

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال هفتم، شماره سی و چهارم، بهمن و اسفند 1400

شماره شاپا: 588-2588X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

طراحی یک مدل تحلیل پوششی داده‌های دومرحله‌ای پویا جهت محاسبه کارایی بخشی و دوره‌ای

رضا سلیمانی دامنه^{*1}

استادیار، گروه مدیریت، دانشکده علوم اداری و اقتصاد، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: 1399/02/17 تاریخ پذیرش مقاله: 1399/04/30

چکیده:

اندازه‌گیری کارایی سازمان‌ها همواره مورد بحث محققان مختلف بوده است. تحلیل پوششی داده‌ها با در نظر گرفتن ورودی‌ها و خروجی‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده امکان محاسبه کارایی نسبی را برای هر واحد فراهم می‌کند. بسیاری از سازمان‌ها دارای ساختار دومرحله‌ای می‌باشند و عملکرد آن‌ها در دوره‌های متوالی به یکدیگر وابسته است. در ارزیابی چنین ساختاری باید کارایی بخشی و کارایی دوره‌ای محاسبه شود. مدل‌های اولیه و مدل‌های شبکه‌ای و پویا به تنهایی قادر به محاسبه این کارایی‌ها نیستند. همچنین مدل‌های شبکه‌ای پویای موجود از ارائه الگو برای واحدهای ناکارا یا حل تمامی چالش‌ها ناتوان هستند. در این پژوهش با تعریف مجموعه امکانات تولید، یک مدل تحلیل پوششی داده‌های دومرحله‌ای پویای ورودی‌محور توسعه داده شد. در این مدل مقدار بهینه متغیرهای میانی و بین‌دوره‌ای توسط مرحله و دوره بعدی تعیین و مراحل و دوره‌ها، از آخرین مرحله آخرین دوره به صورت برگشتی کارا می‌شوند. مدل علاوه بر کل ساختار، تک‌تک مراحل و دوره‌ها را نیز کارا می‌کند و تنها در صورتی یک واحد کارا کل می‌شود که در همه دوره‌ها کارا باشد. همچنین اثبات شد که تصویر واحد مورد ارزیابی کارا بخشی، دوره‌ای و کارا کل می‌باشد. با یک مثال کاربردی سه دوره‌ای نحوه استفاده از مدل جهت محاسبه کارایی بخشی و پویا بیان شد.

واژه‌ی کلیدی: کارایی، ساختار دومرحله‌ای پویا، متغیرهای میانی، متغیرهای بین‌زمانی، تحلیل پوششی داده‌ها.

1- مقدمه

کارایی به این معناست که یک سازمان چگونه از منابع خود برای بدست آوردن بیشترین تولید استفاده کرده است. اندازه‌گیری کارایی همواره مورد بحث محققان بوده است. مطالعات اولیه برای محاسبه آن منجر به روش‌های پارامتری شد که استفاده از آن‌ها بسیار سخت بود. فارل (1957) روشی را ارائه کرد که تنها برای یک ورودی و خروجی قابل استفاده بود [1]. چارنز، کوپر و رودز (1978) نخستین مدل تحلیل پوششی داده‌ها را جهت محاسبه کارایی معرفی کردند که هم ناپارامتریک بود و هم برای ساختارهای با بیش از یک ورودی و خروجی قابل استفاده بود [2]. پس از آن مدل‌های مختلف تحلیل پوششی داده‌ها در دو فرم مضرپی و پوششی توسط محققان مختلف توسعه داده شد. در فرم مضرپی کارایی به صورت مجموع موزون خروجی‌ها به ورودی‌ها محاسبه می‌شود. در فرم پوششی با ترکیب محدب ورودی‌ها و خروجی‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده، واحد مجازی ساخته می‌شود که روی مرز کارایی قرار دارد و با مقایسه واحد مورد ارزیابی با این واحد مجازی کارایی محاسبه می‌شود. اما مدل‌های اولیه تحلیل پوششی داده‌ها ورودی‌ها و خروجی‌های کلی را در نظر می‌گیرند و تنها برای محاسبه کارایی ساختارهای تک‌مرحله‌ای مناسب هستند [3,4].

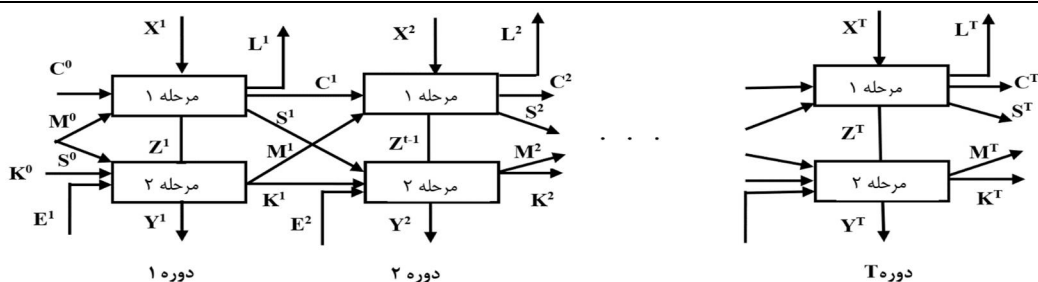
بسیاری از کاربردها و سازمان‌ها دارای ساختار پیچیده‌تری هستند و ورودیها از چند مرحله عبور می‌کنند تا تبدیل به خروجی شوند. از طرف دیگر عملکرد این ساختارها تحت تاثیر زمان نیز می‌باشد که مدل‌های سنتی قادر به محاسبه کارایی آنها به شکل صحیحی نیستند. در اینگونه ساختارها مدل باید قادر باشد کارایی هر مرحله (کارایی بخشی) و هر دوره (کارایی دوره‌ای) را محاسبه کند. شکل 1 یک ساختار دومرحله‌ای را در طی T دوره زمانی با تمام متغیرهای ممکن نشان می‌دهد.

در این ساختار در هر دوره زمانی واحد تصمیم‌گیرنده دارای دومرحله متوالی با ورودی‌ها، خروجی‌ها و متغیرهای میانی (Z) خاص خودش است. متغیرهای C, S, M و K متغیرهای بین‌زمانی هستند که بین دو دوره متوالی یک واحد ارتباط برقرار می‌کنند. مدل‌های سنتی تحلیل پوششی داده‌ها تنها ورودی‌ها و خروجی‌های کلی ساختار و یا میانگین و یا مجموع ورودی‌ها و خروجی‌های کل را در نظر می‌گیرند، بنابراین نمی‌توانند کارایی هر مرحله و دوره را محاسبه کنند. مدل‌های شبکه‌ای که اولین بار توسط فار و گراسکویف (2000) [5] ارائه شد ایستا هستند و از در نظر گرفتن متغیرهای بین زمانی و محاسبه کارایی پویا ناتوان هستند. همچنین مدل‌های پویا که نخستین بار توسط نموتو و گوتو (1999, 2003) [6,7] معرفی شدند در هر دوره زمانی ساختار را به صورت جعبه سیاه تک مرحله‌ای در نظر گرفته و امکان محاسبه کارایی مراحل را ندارند.

با توجه به اینکه مدل‌های سنتی، شبکه‌ای و پویا به تنهایی قادر به محاسبه کارایی‌های بخشی و دوره‌ای ساختار شکل 1 نیستند، باید از مدل‌های شبکه‌ای پویا برای ارزیابی آن استفاده کرد. مدل‌های شبکه‌ای پویای موجود تمام چالش‌های ارزیابی چنین ساختاری را برطرف نکرده‌اند. هدف این مقاله ارائه یک مدل دومرحله‌ای پویا است که فاقد ضعفهای مدل‌های قبلی باشد و برای چالش‌های محاسبه کارایی بخشی و دوره‌ای پاسخ مشخص داشته باشد.

2- ادبیات پژوهش

چارنز، کوپر و رودز (1978) مدلی را جهت محاسب کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده ارائه کردند [2]. این مدل که CCR نام گرفت پایه و اساس شاخه‌ای به نام تحلیل پوششی داده‌ها شد. در سال 1984 بنکر، چارنز و کوپر مدل دیگری را تحت عنوان BCC معرفی کردند [8].



