دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی، خرداد و تیر ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

شرایط ترکیبیاتی برای بعضی تحلیل‌های خطی ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای

سید عباس سید میرزایی[1]، سیامک یاسمی[2]*

(۱) گروه ریاضی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
(۲) دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، پردیس علوم، دانشگاه تهران، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۶/۱۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۰۷/۰۲

چکیده

در جبرِجابجایی ترکیبیاتی، روش‌های متعددی برای برقراری ارتباط بین اشیای ترکیبیاتی و اشیای جبری وجود دارد. در این مقاله از طریق متناظر کردن ایده‌آل‌های تک جمله‌ای با گراف‌ها و مجتمع‌های سادکی به مطالعهٔ این اشیاء می‌پردازیم. مهمترین ایده‌آل‌های تک جمله‌ای قابل بحث، ایده‌آل‌های یالی و ایده‌آل‌های استنلی - ریزنرِ مجتمع‌های سادکی می‌باشند. فرض کنید r یک عدد صحیح مثبت باشد. ایده‌آل تک جمله‌ای I، خطی تا r مرحله اول نامیده می شود هرگاه، برای بعضی اعداد صحیح چون d و برای تمام $0 \leq i < r$ و $j \neq d$، $\beta_{i,i+j}(I) = 0$. در این مقاله سعی شده است بعضی شرایط ترکیبیاتی برای ایده‌آل‌های تک جمله‌ای خالی از مربع فراهم شود که از خاصیت خطی تا r مرحله اول برخوردار شوند. در ادامه ما به کمک تحلیل‌های خطی تا r مرحلهٔ اول ایده‌آل‌های تک جمله‌ای یاد شده، به معرفی مجتمع‌های سادکی (d,r) -وتری که توسعه یافتهٔ مجتمع‌های سادکی d -وتری هستند، می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: مجتمع‌های سادکی (d,r) -وتری، تحلیل خطی، ایده‌ال استنلی– ریزنر، مجتمع‌های سادکی d -بعدی.

*. عهده‌دار مکاتبات:
Email: yassemi@ut.ac.ir

۱. مقدمه

مطالعه جبری خواص ترکیبیاتی و همولوژیکی ایده‌آل‌های تک جمله‌ای در حوزه جبر جابجایی به سرعت در حال توسعه می‌باشد. این مقاله به مطالعه تحلیل آزاد مینیمال از ایده‌آل‌های تک جمله‌ای خالی از مربع می‌پردازد.

فرض کنید $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ یک حلقه چند جمله‌ای روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. یک تحلیل آزاد مدرج مینیمال مدول M به صورت همبافت دقیق زیر بیان می‌شود:

$$0 \to F_p \to F_{p-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0.$$

جایی‌که هر F_i یک d-مدول آزاد مدرج به فرم $\bigoplus_{j\in Z} R(-j)^{\beta_{i,j}(M)}$ بوده، به طوری که تعداد عناصر پایه مینیمال و همه نگاشت‌ها مدرج می‌باشند. مقدار $\beta_{i,j}(M)$، i -امین عدد بتی مدرج از مدول M از درجه j نامیده می‌شود. این اعداد مستقل از انتخاب تحلیل آزاد M هستند. بنابراین یک عدد ثابت مهم برای مدول M در دست داریم.

فرض کنید I یک ایده‌آل تک جمله‌ای از حلقه R و d یک عدد صحیح مثبت باشد. بنابراین ایده‌آل I دارای یک تحلیل d -خطی است، اگر برای تمام iها و $j \neq d$ داشته باشیم $\beta_{i,i+j}(I) = 0$.

I دارای یک تحلیل خطی است هرگاه دارای یک تحلیل d -خطی برای بعضی از dهای صحیح مثبت باشد. از تعریف درمی‌یابیم که اگر یک ایده‌آل تک جمله‌ای چون I دارای تحلیل خطی باشد، آنگاه تمام مولدهای تک جمله‌ای مینیمال ایده‌آل I دارای درجه یکسان هستند. از آنجایی که تحلیل‌های خطی یکی از حالت‌های خاص و بسیار مهم از تحلیل‌های آزاد مینیمال هستند، رده‌بندی ایده‌آل‌هایی که دارای این خاصیت می‌باشند، به عنوان یکی از موضوعات چالش برانگیز در جبرِجابجایی مطرح گردید. لذا در این زمینه فروبرگ توانست این رده‌بندی را برای ایده‌آل‌های تک جمله‌ای خالی از مربع درجهٔ دوم انجام دهد. او تمام ایده‌آل‌های تک جمله‌ای خالی از مربع تولید شده توسط تک جمله‌ای‌های درجه ۲ که تحلیل خطی دارند را مشخص کرد [۱].

توجه کنید که بین ایده‌آل‌های تک جمله‌ای خالی از مربع درجه دوم از حلقه R و گراف‌های ساده متناهی با n راس یک تناظر یک بیک وجود دارد. به هر گراف ساده G با مجموعه رئوس $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$ و مجموعه یال‌های $E(G)$، یک ایده‌آل $I = I(G)$ نسبت داده می‌شود، به طوری که:

$$I(G) = (x_i x_j : \{x_i, x_j\} \in E(G)) \subseteq R$$

فرو برگ در [۱] ثابت کرد که ایده‌آل یالی گراف G دارای تحلیل خطی است اگر و فقط اگر متمم گراف G وتری باشد. پس از فروبرگ این طبیعی به نظر می‌رسید که افرادی قضیهٔ فروبرگ را برای ایده‌آل‌های خالی از مربع بیشتر از درجه ۲ تعمیم دهند. لذا عده‌ای از محققین جهت تعمیم و گسترش قضیهٔ فروبرگ تلاش زیادی کردند در [۵،۴،۳،۲] نویسندگان قسمت "اگر" در قضیهٔ فروبرگ را توسعه دادند، کنون و فریدی در [۶] قسمت "تنها اگر "قضیهٔ مذکور را تعمیم دادند. در حقیقت آن‌ها مفهوم مجتمع‌های وتری را تعریف نمودند و ثابت کردند که اگر ایده‌آل استنلی-ریزنر یک مجتمع سادکی چون Δ تحلیل خطی روی هر میدان داشته باشد آنگاه یک اسکلت معینی از Δ بایستی وتری باشد.

