong Alt(5)$. در این صورت، $\pi\left(\frac{L}{N}\right) \subseteq \{2,11\}$ و از اینجا $\frac{L}{N}$ گروهی حل‌پذیر است. بنابراین با توجه به انتخاب $\frac{N}{M}$، $C_{\frac{L}{M}}\left(\frac{N}{M}\right) = \{1\}$. پس می‌توان استنباط نمود که $\frac{L}{M} \cong Sym(5)$ یا $\frac{L}{M} \cong Alt(5)$. اگر $\frac{L}{M} \cong Sym(5)$، آنگاه $|M| = 11^2$ و $m_2\left(\frac{L}{M}\right) = 25$. از سوی دیگر، اگر $22 \in \omega(L)$، آنگاه لم ۲- ۴ ایجاب می‌کند $10 | m_{22}$ و به‌علاوه $22 | 1 + m_2 + m_{11} + m_{22}$. در نتیجه $m_{22} \in \{0, 20.11^2, 30.11^2\}$ و داریم:

$$|M| + |M| m_2\left(\frac{L}{M}\right) \ne 1 + m_2(L) + \\ m_{11}(L) + m_{22}(L)$$

که در تناقض با لم ۳- ۵ می‌باشد. این نتیجه می‌دهد $\frac{L}{M} \ncong Sym(5)$. حال گیریم $\frac{L}{M} \cong Alt(5)$ و $P \in Syl_{11}(M)$. چون $|M| = 2.11$ می‌توان نتیجه گرفت $P \trianglelefteq M$. بنابراین $P \trianglelefteq L$ و $\frac{L}{P} \cong SL_2(5)$ یا $\frac{L}{P} \cong \mathbb{Z}_2 \times Alt(5)$.

یادآوری می‌کنیم $3.11 \notin \omega(L)$. لذا $C_L(P) \le M$ و در نتیجه $|C_L(P)|_2 \le 2$. پس برای هر x از $L - C_L(P)$ داریم $o(x) = 2$ که $m_{11}\left(C_L(x)\right) \le 11 - 1$. چون $|M|_2 = 2$ و $P \trianglelefteq G$ می‌توان استنباط نمود که $m_2\left(C_L(P)\right) \le 1$. همچنین اگر $22 \in \omega(L)$، آنگاه $m_{22} \in \{20.11^2, 30.11^2\}$. از سوی دیگر، $m_2 = 11^2 - 1$ و

$$m_{22}(L) = \sum_{x \in L: o(x)=2} m_{11}\left(C_L(x)\right) \\ \le (11^2-1) + (m_2(L)-1).10 = \\ (11^2-1).11$$

که غیر ممکن است. پس $22 \notin \omega(L)$ و از اینجا داریم $\omega(L) \subseteq \{1,2,3,4,5,6,8,10,11\}$.

چون $\frac{L}{P} \cong SL_2(5)$ یا $\frac{L}{P} \cong \mathbb{Z}_2 \times Alt(5)$، پس

می‌توان دید $8 \notin \omega(L)$. طبق استدلال گام ۱۴، $|\omega(L)| = 8$ و از اینجا $\omega(L) = \{1,2,3,4,5,6,10,11\}$. پس $4 \in \omega\left(\frac{L}{P}\right)$ و لذا $\frac{L}{P} \ncong \mathbb{Z}_2 \times Alt(5)$. بنابراین $\frac{L}{P} \cong SL_2(5)$.

حالت (۲): فرض کنیم $\frac{N}{M} \cong L_2(11)$. در این صورت، $\left|\frac{N}{M}\right| = \frac{11.(11^2-1)}{2} = 2^2.3.5.11$. پس $\pi\left(\frac{L}{N}\right) = \{2,3\}$ و از اینجا می‌توان گفت $\frac{L}{N}$ گروهی حل‌پذیر است و $C_{\frac{L}{M}}\left(\frac{N}{M}\right) = \{1\}$. لذا $\frac{L}{M} \lesssim Aut\left(\frac{N}{M}\right)$. بنابراین داریم $\left|\frac{L}{M}\right| \in \{2^2.3.5.11, 2^3.3.5.11\}$ که این نتیجه می‌دهد $|M| \in \{2.11,11\}$. پس اگر $P \in Syl_{11}(M)$، آنگاه $P \trianglelefteq L$ و از اینجا داریم $\frac{C_L(P)M}{M} \trianglelefteq \frac{L}{M}$. از این رو $\frac{C_L(P)M}{M} = \{1\}$ یا $\frac{N}{M} \le \frac{C_L(P)M}{M}$. اگر $C_L(P) \le M$، آنگاه چون $\frac{L}{C_L(P)} \lesssim Aut(P) \cong Z_{10}$، پس $\frac{L}{M} \cong \frac{\frac{L}{C_L(P)}}{\frac{M}{C_L(P)}}$ آبلی است که یک تناقض است. حال فرض کنیم $\frac{N}{M} \le \frac{C_L(P)M}{M}$. بنابراین $5 \mid \frac{|C_L(P)||M|}{|C_M(P)|}$ و از اینجا $5 \mid |C_L(P)|$ که نتیجه می‌دهد $55 \in \omega(L)$ و این تناقض است. از اینجا طبق حالت (۱) می‌توان استنباط نمود $G \cong L$ و اثبات کامل می‌گردد.

تشکر و قدردانی

نویسندگان بر خود لازم می دانند مراتب قدردانی و تشکر صمیمانه خود را از داور محترم به جهت همراهی و راهنمایی‌های ارزنده و ارتقای کیفی مقاله، اعلام دارند.

فهرست منابع

[1] N. Ahanjideh, B. Asadian, NSE characterization of some Alternating groups, Journal of Algebra and Its Applications 14(2): 1550012 (2015).

[2] Y. Bugeaud, Z. Cao, M. Mignotte, On simple K_4 groups, Journal of Algebra 241: 658-668 (2001).

[3] G. Y. Chen, On the structure of Frobenius groups and 2-Frobenius groups, Journal of Southwest China Normal University 20(5): 485-487 (1995).

[4] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, Atlas of finite groups, Clarendon Press, Oxford, (1985).

[5] M. Herzog, On finite simple groups of order divisible by three primes only, Journal of Algebra 10(3): 383-388 (1968).

[6] B. Huppert, Character theory of finite groups, Walter de Gruyter, Berlin, (1998).

[7] A. Khalili Asboei, S. S. Salehi Amiri, A. Iranmanesh, A new of $PSL_2(q)$ for some q, Ukrainian Mathematical Journal 67(9): 1297-1305 (2016).

[8] E. I. Khukhro, V. D. Mazurov, Unsolved Problems in Group Theory: The Kourovka Notebook, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 17th edition, (2010).

[9] A. S. Kondratev, Prime graph components of finite simple groups, Mathematics of the USSR-Sbornik 67(1): 235-247 (1990).

[10] R. Shen, On same order type groups, SAÜ. Fen Bilimleri Dergisi 15(2): 156-158 (2011).

[11] R. Shen, C. Shao, Q. Jiang,W. Shi, V. Mazurov, A new characterization of A_5, Monatshefte für Mathematik 160(3): 337-341 (2010).

[12] A. V. Vasilev, On connection between the structure of a finite group and the properties of its prime graph 46(36): 396-404 (2005).

[13] J. S. Williams, Prime graph components of finite groups, Journal of Algebra 69(2): 487-513 (1981).