شکل ۱. ساختار دو مرحله‌ای پویا

ساختارهای دومرحله‌ای زنجیره تامین پیشنهاد کردند [17]. لی (2020) یک روش برش جمعی جهت تجزیه کارایی شبکه‌ای در شرایط بازده به مقیاس متغیر ارائه کردند [18]. فوکویاما و میردهقان (2012) جهت اجتناب از تصمیمات اشتباه به دلیل جواب‌های چندگانه، یک مدل DEA شبکه‌ای برای محاسبه کارایی هر واحد و بخش‌هایش ارائه کردند [19]. رستمی مال‌خلیفه و مولاییان (2012) و رستمی مال‌خلیفه، مولاییان و مامی‌زاده (2013) مدل‌های شبکه‌ای غیرشعاعی را جهت ارزیابی زنجیره تامین ارائه کردند [20, 21]. لطفی و همکاران (2017) و یانگ و همکاران (2018) عدم کارایی و بهره‌وری 64 دانشگاه پژوهشی چین را با معرفی یک مدل دومرحله‌ای ارزیابی کردند [22]. مدل‌های شبکه‌ای علی‌رغم امکان بررسی ساختار درونی واحدها، ایستا هستند و ارتباط بین واحدها در دوره‌های متوالی را نمی‌توانند در نظر بگیرند.

نموتو و گوتو (1999, 2003) مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های پویا را جهت محاسبه کارایی دوره‌ای معرفی کردند [6, 7]. تن و تسوتسوی (2010)، چن و دالن (2010) و کائو (2013) توسعه‌های بعدی را در این مدل‌ها ایجاد کردند [23, 24, 25]. این مدل‌ها در هر دوره واحد را به صورت جعبه سیاه تک‌مرحله‌ای در نظر می‌گیرند. کائو (2014) با مرور مدل‌های شبکه‌ای و پویا بیان کردند که این مدل‌ها به تنهایی جهت ارزیابی ساختارهای شبکه‌ای پویا کافی نیستند و باید مدل‌هایی که امکان محاسبه کارایی بخشی و

پس از آن توسعه‌های زیادی در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها توسط محققان مختلف انجام و در کاربردهای گوناگون از آن‌ها استفاده شد. اما مدل‌های اولیه دارای دو ضعف عمده در محاسبه کارایی هستند. یکی اینکه امکان محاسبه کارایی بخشی را برای ساختارهای چند بخشی و چند مرحله‌ای ندارند، چرا که دیدگاه جعبه‌سیاه دارند و تنها ورودی و خروجی کلی را جهت محاسبه کارایی در نظر می‌گیرند [9]. ضعف دیگر عدم امکان محاسبه کارایی دوره‌ای توسط این مدل‌ها می‌باشد، در حالی که عملکرد بسیاری از واحدهای تصمیم‌گیرنده در دوره‌های متوالی به یکدیگر وابسته است [10, 11].

در پاسخ به ضعف مدل‌های اولیه در محاسبه کارایی ساختارهای با بیش از یک مرحله، فار و گراسکوف (2000) مدل‌های شبکه‌ای را معرفی کردند [5]. کائو و هوانگ (2008) و چن و همکاران (2009) به ترتیب مدل‌های رابطه‌ای ضربی و جمعی را برای ساختارهای دومرحله‌ای توسعه دادند [12, 13]. دسپوتیس و همکاران (2016) با نقد رویکرد مدل ضربی و جمعی، یک مدل چندهدفه را برای ساختار دومرحله‌ای بدون ورودی و خروجی مازاد معرفی کردند [14]. تن و تسوتسوی (2009) مدل SBM را برای ساختارهای شبکه‌ای تعمیم دادند [15]. کوک و همکاران (2010) با مرور مدل‌های دومرحله‌ای آن‌ها را به 4 دسته مدل‌های استاندارد، تجزیه‌ای، شبکه‌ای و تئوری بازیها تقسیم کردند [16]. نیک‌فرجام، رستمی مال‌خلیفه و مامی‌زاده (2015) یک رویکرد ترکیبی جهت ارزیابی

کارایی در ساختارهای شبکه‌ای ایستا و پویا پیشنهاد کردند و مشخص کردند که کدام بخش در چه دوره‌ای منجر به عدم کارایی سیستم می‌گردد [35]. وانگ و باروس (2016) یک روش ارزیابی با ترکیب DEA پویا و رگرسیون ارائه کردند. آن‌ها ابتدا مدلشان را برای ارزیابی یک فرایند دومرحله‌ای و سپس از رگرسیون جهت مدیریت نمرات کارایی نامتقارن و نامطلوب استفاده کردند [36]. کلاتری و فرضی‌پور (2018) جهت ارزیابی پایداری زنجیره تامین یک مدل شبکه‌ای پویای معکوس توسعه دادند [37]. توانا و همکاران (2019) یک مدل چندهدفه شبکه‌ای پویای فازی جهت ارزیابی کارایی پالایشگاه‌های نفت معرفی کردند [38].

3- مدل دومرحله‌ای پویای پژوهش

برای ساختن مدل، شکل 1 که یک ساختار کامل با در نظر گرفتن تمامی متغیرهای ممکن جهت ارائه یک مدل جامع است، را در نظر بگیرید. جدول (1) متغیرهای مدل را نشان می‌دهد. مجموعه امکانات تولید (PPS) شبکه‌ای پویا برای این ساختار به صورت زیر است: X^t, C^{t-1} و M^{t-1} بتواند Z^t, S^t, C^t و L^t را تولید کند و Z^t, S^{t-1}, E^t و K^{t-1} بتواند K^t و Y^t و M^t را تولید کند. واحد تحت بررسی (DMU₀) دارای متغیرهای زیر در دوره t است:

$(X', C', M', L', S', C', Z', K', E', S', M', K', Y')$ جهت محاسبه کارایی شبکه‌ای پویا این واحد کفایت ورودی‌های فعلی آن با ورودی‌های بهینه در صورت کارا عمل کردن هر مرحله در هر دوره مقایسه شود. الگوی کارایی شبکه پویا واحد O بدین صورت می‌شود.

$$\theta_1' X', \theta_1' C', \theta_1' M', L', \theta_2' S', \theta_1' C', \theta_2' Z', \theta_2' K', \theta_2' E', \theta_2' S', \theta_1' M', \theta_2' K', Y'$$

θ_1' نسبت کاهش ورودی‌های مرحله اول دوره t ، θ_2' نسبت کاهش ورودی‌های مرحله دوم دوره t ، θ_1^{t+1} و θ_2^{t+1} به ترتیب نسبت کاهش ورودی‌های مرحله اول

دوره‌ای را به صورت همزمان دارند توسعه پیدا کنند [26]. فوکویاما و وبر (2015) یک مدل دو مرحله‌ای پویا را جهت ارزیابی عملکرد بانک‌های ژاپنی معرفی کردند [27]. لیو (2017) DEA شبکه‌ای چنددوره‌ای را جهت ارزیابی تغییرات کارایی شرکت‌های هواپیمایی غرب آسیا استفاده کردند [28]. اسماعیل‌زاده و کاظمی‌متین (2018) مدل‌های DEA چنددوره‌ای را با بررسی روابط پیچیده فرایندهای داخلی هر واحد توسعه دادند [29]. آن‌ها انواع ساختارها از جمله متوالی و موازی را در هر دوره بررسی و چند مثال از جمله ارزیابی 10 شعبه دانشگاهی را استفاده کردند. حسینی و استفانیک (2019) یک مدل جدید مبتنی بر متغیرهای کمبود دومرحله‌ای پویا را جهت ارزیابی صنایع پالایش نفت ایران در دوره 2011-2015 ارائه کردند [30]. توانا و همکاران (2017) مدل دو مرحله‌ای در مدل‌های شبکه‌ای پویا سه بحث و چالش اصلی وجود دارد. یکی نحوه برخورد با متغیرهای میانی و بین زمانی و چگونگی تعیین مقدار بهینه آن‌ها و دیگری ارتباط بین کارایی مراحل و دوره‌ها با کارایی کل و دیگری مرز کارایی شبکه‌ای پویا (ارائه الگو برای واحدهای ناکارا) است. پویایی را توسعه دادند که امکان بررسی داده‌های منفی و متغیرهای بین دوره‌ای مطلوب و نامطلوب را می‌دهد [31]. لو و همکاران (2019) با تعریف یک ساختار شبکه‌ای پویا برای شرکت‌های قطعه‌ساز خودرو، از یک مدل تحلیل پوششی داده‌های مرحله‌ای پویا جهت ارزیابی آن استفاده کردند [32]. ژبونگ، یانگ و گوان (2018) با بیان اینکه ارزیابی کارایی بدون در نظر گرفتن زمان دارای خطا است، مدل دومرحله‌ای کائو (2017) [33] را برای کاربردهای پویا توسعه دادند که قادر به محاسبه اثرات متغیرهای بین دوره‌ای بود. آن‌ها از این مدل جهت ارزیابی 17 موسسه تحقیقاتی در چین طی دوره 2012 تا 2015 استفاده کردند [34]. سیدبوبر و همکاران (2017) یک مدل خطی جهت اندازه‌گیری