در ادامه کنون و فریدی در [۷] مشخصهٔ میدان را به ۲ محدود کردند و یک شرط لازم و کافی برای یک ایده‌آل تک جمله‌ای خالی از مربع برای داشتن تحلیل آزاد روی میدان با مشخصهٔ ۲ به دست آوردند. آنها در قضیهٔ مذکور نشان دادند که اگر ایده‌آل استنلی-ریزنر یک مجتمع سادکی Δ که توسط یک تک جمله‌ای با درجهٔ مشخص تولید شده

باشد، آنگاه آن ایده‌آل روی میدان با مشخصهٔ ۲ تحلیل آزاد دارد. فرض کنید $r \geq 2$ و $d \geq 1$ اعداد صحیح مثبت باشند. ایده‌آل تک جمله‌ای I، d -خطی تا r مرحله اول نامیده می‌شود. هرگاه برای تمام $0 \leq \mathrm{i} < r$ و $j \neq d$، $\beta_{i,i+j}(I) = 0$. ایده‌آل تک جمله‌ای I را خطی تا r مرحله اول می‌نامیم هرگاه برای بعضی از اعداد صحیح مثبت چون d، تا r مرحله اول d -خطی باشد. افراد دیگری همچون ایزنباد و همکارانش در [۸] از منظر دیگری به قضیه فروبرگ نگاه کردند و در آنجا از مفهوم تحلیل خطی در rمرحله اول، برای ایده‌آل‌های یالی G استفاده نمودند. در سال ۲۰۰۵ ایزنباد و همکارانش این گونه بیان نمودند که، ایده‌آل یالی گراف G دارای تحلیل ۲-خطی در r مرحله اول است. اگر و فقط اگر متمم گراف G هیچ دور القایی از طول s که $4 \leq s \leq r+2$، نداشته باشد.

حال ممکن است، این سوال مطرح شود که آیا می‌توان راجع به ایده‌آل‌های تک جمله‌ای خالی از مربع دلخواه (نه لزوماً از درجه ۲) صحبت کرد و شرایط ترکیبیاتی کافی و (یا) لازم برای تحلیل آزاد ۲ -خطی در r مرحله اول از ایده‌آل‌های تک جمله‌ای را معرفی نمود برای پاسخ دادن به این سوال از تعاریف d-وتری، d-دور کامل جهت‌پذیر برای یک مجتمع سادکی d -بعدی و قضایای مربوط به آنها که توسط خانم فریدی و همکارش در [۶] به چاپ رسیده است، ایده گرفته و مفاهیم جدید (d,r) ـ وتری، (d,r) - دور کامل جهت پذیر را برای مجتمع سادکی d - بعدی بیان کرده و قضایایی را به اثبات می‌رسانیم.

در این مقاله نشان داده می‌شود که اگر ایده‌آل استنلی-ریزنر یک مجتمع سادکی چون Δ دارای تحلیل $(d+1)$ -خطی در r مرحله اول باشد آنگاه d-اسکلت خالص از Δ بایستی (d,r) -دور – کامل – جهت دار باشد. و بیشتر اینکه اگر مشخصه میدان $\mathbb{K}$ برابر ۲ باشد پس d –اسکلت خالص از Δ، (d,r) -وتری خواهد بود. اکنون خودمان را به میدان‌های با مشخصه ۲ محدود می‌کنیم شرایط لازم و کافی برای ایده‌آل‌های تک جمله‌ای خالی از مربع که خطی تا r مرحله اول هستند را بیان می‌کنیم. فرض کنید که ایده‌آل استنلی-ریزنر I_Δ از مجتمع سادکی Δ از درجه $d+1$ تولید شده باشد. در قضیه ۴. ۲ نشان می‌دهیم که ایده‌آل استنلی-ریزنر I_Δ دارای تحلیل $(d+1)$ -خطی در r مرحله اول می‌باشد، اگر و فقط اگر برای هر عدد صحیح $m \geq 0$ (به طور هم ارز برای عدد صحیح $m \geq d$)، m –اسکلت خالص از Δ، (m,r) -وتری خواهد بود.