$$PPS_{inv} = \left(\left(X^t \cdot C^t \cdot M^t \cdot L^t \cdot S^t \cdot Z^t \cdot K^t \cdot E^t \cdot S^t \cdot M^t \cdot K^t \cdot Y^t \right) \middle| X^t \geq \sum \lambda_j X_j^t, \right. \\ C^t \geq \sum \lambda_j C_j^t, M^t \geq \sum \lambda_j M_j^t, L^t \leq \sum \lambda_j L_j^t, S^t \leq \sum \lambda_j S_j^t, C^t \leq \sum \lambda_j C_j^t, \\ Z^t \leq \sum \lambda_j Z_j^t, Z^t \geq \sum \lambda_j Z_j^t, K^t \geq \sum \lambda_j K_j^t, E^t \geq \sum \lambda_j E_j^t, S^t \geq \sum \lambda_j S_j^t, \\ \left. M^t \geq \sum \lambda_j M_j^t, K^t \leq \sum \lambda_j K_j^t, Y^t \leq \sum \lambda_j Y_j^t, \lambda_j \geq 0, \lambda_{0j} \geq 0 \right)$$

و دوم دوره بعد (t+1) که خروجی دوره t (متغیر بین زمانی) است را نشان می‌دهد. مدل (1) بر همین مبنا این نسبت‌ها و کارایی دوره‌ای و بخشی را محاسبه می‌کند.

جدول ۱: متغیرهای مدل

متغیر	شرح
X_{ij}^t	ورودی i (1,...,I) ام مرحله 1 واحد (1,...,n) z ام در دوره t (1,...,T)
C_{uj}^{t-1}	ورودی u (1,...,U) ام (متغیر بین زمانی) مرحله 1 واحد z ام در دوره t
M_{gj}^{t-1}	ورودی g (1,...,G) ام (متغیر بین زمانی)، مرحله 1 واحد z ام در دوره t
L_{dj}^t	خروجی d (1,...,D) ام مرحله 1 واحد z ام در دوره t
S_{vj}^t	خروجی v (1,...,V) ام (متغیر بین زمانی) مرحله 1 واحد z ام در دوره t
C_{uj}^t	خروجی u (1,...,U) ام (متغیر بین زمانی) مرحله 1 واحد z ام در دوره t
Z_{hj}^t	متغیر میانی h (1,...,H) ام واحد z ام در دوره t
E_{pj}^t	ورودی p (1,...,P) ام مرحله 2 واحد z ام در دوره t
K_{qj}^{t-1}	ورودی q (1,...,Q) ام (متغیر بین زمانی) مرحله 2 واحد z ام در دوره t
S_{vj}^{t-1}	ورودی v (1,...,V) ام (متغیر بین زمانی) مرحله 2 واحد z ام در دوره t
Y_{rj}^t	خروجی r (1,...,R) ام مرحله 2 واحد z ام در دوره t
K_{qj}^t	خروجی q (1,...,Q) ام (متغیر بین زمانی) مرحله 2 واحد z ام در دوره t
M_{gj}^t	خروجی g (1,...,G) ام (متغیر بین زمانی) مرحله 2 واحد z ام در دوره t

شده است که با مقدار بهینه خروجی‌های این مرحله از دوره‌های بعدی، ورودی‌های این مرحله چه میزان می‌تواند کاهش یابد تا به مرز کارایی برسد. بنابراین کارایی شبکه‌ای پویا مرحله 2 دوره t می‌شود:

$$\frac{1}{H+P+Q+V} (H\theta_2^t + P\theta_2^t + Q\theta_2^t + V\theta_2^t) = \theta_2^t$$

در یک دوره خاص (t) که ساختار شبکه‌ای دارد، ورودی‌های آن دوره شامل $E_p^t, K_q^{t-1}, S_v^{t-1}, M_g^{t-1}, C_u^{t-1}, X_i^t$ است، میانگین نسبت کاهش ورودی‌های آن دوره، کارایی شبکه‌ای پویا دوره t را می‌دهد:

$$\frac{1}{I+U+G+V+Q+P} ((I+U+G)\theta_1^t + (V+Q+P)\theta_2^t)$$

قضیه ۱: مدل جواب شدنی دارد.

$$(\lambda_{1o}^t = 1, \lambda_{1j}^t = 0; j \neq o, \lambda_{2o}^t = 1, \lambda_{2j}^t = 0; j \neq o, \theta_1^t = 1, \theta_2^t = 1) \forall t = 1, \dots, T$$

یک جواب شدنی برای مدل (1) است.

تابع هدف که میانگین نسبت کاهش ورودی‌های ساختار است، کارایی شبکه‌ای پویا را نشان می‌دهد. θ_1^* میزان کاهش ورودی‌های مرحله 1 دوره t را با توجه به مقدار بهینه خروجی آن از مرحله بعدی (Z^t) و دوره بعدی (C^t, S^t)، جهت رسیدن به کارایی شبکه‌ای پویا نشان می‌دهد که در محاسبه آن تاثیر شبکه و زمان دیده شده است. چون تمام ورودی‌های مرحله اول یک دوره با ضریب مساوی θ_1^* کاهش می‌یابند، بنابراین میانگین آن‌ها نیز θ_1^* و کارایی شبکه‌ای پویا مرحله 1 دوره t می‌شود:

$$\frac{1}{I+U+G} ((I+U+G)\theta_1^t) = \theta_1^*$$

θ_2^* میزان کاهش ورودی‌های مرحله 2 دوره t را با توجه به مقدار بهینه خروجی‌های آن از مراحل دوره بعدی (M^{t+1} و K^{t+1}) جهت رسیدن به کارایی شبکه‌ای پویا نشان می‌دهد. یعنی بدین گونه محاسبه

$$\min \frac{1}{T(I+P)+G+U+Q+V} \left(I \sum_{t=1}^T \theta_1^t + U \theta_1^1 + G \theta_1^1 + P \sum_{t=1}^T \theta_2^t + Q \theta_2^1 + V \theta_2^1 \right)$$

s.t.

$$(1) \sum_{j=1}^n \lambda_{1j}^t X_{ij}^t \leq \theta_1^t X_{io}^t \quad i = 1, \dots, I, \quad t = 1, \dots, T$$

$$(2) \sum_{j=1}^n \lambda_{1j}^t C_{uj}^{t-1} \leq \theta_1^t C_{uo}^{t-1} \quad u = 1, \dots, U, \quad t = 1, \dots, T$$

$$(3) \sum_{j=1}^n \lambda_{1j}^t M_{gj}^{t-1} \leq \theta_1^t M_{go}^{t-1} \quad g = 1, \dots, G, \quad t = 1, \dots, T$$

$$(4) \sum_{j=1}^n \lambda_{1j}^t L_{dj}^t \geq L_{do}^t \quad d = 1, \dots, D, \quad t = 1, \dots, T$$

$$(5) \sum_{j=1}^n \lambda_{1j}^t S_{vj}^t \geq \theta_2^{t+1} S_{vo}^t \quad v = 1, \dots, V, \quad t = 1, \dots, T-1$$

$$(6) \sum_{j=1}^n \lambda_{1j}^T S_{vj}^T \geq S_{vo}^T \quad v = 1, \dots, V$$

$$(7) \sum_{j=1}^n \lambda_{1j}^t C_{uj}^t \geq \theta_1^{t+1} C_{uo}^t \quad u = 1, \dots, U, \quad t = 1, \dots, T$$

$$(8) \sum_{j=1}^n \lambda_{1j}^T C_{uj}^T \geq C_{uo}^T \quad u = 1, \dots, U$$

$$(9) \sum_{j=1}^n \lambda_{1j}^t Z_{hj}^t \geq \theta_2^t Z_{ho}^t \quad h = 1, \dots, H, \quad t = 1, \dots, T$$