۲. پیشنیازها و تعاریف

در این بخش تعاریف و چند مفهوم پایه‌ای که در بخش‌های دیگر به کار می‌آیند را بیان می‌کنیم. یک مجتمع *سادکی* Δ روی مجموعه رئوس $V(\Delta) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ یک گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های $V(\Delta)$ می‌باشد، که تحت زیر مجموعه بودن بسته است. یعنی اینکه اگر $F \in \Delta$ و $F' \subseteq \mathrm{F}$ در نتیجه $F' \in \Delta$. هر عنصر Δ را یک وجه از Δ می‌نامند و بعد F، که با $\dim F$ نمایش داده می‌شود برابر است $|F| - 1$، یک وجه با بعد i، یک i -وجه از Δ نامیده می‌شود. بعد Δ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dim\Delta = \max\{\dim F : F \in \Delta\}$$

مجموعه همهٔ وجه‌های ماکزیمال Δ (وجه واره‌های Δ) و مجموعهٔ همهٔ ناوجه‌های مینیمال Δ را به ترتیب با $\mathcal{F}(\Delta)$ و $\mathcal{N}(\Delta)$ نشان می‌دهیم. به علاوه اگر $\mathcal{F}(\Delta) = \{F_1, \ldots, F_s\}$ باشد، آنگاه می‌توان نوشت، $\Delta = < F_1, \ldots, F_s >$. مجتمع سادکی Δ را *خالص* گویند، هرگاه تمام وجه واره‌های آن دارای بعد یکسان باشند. فرض کنید Δ یک مجتمع

سادکی d-بعدی خالص باشد، در این صورت متمم آن مجتمع سادکی‌ای است روی $V(\Delta)$ به طوری که وجه واره‌های آن تمام زیر مجموعه‌های $d+1$ عضوی است که آنها d -وجه‌های Δ نمی‌باشند. این مجتمع را با نماد $\overline{\Delta}$ نشان می‌دهند. مجتمع سادکی Δ را d -کامل گوئیم، هرگاه تمام زیر مجموعه‌های $d+1$ عضوی از $V(\Delta)$ وجه‌ای از Δ باشد. مجتمع سادکی d –کاملِ d -بعدی، روی n رأس را با Λ_n^d نشان می‌دهیم. فرض کنید Δ یک مجتمع سادکی باشد. در این صورت مجتمع سادکی روی همان رئوس Δ که وجه واره‌های آن تمام i وجه‌های Δ باشد را مجتمع سادکی i اسکلت خالص Δ گویند و با $\Delta^{[i]}$ نمایش می‌دهند. یک زیر مجتمع از Δ، مجتمع سادکی می‌باشد که مجموعهٔ وجه واره‌هایش زیر مجموعه‌ای از وجه واره‌های Δ باشد. فرض کنید $W \subseteq V(\Delta)$ در این صورت *زیرمجتمع سادکی القایی* Δ روی W مجتمع $\Delta_W = \{F \in \Delta : F \subseteq W\}$ می‌باشد. به هر مجتمع سادکی Δ روی مجموعه رئوس $\{x_1, \dots, x_n\}$ دو ایده‌آل تک جمله‌ای خالی از مربع از حلقه چند جمله‌ای‌های $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ نسبت داده می‌شود. فرض کنید $F = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\}$ زیر مجموعه‌ای از $V(\Delta)$ باشد. در این صورت x^F را تک جمله‌ای $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_m}$ در نظر می‌گیریم. ایده‌آل استنلی - ریزنر Δ را این گونه $I_\Delta = (x^F : F \notin \Delta)$، و ایده‌آل وجهی را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$I(\Delta) = (x^F : F \in \mathcal{F}(\Delta))$$

مجتمع استنلی – ریزنر ایده‌آل تک جمله‌ای خالی از مربع I که به صورت $\mathcal{N}(I)$ نمایش داده می‌شود، برابر است با تمام آن وجه‌های ایجاد شده توسط تک جمله‌ای‌های خالی از مربع، که متعلق به I نیستند. مجتمع وجه واره‌ای I که بانماد $\mathcal{F}(I)$ نمایش داده می‌شود برابر است با تمام وجه واره‌هایی که توسط مولدهای تک جمله‌ای مینیمال I ایجاد می‌شوند.

فرض کنید F یک q -وجه از Δ باشد که رأس‌های آن $v_0, v_1, \dots, v_q$ هستند. دو ترتیب کلی $v_{i_0} < \dots < v_{i_q}$ و $v_{j_0} < \dots < v_{j_q}$ را هم‌ارز گویند هرگاه $(i_0, i_1, \dots . i_q)$ یک جایگشت زوج از $(j_0, j_1, \dots . j_q)$ باشد. بنابراین برای $q \geq 1$ همهٔ ترتیب‌های کلی روی $v_0 . v_1 . \dots . v_q$ به دو کلاس هم‌ارزی افراز می‌شوند. یک q -وجه جهت‌دار از Δ، یک q -وجه از Δ است که با انتخاب یکی از کلاس‌های هم‌ارزی در نظر گرفته شده است، اگر $v_0, v_1, \dots, v_q$ رأس‌های وجه F باشند، وجه جهت‌دار تعیین شده توسط $v_{i_0} < \dots < v_{i_q}$ را با نماد $[v_{i_0}, \dots, v_{i_q}]$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲ .۱. فرض کنید $F = [v_0, v_1, \dots, v_d]$ یک d-وجه جهت‌دار از یک مجتمع سادکی باشد. برای هر $(d-1)$- فرض کنید v_i یک رأس از $F \setminus f$ باشد.
زیر وجه f از F، جهت القایی f با فرایند زیر تعریف می‌شود.
۱) اگر i فرد باشد، پس جهت f، همان ترتیب رئوسش، در جهت F می‌باشد.
۲) اگر i زوج باشد، پس جهت f، توسط هر جایگشت زوج روی ترتیب رئوسش که در جهت F قرار دارد تعیین می‌شود.
یک دنبالهٔ $F_1, \dots, F_m$ از d - وجه‌های مجتمع سادکی Δ یک d - مسیر بین F_1 و F_m نامیده می‌شود هرگاه برای $1 \leq j \leq m-1$ داشته باشیم: $|F_j \cap F_{j+1}| = d$, مجتمع سادکی d - بعدی خالص Δ را همبند d – مسیری گوئیم هرگاه یک d- مسیر بین هر جفت از d -وجه‌هایش وجود داشته باشد. به زیر مجتمع‌های سادکی ماکسیمال Δ که همبند d - مسیری هستند *مولفه‌های همبند* d - مسیری یک مجتمع سادکی Δ با بعد d گویند.
همچنین کنون در [۶] آورده است که مجتمع سادکی d - بعدی خالص Ω یک دور d - بعدی