$$(10) \sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^t Z_{hj}^t \leq \theta_2^t Z_{ho}^t \quad h = 1, \dots, H, \quad t = 1, \dots, T$$

$$(11) \sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^t E_{pj}^t \leq \theta_2^t E_{po}^t \quad p = 1, \dots, P, \quad t = 1, \dots, T$$

$$(12) \sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^t K_{qj}^{t-1} \leq \theta_2^t K_{qo}^{t-1} \quad q = 1, \dots, Q, \quad t = 1, \dots, T$$

$$(13) \sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^t S_{vj}^{t-1} \leq \theta_2^t S_{vo}^{t-1} \quad v = 1, \dots, V, \quad t = 1, \dots, T$$

$$(14) \sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^t M_{gj}^t \geq \theta_1^{t+1} M_{go}^t \quad g = 1, \dots, G, \quad t = 1, \dots, T-1$$

$$(15) \sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^T M_{gj}^T \geq M_{go}^T \quad g = 1, \dots, G$$

$$(16) \sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^t K_{qj}^t \geq \theta_2^{t+1} K_{qo}^t \quad q = 1, \dots, Q, \quad t = 1, \dots, T-1$$

$$(17) \sum_{q=1}^Q \lambda_{2j}^T K_{qj}^T \geq K_{qo}^T \quad q = 1, \dots, Q$$

$$(18) \sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^t Y_{rj}^t \geq Y_{ro}^t \quad r = 1, \dots, R, \quad t = 1, \dots, T$$

$$\lambda_{1j}^t, \lambda_{2j}^t \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, T$$

$$\theta_1^t, \theta_2^t \text{ free}, \quad t = 1, \dots, T$$

اولی همان محدودیت جواب بهینه فرض خلف و برقرار است. سمت چپ دومی Z_{ho} می‌شود و با توجه به $\theta_2^{b*} \leq 1$ ، بزرگتر مساوی سمت راست می‌شود و برقرار است. سمت چپ سومی همان سمت چپ محدودیت در جواب بهینه فرض خلف می‌شود و سمت راست آن Z_{ho} می‌شود که از سمت راست جواب بهینه فرض خلف با توجه به $\theta_2^{a*} > 1$ کوچکتر است، بنابراین برقرار است:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{1j}^c Z_{hj} \geq \theta_2^{a*} Z_{ho} > Z_{ho} \cdot \theta_2^{a*} > 1$$

در چهارمی با $(\lambda_{10}^{f'} = 1, \lambda_{1j}^{f'} = 0; j \neq o, \theta_2^{a'} = 1)$ سمت چپ و راست برابر و برقرار است. محدودیت‌های (6)، (8)، (10)، (11)، (12)، (13)، (15)، (17) و (18) یا از نوع a و یا از نوع b هستند. اگر از نوع b باشند با $(\lambda_{2j}^{b*}, \theta_2^{b*})$ همان محدودیت فرض خلف و برقرار هستند. اگر از نوع a باشند با $(\lambda_{20}^{a'} = 1, \lambda_{2j}^{a'} = 0; j \neq o, \theta_2^{a'} = 1)$ دو طرف محدودیت‌ها مساوی و برقرار هستند. در محدودیت (14)، 4 حالت داریم:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^a M_{gj} \geq \theta_1^f M_{go}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^b M_{gj} \geq \theta_1^f M_{go}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^a M_{gj} \geq \theta_1^c M_{go}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^b M_{gj} \geq \theta_1^c M_{go}$$

اولی با $(\lambda_{20}^{a'} = 1, \lambda_{2j}^{a'} = 0; j \neq o, \theta_1^{f'} = 1)$ دو طرف مساوی و برقرار است. سمت چپ دومی همان سمت چپ جواب بهینه فرض خلف و سمت راست آن کوچکتر از سمت راست جواب بهینه فرض خلف است $(\theta_1^{f'} = 1$ و $\theta_1^{f*} > 1)$ پس محدودیت برقرار است:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^a M_{gj} \geq \theta_1^{f'} M_{go} > M_{go} \cdot \theta_1^{f*} > 1$$

سمت چپ سومی، M_{go} می‌شود و از سمت راست

قضیه 2: در جواب بهینه: $\theta_1^{t*} \leq 1, \theta_2^{t*} \leq 1$ به ازای $t=1, \dots, T$

فرض خلف: در جواب بهینه مدل، بعضی از θ_1^{f*} ها $(\theta_1^{f*}, f \in t(1, \dots, T))$ بزرگتر از یک و مابقی آنها $(\theta_1^{c*}, c \in t(1, \dots, T) \& c \neq f)$ کوچکتر مساوی یک و بعضی از θ_2^{a*} ها $(\theta_2^{a*}, a \in t(1, \dots, T))$ بزرگتر از یک و مابقی آن‌ها $(\theta_2^{b*}, b \in t(1, \dots, T) \& b \neq a)$ کوچکتر مساوی یک هستند. $(\theta_2^{a*} > 1, \theta_2^{b*} \leq 1, \theta_1^{f*} > 1, \theta_1^{c*} \leq 1)$

اگر این حالت جواب بهینه مدل با $(\lambda_{1j}^{c*}, \lambda_{1j}^{f*}, \lambda_{2j}^{a*}, \lambda_{2j}^{b*}, \theta_1^{c*}, \theta_1^{f*}, \theta_2^{a*}, \theta_2^{b*})$ باشد. $(\lambda_{10}^{f'} = 1, \lambda_{1j}^{f'} = 0; j \neq o, \lambda_{1j}^{c*}, \lambda_{20}^{a'} = 1, \lambda_{2j}^{a'} = 0; j \neq o, \lambda_{2j}^{b*}, \theta_1^{f'} = 1, \theta_1^{c*}, \theta_2^{a'} = 1, \theta_2^{b*})$

یک جواب شدنی برای مدل است. در ادامه موجه بودن این جواب در محدودیت‌های مدل بررسی می‌شود: محدودیت (1) می‌شود.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{1j}^f X_{ij} \leq \theta_1^f X_{io}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{1j}^c X_{ij} \leq \theta_1^c X_{io}$$

در اولی با توجه به $(\lambda_{10}^{f'} = 1, \lambda_{1j}^{f'} = 0; j \neq o, \theta_1^{f'} = 1)$ صدق می‌کند. در دومی با λ_{1j}^{c*} و θ_1^{c*} همان محدودیت فرض خلف می‌شود که فرض کردیم صدق می‌کند. محدودیت (2)، (3) و (4) اگر از نوع f باشند، دو طرفشان مساوی و برقرار است. اگر از نوع c باشند، همان محدودیت فرض خلف و برقرار است. محدودیت (9)، 4 حالت دارد:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{1j}^c Z_{hj} \geq \theta_2^b Z_{ho}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{1j}^f Z_{hj} \geq \theta_2^b Z_{ho}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{1j}^c Z_{hj} \geq \theta_2^a Z_{ho}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{1j}^f Z_{hj} \geq \theta_2^a Z_{ho}$$

با توجه به قضیه (2) می‌دانیم $\theta_1^t \leq 1, \theta_2^t \leq 1$ به ازای $t=1, \dots, T$. بنابراین تابع هدف که میانگین چند عدد کوچکتر مساوی 1 است، خودش نیز کوچکتر مساوی 1 می‌شود. همچنین کارایی شبکه‌ای پویا کل T دوره، کارایی شبکه‌ای پویا دوره t و کارایی شبکه‌ای پویا مرحله 1 و مرحله 2، که میانگین چند عدد کوچکتر مساوی 1 است، همواره بین 0 تا 1 می‌شوند.

تعریف 1: یک واحد در کل T دوره کارایی شبکه‌ای پویا است اگر کارایی کل آن 1 شود (تابع هدف 1 شود).

تعریف 2: یک واحد در دوره t کارا است، اگر کارایی شبکه‌ای پویای آن دوره 1 شود.

تعریف 3: یک مرحله کارا است اگر کارایی شبکه‌ای پویای آن مرحله 1 شود.

قضیه 4: یک واحد کارایی شبکه‌ای پویا است، اگر و فقط اگر در هر دوره و مرحله کارا باشد.