است اگر Ω همبند d - مسیری باشد و هر $(d-1)$ - وجه از Ω در تعداد زوج از d - وجه‌ها قرار بگیرد. یک دور d - بعدی Ω، وجه مینیمال نامیده می‌شود هرگاه هیچ دور $d-$ بعدی روی زیر مجموعهٔ اکید از d - وجه‌های آن موجود نباشد. یک دور d -بعدی Ω، در مجتمع سادکی Δ، رأس مینیمال نامیده می‌شود اگر هیچ دور d - بعدی در Δ روی زیر مجموعهٔ اکید از رئوس Ω موجود نباشد یک دور d - بعدی Ω، با وجه‌واره‌های $F_1,\dots,F_m$ جهت‌پذیر است اگر یک انتخاب از جهت‌های $F_1,\dots,F_m$ طوری وجود داشته باشد که برای هر $(d-1)$ - وجه چون f، از Ω، جهت‌های القایی f که توسط F_iهای شامل f ایجاد می‌شوند به دو دسته مساوی از دسته‌بندی جهت‌ها تقسیم شوند. در غیر این صورت می‌گوئیم Ω جهت‌پذیر نمی‌باشد.
فرض کنید G یک گراف باشد. مجموعه‌ی تمام رئوس G را $V(G)$ و مجموعه‌ی تمام یال‌های آن را با $E(G)$ نشان می‌دهیم. متمم گراف G که با نماد G^c نشان داده می‌شود، یک گراف با همان رئوس G است به طوری‌که $\{x,y\}$ یک یال G است اگر و فقط اگر آن یال G^c نباشد. یک زیر گراف $G'\subseteq G$ القایی نامیده می‌شود به طوری‌که، هرگاه $\{v,w\}$ یک یال از G' باشد (جائیکه v و w رئوس G' باشند)، آنگاه $\{v,w\}$ نیز یک یال از G باشد. فرض کنید C یک دور در گراف G باشد. یک وتر یالی است که دو رأس C را به هم وصل می‌کند ولی خودش یالی از G نیست. یک گراف G، وتری است اگر هر دورِ حداقل به طول چهار آن، یک وتر داشته باشد. در ادامه فریدی و همکارش در [۶] به تعاریفی در مورد مجتمع‌های سادکی وتری پرداخته‌اند که نیز به آنها اشاره می‌کنیم.
در حقیقت آنها به تعمیم گراف‌های وتری پرداخته‌اند.

تعریف ۲ .۲. فرض کنید Ω یک دور $d-$ بعدی در مجتمع سادکی Δ باشد. یک مجموعهٔ وتری از Ω در Δ، مجموعهٔ C از $d-$ وجه‌های $\Delta\setminus\Omega$ در مجموعهٔ رئوس Ω می‌باشد، به طوری‌که مجتمع سادکی $\langle \mathcal{F}(\Omega)\cup C\rangle$ شامل دورهای d - بعدی $\Omega_1,\dots,\Omega_m$ برای $m\geq 2$ می‌باشد. که در شرایط زیر صدق می‌کنند.

۱) $\bigcup_{i=1}^{m}\mathcal{F}(\Omega_i)=\mathcal{F}(\Omega)\cup C$.

۲) هر d -وجه از C در تعداد زوج از Ω_1 تا Ω_m قرار دارد.

۳) هر d - وجه از Ω در تعداد فرد از دورهای Ω_1 تا Ω_m قرار دارد.

۴) برای هر $1\leq i\leq m$ داریم $|V(\Omega_i)|<|V(\Omega)|$.

تعریف ۲ .۳. مجتمع سادکی d - بعدی خالص را d - وتری گویند، هرگاه هر دور d - بعدی وجه مینیمال Δ که d - کامل نباشد، در Δ مجموعهٔ وتری داشته باشد.
در تعریف زیر به معرفی d - بستار یک مجتمع سادکی، که نقش زیادی در این فصل دارد، می‌پردازیم. این تعریف مشابه تعریف قبلی از [۶] گرفته شده‌است.

تعریف ۲ .۴. فرض کنید Δ یک مجتمع سادکی d - بعدی باشد. d - بستار Δ با $Cl_d(\Delta)$ نمایش داده می‌شود که رئوس آن همان رأس‌های Δ می‌باشد و d - وجه‌های آن بصورت زیر معرفی می‌گردد.

۱) هر وجه از Δ، $Cl_d(\Delta)$ وجهی ازمی‌باشد.

۲) برای هر $S\subseteq V(\Delta)$ که $|S|\leq d$ باشد داریم $S\in Cl_d(\Delta)$

۳) برای هر $S \subseteq V(\Delta)$ که $|S| > d+1$، اگر تمام زیرمجموعه‌های $d+1$ عضوی S وجهی از Δ باشند آنگاه S وجهی از $Cl_d(\Delta)$ می‌باشد.

۳. مجتمع‌های سادکی (d,r) – وتری

در این قسمت به معرفی مجتمع‌های سادکی (d,r) - وتری و مطالعه خواص آن‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۳. ۱. فرض کنید $r \geq 2$ و $d \geq 0$ اعداد صحیح باشند. مجتمع سادکی d - بعدی را (d,r)- وتری گویند هرگاه هر دور d - بعدی وجه مینیمال آن، با حداکثر $\mathrm{d}+\mathrm{r}+1$ رأس، که d - کامل نیست، در Δ مجموعه وتری داشته باشد.

تعریف ۳. ۲. فرض کنید $\mathrm{r} \geq 2$ و $\mathrm{d} \geq 0$ اعداد صحیح باشند. مجتمع سادکی d - بعدی خالص Δ، یک d – دور کامل (جهت‌دار) نامیده می‌شود هر گاه تمام دورهای d - بعدی با رأس مینیمال (جهت‌دار) که حداکثر $d+r+1$ رأس دارند، d - کامل باشند.

گزاره ۳. ۳. فرض کنید Δ، یک مجتمع سادکی (d,r)- وتری باشد و $W \subseteq V(\Delta)$ در این صورت $\Delta_W^{[d]}$، نیز (d,r) - وتری خواهد بود.

برهان. فرض کنید Δ یک مجتمع سادکی (d,r) - وتری باشد و همچنین فرض کنید W زیر مجموعه‌ای از رئوس Δ باشد. دور d - بعدی وجه مینیمال Ω را در $\Delta_W^{[d]}$ به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که d - کامل نبوده و حداکثر $d+r+1$ رأس داشته باشد. واضح است که Ω یک دور d - بعدی در Δ می‌باشد. همچنین Ω بایستی یک وجه مینیمال در Δ باشد. در غیر این صورت بعضی از زیر مجموعه‌های اکید از d - وجه‌هایش، دور d - بعدی در $\Delta_W^{[d]}$ دارد. لذا، هر دور d - بعدی وجه مینیمال در با حداکثر $\mathrm{d}+\mathrm{r}+1$ رأس که d - کامل نباشد، دارای مجموعه وتری می‌باشد. بنابراین، $\Delta_W^{[d]}$ یک مجتمع سادکی (d,r) - وتری است.

برای اثبات گزاره بعدی نیاز به تکنیک به کار رفته در لم زیر را داریم.

لم۳. ۴. فرض کنید $r \geq 2$ و $d \geq 0$ اعداد صحیح باشند و همچنین فرض کنید که Δ یک مجتمع سادکی (d,r) - وتری باشد. اگر Ω یک d - بعدی با حداکثر $d+r+1$ رأس در Δ باشد، آنگاه مجموعه d - وجه‌های Ω یک d - مرز را در $Cl_d(\Delta)$ روی $\mathbb{Z}_2$ شکل می‌دهند.

برهان. برای اثبات روی تعداد رئوس Ω استقراء می‌زنیم. به کمک [۹] (همچنین گزاره ۳ .۱۱ از [۶] را ببینید)، کمترین تعداد رئوسی که یک دور d - بعدی می‌تواند داشته باشد برابر $d+2$ و این اتفاق وقتی می‌افتد که $\Omega=\Lambda_{d+2}^{d}$. در این حالت $Cl_d(\Delta)_{V(\Omega)}$ یک $d+1$ - سادک است و لذا مجموعه d - وجه‌های Ω یک d - مرز در $Cl_d(\Delta)_{V(\Omega)}$ روی $\mathbb{Z}_2$ ایجاد می‌کند. اکنون فرض کنید مسئله برای دورهای d - بعدی کمتر از k رأس درست باشد و فرض کنید Ω دارای k رأس بوده و داشته باشیم $k \leq d+r+1$ اگر Ω وجه مینیمال نباشد، پس طبق [۹] آن می‌تواند به دورهای d - بعدی وجه مینیمال تقسیم بشود. حال به منظور نشان دادن این که مجموع d - وجه‌های Ω یک d - مرز را در $Cl_d(\Delta)_{V(\Omega)}$ شکل می‌دهد، بایستی نشان دهیم که مجموع d - وجه‌های هر دور وجه مینیمال یک d - مرز در $Cl_d(\Delta)_{V(\Omega)}$ روی $\mathbb{Z}_2$ ایجاد می‌کنند. بنابراین بدون کاستن از کلیت مسئله، می‌توانیم فرض کنیم که Ω یک دور d - بعدی وجه مینیمال باشد. اگر Ω یک مجتمع سادکی d - کامل باشد، پس $Cl_d(\Delta)_{V(\Omega)}$ یک $(\mathrm{k}-1)$- سادک در $Cl_d(\Delta)$ خواهد بود و مجموع d - وجه‌های Ω یک d- مرز در $Cl_d(\Delta)$ و روی

میدان $\mathbb{Z}_2$ شکل می‌دهد. بنابراین، فرض کنید که Ω یک مجتمع سادکی d-کامل نباشد. طبق فرض، Δ مجتمع سادکی (d,r) - وتری می‌باشد. لذا Ω یک مجموعه وتری چون C دارد. بنابراین، $\Omega_1,\dots,\Omega_m$ دورهای d-بعدی وابسته به C وجود دارند، که در شرایط تعریف۲. ۲ صدق می‌کنند. چون $|V(\Omega_i)|<|V(\Omega)|$ برای $1\le i\le m$، پس به کمک فرض استقراء می‌توان نتیجه گرفت که مجموع d - وجه‌های یک d - مرز در $Cl_d(\Delta)_{V(\Omega_i)}$ روی $\mathbb{Z}_2$ شکل می‌دهد. به کمک تعریف مجموعه‌های وتری، تساوی زیر را روی $\mathbb{Z}_2$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum(d-faces\ of\ \Omega_i)\right)=\sum(d-faces\ of\ \Omega)$$

بنابراین، مجموع d - وجه‌های Ω یک d - مرز در $Cl_d(\Delta)_{V(\Omega)}$ روی میدان $\mathbb{Z}_2$ ایجاد می‌کند.
حال آماده هستیم تا گزاره زیر را در مورد صفر شدن گروه‌های هومولوژیکی مربوط به بعضی مجتمع‌های سادکی بیان کنیم. توجه دارید که i-امین هومولوژی القایی روی میدان $\mathbb{K}$ را برای هر مجتمع سادکی Δ با $\widetilde{H}_i(\Delta;\mathbb{K})$ نشان می‌دهند.