با توجه به اینکه $\theta_1^t \leq 1, \theta_2^t \leq 1$ به ازای $t=1, \dots, T$ هستند، در صورتی کارایی شبکه‌ای پویا 1 می‌شود که $\theta_1^t = 1$ و $\theta_2^t = 1$ به ازای تمام دوره‌ها ($t=1, \dots, T$) باشند، که در این صورت کارایی شبکه‌ای پویای هر دوره و هر مرحله نیز 1 می‌شود، یعنی در هر دوره و مرحله کارا است. همچنین در صورتی یک واحد در یک دوره خاص کارا می‌شود که در هر دو مرحله آن دوره کارا باشد.

قضیه 5: در جواب بهینه نه تنها تابع هدف بلکه θ_1^t و θ_2^t در همه دوره‌ها، همگی کوچکتر مساوی یک جواب غیربهینه (θ_1 و θ_2) هستند. ($\theta_2^t \leq \theta_1^t$) به عبارت دیگر مدل علاوه بر کل ساختار، تک تک مراحل و دوره‌ها را نیز بهینه می‌کند.

با توجه $\theta_1^c \leq 1$ بزرگتر مساوی می‌شود و بنابراین برقرار است. چهارمی همان محدودیت فرض خلف و برقرار است. محدودیت (16)، 4 حالت دارد:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^a K_{qj} \geq \theta_2^a K_{qo}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^a K_{qj} \geq \theta_2^b K_{qo}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^b K_{qj} \geq \theta_2^a K_{qo}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^b K_{qj} \geq \theta_2^b K_{qo}$$

در اولی با $(\lambda_{2o}^a = 1, \lambda_{2j}^a = 0; j \neq o, \theta_2^a = 1)$ سمت چپ و راست محدودیت K_{qo} می‌شود و برقرار است. در دومی با $(\lambda_{2o}^a = 1, \lambda_{2j}^a = 0; j \neq o, \theta_2^{b*})$ سمت چپ K_{qo} و سمت راست $\theta_2^{b*} K_{qo}$ می‌شود. با توجه به اینکه $\theta_2^{b*} \leq 1$ است سمت چپ همواره بزرگتر مساوی سمت راست و محدودیت برقرار است. در سومی با λ_{2j}^{b*} سمت چپ همان سمت چپ محدودیت فرض خلف می‌شود و با توجه به اینکه $(\theta_2^{a*} > 1, \theta_2^a = 1)$ است سمت راست از سمت راست فرض خلف کوچکتر می‌شود و بنابراین محدودیت برقرار است:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^b K_{qj} \geq \theta_2^a K_{qo} > K_{qo}, \theta_2^a > 1$$

در چهارمی با $(\lambda_{2j}^{b*}, \theta_2^{b*})$ همان محدودیت فرض خلف و برقرار است. در محدودیت‌های (5) و (7) نیز مشابه محدودیت (14) و (16) قابل اثبات است.

پس یک جواب موجه برای مدل پیدا کردیم که تابع هدف آن از تابع هدف فرض خلف کوچکتر است، چون $\theta_1^{f*} > 1$ و $\theta_2^{a*} > 1$ است. بنابراین جواب فرض خلف باطل است و قضیه (2) اثبات می‌شود. پس در جواب بهینه تمام تناها کوچکتر مساوی 1 هستند.

قضیه 3: مقدار بهینه تابع هدف (کارایی شبکه‌ای پویای کل) و کارایی مراحل و کارایی هر دوره همواره بین 0 تا 1 است.

سمت چپ دومی همان سمت چپ جواب شدنی می‌شود و سمت راست آن با توجه به $\theta_2^b \leq \theta_2^a$ کوچکتر از سمت راست جواب شدنی می‌شود، پس محدودیت برقرار است. سمت چپ سومی همان سمت چپ محدودیت در جواب بهینه فرض خلف می‌شود و سمت راست آن از سمت راست جواب بهینه فرض خلف با توجه به $\theta_2^a > \theta_2^*$ کوچکتر است، بنابراین برقرار است. در محدودیت (14)، 4 حالت داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^a M_{gj} &\geq \theta_1^f M_{go} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^b M_{gj} &\geq \theta_1^f M_{go} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^a M_{gj} &\geq \theta_1^c M_{go} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^b M_{gj} &\geq \theta_1^c M_{go} \end{aligned}$$

اولی همان محدودیت جواب شدنی 1 و چهارمی همان محدودیت جواب بهینه فرض خلف و برقرار هستند. سمت چپ دومی همان سمت چپ جواب بهینه فرض خلف و سمت راست آن کوچکتر از سمت راست جواب بهینه فرض خلف است ($\theta_1^{f*} > \theta_1^f$)، پس محدودیت برقرار است. سمت چپ سومی همان سمت چپ جواب شدنی می‌شود و سمت راست آن با توجه به $\theta_1^{c*} < \theta_1^c$ کوچکتر از سمت راست جواب شدنی می‌شود و بنابراین برقرار است. محدودیت (16)، 4 حالت دارد:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^a K_{qj} &\geq \theta_2^a K_{qo} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^b K_{qj} &\geq \theta_2^b K_{qo} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^a K_{qj} &\geq \theta_2^a K_{qo} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{2j}^b K_{qj} &\geq \theta_2^b K_{qo} \end{aligned}$$

اولی همان محدودیت جواب شدنی (1) و چهارمی همان محدودیت جواب بهینه فرض خلف و برقرار هستند. سمت چپ دومی همان سمت چپ جواب

فرض خلف: اگر θ_1 هر دوره به دو دسته f و c (f, c) $a, b \in t \& f \neq c$) و θ_2 به دو دسته a و b ($a, b \in t \& a \neq b$) تقسیم شود. فرض خلف می‌شود:

$$(\theta_1^{f*}, \theta_1^{c*}, \theta_2^{a*}, \theta_2^{b*}, \lambda_{1j}^{f*}, \lambda_{1j}^{c*}, \lambda_{2j}^{a*}, \lambda_{2j}^{b*})$$

جواب بهینه و

$$(\theta_1^f, \theta_1^c, \theta_2^a, \theta_2^b, \lambda_{1j}^f, \lambda_{1j}^c, \lambda_{2j}^a, \lambda_{2j}^b)$$

یک جواب موجه (جواب موجه 1) می‌باشد، به گونه‌ای که:

$$(\theta_1^{c*} \leq \theta_1^c, \theta_1^{f*} > \theta_1^f, \theta_2^{b*} \leq \theta_2^b, \theta_2^{a*} > \theta_2^a)$$

در این صورت

$$(\theta_1^{c*}, \theta_1^f, \theta_2^{b*}, \theta_2^a, \lambda_{1j}^{c*}, \lambda_{1j}^f, \lambda_{2j}^{b*}, \lambda_{2j}^a)$$

یک جواب موجه (جواب موجه 2) برای مدل است: جواب در محدودیت‌های (1)، (2)، (3) و (4) صدق می‌کند چون اگر این محدودیت‌ها از نوع c باشند، با این جواب همان محدودیت‌های جواب بهینه و اگر از نوع f باشند همان محدودیت‌های جواب موجه 1 هستند. و در محدودیت‌های (6)، (8)، (10)، (11)، (12)، (13)، (15)، (17) و (18) صدق می‌کند چون اگر این محدودیت‌ها از نوع b باشند، با این جواب همان محدودیت‌های جواب بهینه و اگر از نوع a باشند همان محدودیت‌های جواب موجه 1 هستند. محدودیت (9)، 4 حالت دارد:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_{1j}^c Z_{hj} &\geq \theta_2^b Z_{ho} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{1j}^f Z_{hj} &\geq \theta_2^b Z_{ho} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{1j}^c Z_{hj} &\geq \theta_2^a Z_{ho} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{1j}^f Z_{hj} &\geq \theta_2^a Z_{ho} \end{aligned}$$

اولی همان محدودیت جواب بهینه فرض خلف و چهارمی همان محدودیت جواب شدنی 1 و برقرار هستند.

نکته ۲: با توجه به قضیه ۵، $\theta_1^{t*} \leq \theta_1^t$ و $\theta_2^{t*} \leq \theta_2^t$ است.

با توجه به دو نکته فوق تنها در صورتی دو رابطه بالا برقرار هستند که $\theta_1^t = 1$ ، $\theta_2^t = 1$ به ازای تمام t باشند، یعنی تصویر کارا است.