گزاره ۳. ۵. فرض کنید $r\ge 2$ و $d\ge 0$ اعداد صحیح بوده و همچنین فرض کنید که Δ یک مجتمع سادکی (d,r)-وتری باشد. در این صورت برای هر $W\subseteq V(\Delta)$ با $|W|\le d+r+1$ و هر میدان $\mathbb{K}$ با مشخصه ۲، داریم $\widetilde{H}_l(Cl_d(\Delta)_W;\mathbb{K})=0$ برای $0\le l\le d-2$ و $l=d$.

برهان. با استفاده از قضیه ۳. ۳ از [۱۰]، کافی است برای حالت $\mathbb{K}=\mathbb{Z}_2$ مسأله را اثبات کنیم. به کمک تعریف بستار می‌توان نتیجه گرفت که $\widetilde{H}_l(Cl_d(\Delta)_W;\mathbb{Z}_2)=0$ برای $0\le l\le d-2$. بنابراین کافی است نشان دهیم برای هر $W\subseteq V(\Delta)$ با $|W|\le d+r+1$ عبارت $\widetilde{H}_l(Cl_d(\Delta)_W;\mathbb{Z}_2)$ برابر صفر است. قرار دهید $\Gamma=(\Delta_W)^{[d]}$. به کمک لم ۵ .۵ از [۶] کافی است نشان دهیم که $\widetilde{H}_d(Cl_d(\Gamma);\mathbb{Z}_2)=0$. بنابر گزاره ۳. ۳. می‌توانیم نتیجه بگیریم که Γ یک مجتمع سادکی (d,r)- وتری است. فرض کنید که $\widetilde{H}_d(Cl_d(\Gamma);\mathbb{Z}_2)\neq 0$. پس بنا به قضیه ۵ .۲ از [۶] نتیجه می‌گیریم که $Cl_d(\Gamma)$ شامل یک دور d- بعدی است که مجموع d- وجه‌هایش یک d- مرز را شکل نمی‌دهند. به کمک تعریف بستار، این دور در Γ قرار می‌گیرد. بنابراین، یک دور d - بعدی در Γ داریم که مجموع d - وجه‌هایش یک d-مرز در $Cl_d(\Gamma)$ نمی‌باشند. این با لم۴ .۳ در تناقض است. پس داریم $\widetilde{H}_d(Cl_d(\Gamma);\mathbb{Z}_2)=0$.
گزاره زیر قضیه ۳ .۴ از [۷] را در حالت کلی‌تر بیان می‌کند. این گزاره نشان می‌دهد خاصیت وتری داشتن می‌تواند توسط بستار اسکلت‌های خالص بعضی از مجتمع‌های سادکی به ارث برده شود. در این اثبات ∂_i به عنوان، i-امین نگاشت دیفرانسیل مربوط به همبافت‌های زنجیره‌ای تعریف شده در گروه‌های هومولوژیکی مجتمع سادکی می‌باشد.

گزاره ۳. ۶. فرض کنید $r\ge 2$ و $d\ge 0$ اعداد صحیح باشند. فرض کنید که Δ یک مجتمع سادکی (d,r)- وتری باشد. همچنین فرض کنید برای هر $m>d$، هر دور $m-$ بعدی، m ناکاملِ وجه مینیمالِ ۱- کامل در $Cl_d(\Delta)$، با حداکثر $m+r+1$ رأس در $Cl_d(\Delta)$ یک مجموعه وتری داشته باشد. در این صورت برای $t\ge 0$ مجتمع سادکی $Cl_d(\Delta)^{[t]}$ یک (t,r)- وتری خواهد بود.

برهان. با توجه به تعریف d- بستار، می‌دانیم که $Cl_d(\Delta)$ برای $t<d$ مجتمع سادکی t- کامل می‌باشد. بنابراین تبصره ۳. ۴ از [۶] نتیجه می‌دهد که برای هر $t<d$ مجتمع $Cl_d(\Delta)^{[t]}$، یک t - وتری بوده و لذا آن (t,r)- وتری خواهد بود. برای

حالت‌های باقی‌مانده می‌توانیم روی t استقراء بزنیم. برای حالت $t=d$، داریم $Cl_d(\Delta)^{[d]}=\Delta$ و این پایه استقراء را ثابت می‌کند. حال فرض می‌کنیم $t>d$. فرض کنید Ω یک دور t- بعدی وجه مینیمال در $Cl_d(\Delta)^{[t]}$ با حداکثر تعداد رئوس $t+r+1$ باشد که t- کامل نیست. بایستی نشان دهیم که Ω یک مجموعه وتری در $Cl_d(\Delta)^{[t]}$ دارد. اگر $Cl_d(\Delta)^{[t]}$ یک مجتمع سادکی ۱- کامل باشد، پس بنا به فرض Ω یک مجموعه وتری در $Cl_d(\Delta)^{[t]}$ دارد. بنابراین، فرض می‌کنیم که ۱- کامل نباشد. پس، رئوسی چون $u.v\in V(\Delta)$ وجود دارند که آنها در یک t- وجه مشترکی از Ω قرار ندارند. فرض $F_1,\dots,F_k$ همگی t- وجه‌هایی از Ω باشند که همگی شامل v هستند. بنا به [۹] (همچنین گزاره ۲ .۵ از [۷] را ببینید)، می‌دانیم که مولفه‌های همبندی (t-1)- مسیری از $(F_1\{v\},\dots,F_k\{v\})$ دوره‌های (t-1)- بعدی هستند. این دورها را $\Phi_1,\dots,\Phi_m$ می‌نامیم. برای هر $1\le i\le m$، فرض کنید $P_i\subseteq\{1,\dots,k\}$ باشد به طوری که $j\in P_i$ اگر و فقط اگر $F_j\setminus\{v\}\in\Phi_i$. چون برای هر j وجه $F_j\setminus v$ دقیقاً به یکی از دورهای $\Phi_1,\dots,\Phi_m$ متعلق می‌باشد، مجموعه‌های $P_1,\dots,P_m$ یک افراز روی $\{1,\dots,k\}$ ایجاد می‌کند. به کمک فرض استقراء، $Cl_d(\Delta)^{[t-1]}$ یک مجتمع $(t-1,r)$- وتری است. از طرف دیگر، رأس v نمی‌تواند رآسی از $\Phi_1,\dots,\Phi_m$ باشد، لذا، هر یک از این دورها حداکثر t+r رأس دارند. بنابراین، لم ۳. ۴ نتیجه می‌دهد که برای هر $1\le i\le m$، مجموع $(t-1)$- وجه‌های Φ_i یک $(t-1)$- مرز در $Cl_{t-1}\left(Cl_d(\Delta)^{[t-1]}\right)$ روی $V(\Phi_i)$ و میدان $\mathbb{Z}_2$ شکل می‌دهند. به کمک لم ۲. ۱۰ از [۷] می‌دانیم که برای هر $l\ge t-1$، مجموعه l-وجه‌های $Cl_d(\Delta)$ و $Cl_{t-1}\left(Cl_d(\Delta)^{[t-1]}\right)$ شبیه هم هستند. این نتیجه می‌دهد که، مجموع $(t-1)$- وجه‌های Φ_i برای تمام iهای معرفی شده، $(t-1)$- مرز در $Cl_d(\Delta)$ شکل می‌دهند. در نتیجه، برای هر i وجود دارد t- وجه‌های $A_1^i,\dots,A_{l_i}^i$ در $Cl_d(\Delta)_{V(\Phi_i)}$ به طوری که:

$$\partial_t\left(\sum_{j=1}^{l_i}A_j^i\right)=\sum\left((t-1)-faces\ of\ \Phi_i\right).$$

بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض کنید که انتخاب $A_1^i,\dots,A_{l_i}^i$ مینیمال باشد. یعنی این‌که هیچ زیر مجموعه اکید از آنها در رابطه (۱) صدق نکند. فرض کنید Ω_i یک مجتمع سادکی باشد که وجه وارههایش بدین صورت معرفی می‌شوند. $\{F_j|j\in P_i\}\cup\{A_1^i,\dots,A_{l_i}^i\}$. با توجه به [۹] (همچنین گزاره ۲ .۴ از [۷] را ببینید)، می‌دانیم که برای $1\le i\le m$، هر Ω_i دور t- بعدی بوده و $V(\Omega_i)\subseteq V(\Omega)$ به طوریکه $u\notin V(\Omega_i)$. چون Ω یک دور t- بعدی وجه مینیمال می‌باشد، پس هر Ω_i بایستی حداقل شامل یک t- وجه باشد که در Ω نمی‌باشد. تمام این t- وجه‌ها را در مجموعه غیر تهی C جمع‌آوری می‌کنیم.

حال $C=\{A_j^i\notin\Omega|1\le i\le m.1\le j\le l_i\}$ نشان می‌دهیم که C یک مجموعه وتری از Ω در $Cl_d(\Delta)^{[t]}$ می‌باشد. گردایه همه t- وجه‌های Ω و همه آنهایی که حتی تکراری، در $\Omega_1,\dots,\Omega_m$ قرار دارند را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $H_1,\dots,H_s$ همان t- وجه‌های این گردایه باشند که تعداد فرد بار، تکرار می‌شوند. بنابراین روی $\mathbb{Z}_2$ داریم

$$\sum_{i=1}^{s}H_i=\sum(t-faces\ of\ \Omega)+\sum_{i=1}^{m}\sum(t-faces\ of\ \Omega_i).$$

چون Ω و $\Omega_1,\dots,\Omega_m$ دورهای t- بعدی هستند، بنا به [۹] (همچنین گزاره ۵ .۱ از [۶] را ببینید)، مجموع t- وجه‌های هر یک از آنها یک دور همولوژیکی روی $\mathbb{Z}_2$ می‌باشد. بنابراین بنا بر رابطه (۲) در بالا، تساوی زیر را روی $\mathbb{Z}_2$ داریم.