با توجه به اینکه ثابت شد تصویر در مدل کارا است و قبلاً در قضیه ۴ ثابت شد که یک واحد اگر کارا باشد در هر مرحله و دوره کارا است پس تصویر علاوه بر اینکه کارای شبکه‌ای پویا است در تک تک مراحل و دوره‌ها نیز کارا است. بنابراین الگوی هر واحدناکارا در تمام مراحل و دوره‌ها کارا است.

مدل برای شرایط بازده به مقیاس ثابت است، اگر محدودیت‌های $\sum_{j=1}^n \lambda'_{1j} = 1$ و $\sum_{j=1}^n \lambda'_{2j} = 1$ به ازای $t=1, \dots, T$ (مجموعاً $2T$ محدودیت) به آن اضافه شود مدل شبکه‌ای پویای شعاعی ورودی‌محور با شرایط بازده به مقیاس متغیر می‌شود.

۴- مثال کاربردی

به منظور تبیین مدل پیشنهادی، از مدل پژوهش جهت ارزیابی ۱۸ شعبه بانکی استفاده شد. شکل ۲ ساختار دومرحله‌ای بانک را برای سه دوره متوالی نشان می‌دهد.

علاوه بر ورودی‌ها و خروجی‌های هر دوره، سپرده‌ها متغیرهای میانی (متغیر شبکه) که خروجی یک مرحله و ورودی مرحله دیگر و سود برگشتی متغیر بین زمانی (متغیر پویا) که خروجی یک دوره و ورودی دوره دیگر هستند. تابع هدف مدل برای این ساختار، کارایی کل سه سال را نشان می‌دهد که متوسط نسبت کاهش ورودی‌های ساختار شبکه‌ای پویا یعنی تعداد شعب، تعداد نیروی انسانی، میزان دارایی‌ها و همچنین با توجه به اینکه مطالبات غیرجاری (خروجی نامطلوب) به عنوان ورودی در نظر گرفته شده است را نشان می‌دهد.

شدنی و سمت راست آن کوچکتر از سمت راست جواب شدنی و بنابراین برقرار است. سمت چپ سومی همان سمت چپ جواب بهینه و سمت راست آن کوچکتر از سمت راست جواب بهینه و بنابراین برقرار است. موجه بودن جواب در محدودیت (۵) و (۷) نیز مشابه محدودیت (۱۶) قابل اثبات است. پس جواب $(\theta_1^{t*}, \theta_1^t, \theta_2^{t*}, \theta_2^t, \lambda_{1j}^c, \lambda_{1j}^f, \lambda_{2j}^b, \lambda_{2j}^a)$ یک جواب شدنی برای مدل است که تابع هدف آن از تابع هدف فرض خلف کوچکتر است.

$$\theta_1^{c*} \leq \theta_1^c, \theta_1^{f*} > \theta_1^f, \theta_2^{b*} \leq \theta_2^b, \theta_2^{a*} > \theta_2^a.$$

بنابراین فرض خلف نمی‌تواند صحیح باشد و قضیه ۵ اثبات می‌گردد.

قضیه ۵ نشان می‌دهد که در جواب بهینه نه تنها متوسط نسبت کاهش ورودی‌های ساختار شبکه‌ای پویا (تابع هدف) کمتر است، بلکه نسبت کاهش هیچ یک از ورودی‌های مراحل و دوره‌ها بیشتر از یک جواب غیربهینه نیست و مدل همزمان ساختار شبکه‌ای ای پویا و تک تک دوره‌ها و تک تک مراحل را بهبود می‌دهد و کارا می‌کند و کارایی شبکه‌ای پویا با کارایی مراحل هم‌جهت است. پس مدل دقیقاً همان کاری را می‌کند که در توضیحات مدل گفته شد و مدل بر مبنای آن ساخته شد.

قضیه ۶: تصویر یک واحد ناکارا، کارای شبکه‌ای پویا است. اگر تصویر

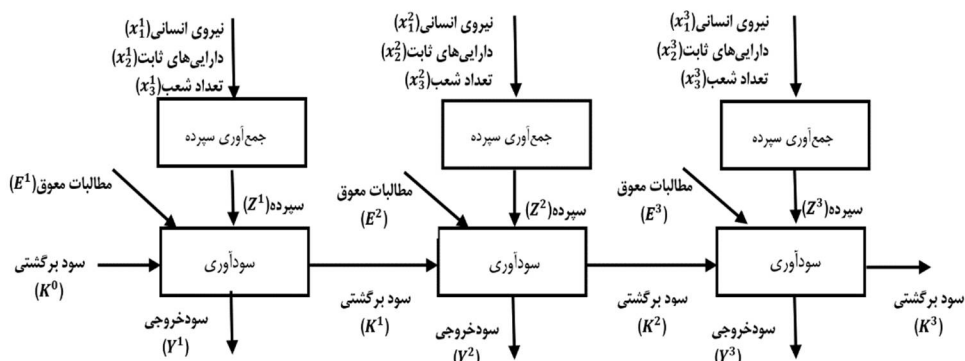
$$(\theta_1^t X^t, \theta_1^t M^{-1} \cdot L^t \cdot \theta_2^t Z^t, \theta_2^t E^t \cdot \theta_2^{t-1} K^{-1} \cdot \theta_1^{t+1} M^t \cdot \theta_2^{t+1} K^t \cdot Y^t)$$

را در مدل قرار دهیم، یعنی تصویر را ارزیابی کنیم، در سمت راست محدودیت‌ها داریم:

$$\tilde{\theta}_1^t = \theta_1^t \theta_1^{t*}$$

$$\tilde{\theta}_2^t = \theta_2^t \theta_2^{t*}$$

نکته ۱: در جواب بهینه با توجه به قضیه ۲، $\theta_1^t \leq 1$ ، $\theta_2^t \leq 1$ است.



شکل 2 ساختار شبکه‌ای پویا شعب بانک

یعنی پس از کاهش متغیر میانی (سپرده) به 0.7، ورودی‌های این مرحله باید 0/41 میزان فعلی شود. پس با 0/41 ورودی‌های مرحله جمع‌آوری سپرده می‌توان مقدار بهینه سپرده (0/7 میزان فعلی) را تولید کرد و سپس با این مقدار سپرده و 0/7 مطالبات غیرجاری می‌توان به اندازه خروجی (سود خروجی) فعلی، خروجی تولید کرد. به همین ترتیب کارایی سال اول و دوم تفسیر می‌شود. جدول 3 کارایی شبکه‌ای پویای ورودی‌محور هر سال را نشان می‌دهد. هیچ واحدی در هر سه سال کارا نشده است و همانطور که در نمرات کارایی کل سه سال (ستون آخر جدول 2) نیز دیده شد کارایی هیچ واحدی 1 نشد. در صورتی یک واحد کارایی 1 می‌شود که در هر سه سال کارا عمل کرده باشد و همانطور که در جدول 3 مشخص است هیچ واحدی وجود ندارد که در هر سه سال کارا باشد.

پس مدل بررسی می‌کند که با ثابت نگه داشتن و حفظ خروجی‌های شبکه (سود خروجی هر سال) چه میزان می‌توان ورودی‌ها را کم کرد تا به کارایی رسید. جدول 2 نتایج تحلیل داده‌ها و نمرات کارایی شبکه‌ای پویای کل و کارایی یخشی هر دوره را نشان می‌دهد. ستون آخر میزان کارایی شبکه‌ای پویای کل سه سال را نشان می‌دهد. کارایی کل برای واحد 1، 0/63 شده است یعنی به طور متوسط ورودی‌های خود را به 63 درصد میزان فعلی باید برساند. مابقی ستون‌ها کارایی مراحل هر سال را که بیانگر سهم و نقش هر مرحله در کاهش ورودی‌ها است، نشان می‌دهد. برای مثال کارایی مرحله سودآوری سال سوم واحد 1، 0/7 شده است یعنی با 0/7 ورودی‌های این مرحله (سپرده و مطالبات غیرجاری و سود برگشتی سال 2) نیز می‌توان همین میزان سود را تولید کرد و کارایی مرحله جمع‌آوری سپرده این سال، 0/41 شده است

جدول 2: کارایی بخشی هر مرحله

واحد	مرحله 1-سال	مرحله 2-سال	مرحله 1-سال	مرحله 2-سال	مرحله 1-سال	مرحله 2-سال	کارایی کل
1	0/55	0/88	0/61	1	0/41	0/70	0/63
2	0/31	0/58	0/41	0/79	0/52	1	0/52
3	0/34	0/85	0/42	1	0/29	0/89	0/51
4	0/51	0/61	0/37	0/58	0/43	0/91	0/51
5	0/53	1	0/59	1	0/52	1	0/69
6	0/44	1	0/51	0/93	0/31	0/76	0/57
7	1	1	1	1	0/59	0/81	0/89
8	0/29	0/78	0/46	1	0/36	1	0/53

0/38	0/56	0/19	1	0/41	0/43	0/22	9
0/76	1	0/71	1	0/58	1	0/69	10
0/62	1	0/43	1	0/39	0/91	0/61	11
0/60	0/79	0/41	1	0/49	0/88	0/51	12
0/54	0/79	0/44	0/78	0/48	0/59	0/50	13
0/56	0/78	0/51	0/90	0/51	0/63	0/41	14
0/70	1	0/54	1	0/68	0/73	0/65	15
0/72	0/58	0/54	0/52	0/53	1	1	16
0/60	0/51	0/42	0/83	0/62	0/79	0/58	17
0/44	1	0/52	0/26	0/15	0/76	0/30	18

در پژوهش حاضر با توجه به ناتوانی مدل‌های سنتی، شبکه‌ای و پویا در ارزیابی ساختارهای دومرحله‌ای پویا و همچنین ضعف مدل‌های شبکه‌ای پویای موجود در پاسخ به چالش‌های محاسبه کارایی بخشی و دوره‌ای چنین ساختاری، یک مدل پوششی شعاعی ورودی‌محور توسعه داده شد و با استفاده از قضایای اعتبار مدل اثبات شد. نشان داده شد که مدل علاوه بر کارایی شبکه‌ای پویای کل، کارایی تک تک مراحل و دوره‌ها را نیز بهینه می‌کند. همچنین تصویر و الگویی که مدل هر واحد را با آن مقایسه می‌کند اثبات شد که در تمامی مراحل و دوره‌ها کارا است. در ارزیابی ساختارهای شبکه‌ای پویا (شکل 1) سه بحث و چالش اصلی وجود دارد. یکی نحوه برخورد با متغیرهای میانی و بین زمانی و چگونگی تعیین مقدار بهینه آن‌ها می‌باشد.

واحد 21 در سال اول و دوم و واحد 16 تنها در سال اول کارا است. اگر به نمرات کارایی مرحله جمع‌آوری سپرده و سودآوری سال اول و دوم واحد 21 و سال اول واحد 16 در جدول 2 نگاه شود، مشخص می‌شود که در هر دو مرحله این سال‌ها کارا هستند. واحد 10 علی‌رغم اینکه در مرحله سودآوری سال اول و دوم کاراست اما به دلیل عدم کارایی در مرحله جمع‌آوری سپرده، در این دو سال ناکارا شده است. بنابراین همانطور که اثبات شد تنها در صورتی یک واحد در یک سال کارا می‌شود که در هر دو مرحله آن سال کارا شده باشد و یک واحد در صورتی کارای کل می‌شود که در هر سال کارا باشد، پس تنها در صورتی یک واحد کارای کل می‌شود که در همه مراحل همه سال‌ها کارا عمل کرده باشد.

5- نتیجه‌گیری

جدول 3: کارایی دوره‌ای هر سال

واحد	کارایی سال 1	کارایی سال 2	کارایی سال 3	واحد	کارایی سال 1	کارایی سال 2	کارایی سال 3
1	0.68	0.77	0.53	10	0.81	0.75	0.83
2	0.42	0.56	0.71	11	0.73	0.63	0.66
3	0.54	0.65	0.53	12	0.66	0.69	0.56
4	0.55	0.45	0.62	13	0.54	0.6	0.58
5	0.72	0.75	0.71	14	0.50	0.67	0.62
6	0.66	0.68	0.49	15	0.68	0.81	0.72
7	1	1	0.68	16	1	0.53	0.56
8	0.49	0.68	0.62	17	0.66	0.70	0.46
9	0.30	0.65	0.34	18	0.48	0.19	0.71

کارایی میانگین نسبت کاهش ورودی‌های کل ساختار دومرحله‌ای پویا را نشان می‌دهد. اثبات شد که مدل همزمان کارایی کل و کارایی مراحل و دوره‌ها را بهینه و محاسبه می‌کند و یک واحد تنها در صورتی کارایی کل می‌شود که در تمام مراحل و دوره‌ها کارا باشد.

چالش سوم ارزیابی ساختارهای شبکه‌ای پویا و محاسبه کارایی بخشی و دوره‌ای، تعیین مرز کارایی و معرفی الگو برای واحدهای ناکارا است. مزیت مدل‌های تک‌مرحله‌ای تحلیل پوششی داده‌ها این است که علاوه بر ارزیابی واحدهای تحت بررسی، برای هر واحد ناکارا با معرفی الگو، چگونگی کارا شدن را نشان می‌دهد. جهت ساخت مدل پژوهش ابتدا مجموعه امکانات تولید (PPS) ساختار دومرحله‌ای پویا با تمام متغیرهای ممکن تعریف و بر مبنای آن تصویر (الگوی) واحد مورد ارزیابی بیان شد. در قضیه 6 اثبات شد که این الگو و تصویر کارایی شبکه‌ای پویا است. همچنین نشان داده شد که در تمام مراحل و دوره‌ها نیز کارا است. بنابراین مدل، هر واحد (DMU) را با یک واحد روی مرز کارایی مقایسه می‌کند و برای هر واحد ناکارا تصویر بهینه و نحوه کارا شدن را نشان می‌دهد. در مدل ارائه شده امکان کاهش ورودی‌ها به صورت شعاعی وجود دارد و مثلاً ورودی‌های مرحله اول یک دوره همگی به نسبت یکسان کاهش می‌یابند. پیشنهاد می‌شود مبتنی بر ایده راسل حالت غیر شعاعی آن که نسبت کاهش هر ورودی متفاوت از دیگری است نیز ارائه شود. نتایج دو مدل در کنار یکدیگر اطلاعات کامل‌تری از عملکرد مراحل و کل ساختار می‌دهد. لطفی و همکاران (2007) رتبه‌بندی شعب بانک با داده‌های فاصله‌ای و برزگرزاد و همکاران (2014) رتبه‌بندی با استفاده از نقاط ایده‌آل و ضدایده‌آل را انجام دادند [40,39]. باتوجه به اینکه روش‌های پیشنهادی آن‌ها برای ساختارهای ایستا تک مرحله‌ای بود، توسعه این روش‌ها به ساختارهای دومرحله‌ای پویا از دیگر پیشنهادات برای تحقیقات آینده است.

متغیرهای میانی و بین‌زمانی نقش دوگانه دارند و خروجی یک مرحله یا دوره و ورودی مرحله یا دوره بعدی هستند و بنابراین هرچه بیشتر باشند عملکرد مرحله اول یا دوره اول بهتر و مرحله دوم یا دوره دوم بدتر می‌شود و برعکس. در مدل پژوهش که هدف حداقل کردن ورودی‌های ساختار با ثابت نگه داشتن خروجی‌ها است، مرحله‌ای مقدار بهینه این متغیرها را تعیین می‌کند که این متغیرها ورودی آن هستند چرا که این مقدار بهینه به کاهش ورودی‌های ساختار شبکه‌ای پویا کمک می‌کند. این مدل به صورت رو به عقب و برگشتی (Backward) مراحل را کارا می‌کند یعنی ابتدا مرحله آخر، آخرین دوره را کارا می‌کند و مرحله به مرحله به عقب برمی‌گردد تا اولین مرحله اولین دوره کارا شود، به این ترتیب کل ساختار شبکه‌ای پویا کارا می‌شود.

بحث دیگر (چالش دوم) در مدل‌های شبکه‌ای پویا ارتباط بین کارایی کل و کارایی مراحل و دوره‌ها است. در مدل پژوهش با کارا شدن تک تک مراحل مقدار بهینه تمام متغیرها تعیین می‌شود و به این ترتیب با مقایسه ورودی‌های فعلی و بهینه ساختار شبکه‌ای پویا، کارایی کل محاسبه می‌شود. ورودی‌محور به این معنی است که با ثابت نگه داشتن خروجی‌های فعلی ساختار شبکه‌ای پویا، ورودی‌های این ساختار چقدر می‌تواند کاهش پیدا کند. چون مراحل به یکدیگر با متغیرهای میانی و بین‌زمانی متصل هستند و عملکردشان روی یکدیگر تاثیر می‌گذارد، میزان کاهش ورودی‌های هر مرحله تحت تاثیر میزان کاهش ورودی‌های مرحله بعدی که بخشی از خروجی این مرحله را تامین می‌کند است. بنابراین مدل، از آخرین مرحله آخرین دوره ورودی‌های هر مرحله را بهینه می‌کند تا اولین مرحله اولین دوره و به این ترتیب با کارا شدن تمام مراحل کل ساختار شبکه‌ای پویای کارا می‌شود و از مقایسه ورودی‌های فعلی با ورودی‌های بهینه، کارایی کل محاسبه می‌شود. پس کارایی کل بیانگر عملکرد تک تک مراحل و نمره

classification of two-stage DEA models. *Surveys in Operations Research and Management Science*, 19: 1-16.

10. Zhang, L. (2017). Dynamic network data envelopment analysis based upon technology changes, *Information Systems and Operational Research*, 139. 37.

11. An, Q., Meng, F., Xiong, B., Wang, Z., Chen, X. (2018). Assessing the relative efficiency of Chinese high-tech industries: a dynamic network data envelopment analysis approach, *Ann. Oper. Res.*, 479, 18.

12. Kao, C., & Hwang, S. N. (2008). Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan. *European Journal of Operational Research*, 185, 418-429.

13. Chen, Y., Cook, W. D., Li, N., & Zhu, J. (2009). Additive efficiency decomposition in two-stage DEA. *European Journal of Operational Research*, 196, 1170-1176.

14. Despotis, K., D., Koronakos, G., Sotiros, D. (2016). Composition versus decomposition in two-stage network DEA: a reverse approach. *Journal of Productivity Analysis*, 45, 71-87.

15. Tone, K., & Tsutsui, M. (2009). Network DEA: A slacks-based measure approach. *European Journal of Operational Research*, 197, 243-252.

16. Cook, W. D., Zhu, J., Bi, G. B., & Yang, F. (2010). Network DEA: Additive efficiency decomposition. *European Journal of Operational Research*, 207, 1122-1129.

17. Nikfarjam, H., Rostamy-Malkhalifeh, M. & Mamizadeh-Chatghayeh, S. (2015). Measuring supply chain efficiency based on a hybrid approach. *Transportation Research Part D*, 39, 141-150.

فهرست منابع

1. Farrell M. J. (1957). The measurement of productive efficiency, *Journal of the Royal Statistical Society*, 120(3), 253-290.

2. Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978), "Measuring the efficiency of decision-making units". *European Journal of Operational Research*, 2, 429-444.

3. Chen, C., Zhu, J., Yu, Y., Noori, H. (2012). A new methodology for evaluating Sustainable product design performance with two-stage Network Data Envelopment Analysis, *European Journal of Operational Research*, 221(1).

4. Wang, Q., Wu, Z., Chen, X. (2019). Decomposition weights and overall efficiency in a two-stage DEA model with shared resources, *Computers & Industrial Engineering*, 14, 7.

5. Fare, R., & Grosskopf, S. (2000). Network DEA. *Socio-Economic Planning Sciences*, 34, 35-49.

6. Nemoto, J., & Goto, M. (1999). Dynamic data envelopment analysis: Modeling intertemporal behavior of a firm in the presence of productive inefficiencies. *Economics Letters*, 64, 51-56.

7. Nemoto, J., & Goto, M. (2003). Measurement of dynamic efficiency in production: An application of data envelopment analysis to Japanese electric utilities. *Journal of Productivity Analysis*, 19, 191-210.

8. Banker, R.D., Charnes, A., U cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale efficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30, 1078-1092.

9. Halkos. G. E., Tzeremes, N. G., Kourtzidis, S. A. (2014). A unified

- European Journal of Operational Research*, 239, 1-16.
27. Fukuyama, H., & Weber, W.L. (2015). Measuring Japanese bank performance: A dynamic network DEA approach. *Journal of Productivity Analysis*, 44(3), 249-264.
28. Liu, D. (2017). Evaluating the multi-period efficiency of East Asia airport companies. *Journal of Air Transport Management*, 59: 71-82.
29. A. Esmailzadeh, R. K. Matin. (2018). Multi-period efficiency measurement of network production systems. *Measurement*, doi: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2018.12.024>.
30. Hosseini, K., Stefaniec, A. (2019). Efficiency assessment of irans petroleum refining industry in the presence of unprofitable output: a dynamic two-stage slacks-based measure. *Energy*, 189.
31. Tavana, M., Izadikhah, M., Di Caprio, D., Farzipoor Saen, R. (2017). A new dynamic range directional measure for two-stage data envelopment analysis models with negative data. *Computers & Industrial Engineering*, doi: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2017.11.024>.
32. Ching-Cheng Lu, Wu Dan, Xiang Chen, Chih-Kuo Tseng & Kuowei Chou. (2019). Evaluation of the operating performance of Taiwanese machine tool industry with the dynamic network DEA model, *Enterprise information systems*, 17, 96.
33. Kao, C. (2017). Dynamic Systems. *Network Data Envelopment Analysis, International Series in Operations Research & Management Science*, 240, chapter 17, pp. 409-431.
34. Xiong, X., Yang, G. Zhong, C. G. (2018). Assessing R&D efficiency using a
18. Lee, H. S. (2020). Efficiency decomposition of the network DEA in variable returns to scale: an additive dissection in losses, *Omega*, doi: <https://doi.org/10.1016/j.omega.2020.102212>.
19. Fukuyama, H. & Mirdehghan, S.M. (2012). Identifying the efficiency status in Network DEA. *European Journal of Operational Research*, 220, 85-92.
20. Rostamy-Malkhalifeh, M. & Mollaeian, E. (2012). Evaluating performance supply chain by a new non-radial network DEA model with fuzzy data. *Journal of Data Envelopment Analysis and Decision Science*, 9.
21. Rostamy-Malkhalifeh, M., Mollaeian, E. & Mamizadeh-Chatghayeh, S. (2013). A New Non-radial Network DEA Model for Evaluating Performance Supply Chain. *Indian Journal of Science and Technology*, 6, 3.
22. Yang, G. L., Fukuyama, H., Song, Y. (2018). Measuring the inefficiency of Chinese research universities based on a two-stage network DEA model, *Journal of Informetrics*, 12, 10-30.
23. Tone, k., & Tsutsui, M. (2010). Dynamic DEA: A slacks-based measure approach. *Omega*, 38, 3-4.
24. Chen, Chien M., & van Dalen, J. (2010). Measuring dynamic efficiency: theories and an integrated methodology. *European Journal of Operational Research*, 203, 749-760.
25. Kao, C. (2013). Dynamic data envelopment analysis: A relational analysis. *European Journal of Operational Research*.
26. Kao, C. (2014b). Network data envelopment analysis: A review.

two-stage dynamic DEA model: A case study of research institutes in the Chinese Academy of Sciences, *Journal of Informetrics*, 12, 784-805.

35. Seyedboveir, S., Kordrostami, S., Daneshian, B., Amirteioori, A. (2017). Cost Efficiency Measurement in Data Envelopment Analysis with Dynamic Network Structures: A Relational Model, *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 34, 5.

36. Wanke, P., Barros, C.P. (2016). Efficiency in latin American airlines: a two-stage approach combining virtual frontier dynamic DEA and Simplex Regression, *Journal of Air Transport Management*, 54, 93-103.

37. Kalantary, M., Farzipoor Saen, R. (2018). Assessing Sustainability of supply chains: an inverse network dynamic DEA model, *Computers & Industrial Engineering*, doi: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2018.11.009>.

38. Tavana, M., Khalili-Damghani, K., Arteaga, F., J., Hosseini, A. (2019). *Computers & Industrial Engineering*, 135, 143-155.

39. Hosseinzadeh Lotfi, F., Navabakhs, M, Tehranian, A., Rostamy-Malkhalifeh, M. & Shahverdi, R. (2007). Ranking Bank Branches with Interval Data The Application of DEA. *International Mathematical Forum*, 2, 9, 429-440.

40. Barzegarinegad, A., Jahanshahloo, G. & Rostamy-Malkhalifeh, M. (2014). A Full Ranking for Decision Making Units Using Ideal and Anti-Ideal Points in DEA. *The Scientific World Journal*, 8.