$\partial_t(\sum_{i=1}^{s} H_i) = \partial_t(\sum(t - faces\ of\ \Omega)) + \sum_{i=1}^{m} \partial_t(\sum(t - faces\ of\ \Omega_i)) = 0.$

در نتیجه بنا بر [۹] (همچنین گزاره ۵. ۱ از [۶] را ببینید) مولفه‌های همبندی t- مسیر از مجتمع سادکی $(H_1, \dots, H_s)$ دورهای t- بعدی هستند. این دورها را با $\Omega_{m+1}, \dots, \Omega_M$ نام گذاری می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که مجموعه C یک مجموعه وتری است که Ω را به دورهای $\Omega_1, \dots, \Omega_M$ تقسیم بندی می‌کند. به کمک رابطه (۲) و بعد از تغییر ترتیب جمع‌ها، تساوی زیر را روی $\mathbb{Z}_2$ داریم:

$\sum(t - faces\ of\ \Omega) = \sum_{i=1}^{M} \sum(t - faces\ of\ \Omega_i)$

توجه دارید که C دقیقاً مجموعه آن t- وجه‌های طرف راست رابطه بالا است که به Ω متعلق نمی‌باشد.

پس رابطه بالا نشان می‌دهد که شرایط (۲) و (۳) از مجموعه وتری برای C در دست است. همچنین با توجه به ساخت تمام t- وجه‌های مربوط به Ω و یا C، آنها حداقل در یکی از Ω_iها واقع می‌شوند. لذا، شرط (۱) تعریف مجموعه وتری هم برقرار است. چون هیچ یک از $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ شامل u نمی‌باشند، برای هر $1 \leq i \leq m$ داریم $|V(\Omega_i)| < |V(\Omega)|$. بنابراین برای اثبات خاصیت (۴) از مجموعه وتری، کافی است نشان دهیم که $\Omega_{m+1}, \dots, \Omega_M$ شامل v نمی‌باشند. یادآوری می‌کنیم که $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ مولفه‌های همبندی (t−1)- مسیری از $(F_1 \backslash \{v\}, \dots, F_k \backslash \{v\})$ هستند و لذا هیچ دو مولفه مجزا یک وجه از فرم $F_i \backslash \{v\}$ را به صورت مشترک ندارند. بنابراین هر وجه F_i فقط در یکی از دورهای $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ (توجه کنید که A_j^i برای $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq l_i$، شامل v نیست) قرار می‌گیرد. همچنین هر F_i یک وجه از Ω می‌باشد و لذا، با توجه به انتخاب $H_1, \dots, H_s$، $F_i = H_j$ را برای $1 \leq i \leq k$ و هر $1 \leq j \leq s$ نخواهیم داشت. در نتیجه بر اساس ساخت $\Omega_{m+1}, \dots, \Omega_M$، هیچ کدام از F_i ها در این دورها قرار نمی‌گیرند. به یاد داریم که $F_1, \dots, F_k$ فقط t- وجه‌هایی از Ω هستند که شامل v نمی‌باشند و هیچ یک از t- وجه‌های C شامل v نیست، چون آنها زیر مجموعه $\bigcup_{i=1}^{m} V(\Phi_i)$ هستند. این یعنی این‌که v رأسی از $\Omega_{m+1}, \dots, \Omega_M$ نیست و این اثبات را کامل می‌کند.

۴. تحلیل خطی تا مرحله r

دراین بخش معیارهای ترکیباتی برای ایده‌آل‌های تک جمله‌ای خالی از مربع به منظور تحلیل خطی تا مرحله r را مهیا می‌کنیم. اولین نتیجه مهم در این بخش، به قضیه۴ .۲ مربوط می‌شود. در این قضیه می‌آید که اگر ایده‌آل استنلی- ریزنر از یک مجتمع سادکی چون Δ دارای تحلیل (d+1)- خطی در r مرحله اول باشد آنگاه d- اسکلت Δ بایستی (d,r)- دوری- کامل جهت‌دار باشد. و هرگاه مشخصه میدان $\mathbb{K}$ برابر ۲ باشد پس $\Delta^{[d]}$ مجتمع سادکی (d,r)- وتری است. بنابراین، قضیه۴ .۲ شرایط لازم را برای تحلیل خطی تا مرحله r را برای ایده‌آل‌های تک جمله‌ای خالی از مربع فراهم می‌کند. برای اثبات قضیه۴. ۲ به بیان و اثبات گزاره زیر نیاز داریم که به آن می‌پردازیم.

گزاره ۴. ۱. فرض کنید $r \geq 2$ و $d \geq 1$ اعداد صحیح باشند و همچنین فرض کنید که Δ یک مجتمع سادکی باشد. در این صورت ایده‌آل استنلی- ریزنر Δ دارای (d+1)- خطی در r مرحله اول روی میدان $\mathbb{K}$ می‌باشد اگر و فقط اگر برای هر عدد صحیح $l \neq d - 1$ و هر زیر مجموعه $W \subseteq V(\Delta)$ با $|W| \leq l + r + 1$ داشته باشیم $\widetilde{H}_l(\Delta_W; \mathbb{K}) = 0$.

برهان. چون ایده‌آل استنلی- ریزنر Δ، که آن را با I_Δ نشان می‌دهیم. دارای تحلیل (d+1)- خطی در

r مرحله اول می‌باشد. لذا بنا به تعریف، $\beta_{i.j}(I_\Delta)=0$ برای هر $i\le r$ و برای $j\neq i+d+1$. از طرفی طبق فرمول هاکستر داریم:

$$\beta_{i.j}(I_\Delta)=\sum_{|W|=j.W\subseteq V(\Delta)}\dim_k \widetilde{H}_{j-i-2}(\Delta_W;\mathbb{K})$$

برای هر $i\le r$ و $j\neq i+d+1$ بنابراین $\widetilde{H}_{j-i-2}(\Delta_W;\mathbb{K})=0$ برای هر $i\le r$ و هر $j\neq i+d+1$ و $|W|=j$. در نتیجه می‌توان نتیجه گرفت که $\widetilde{H}_l(\Delta_W;\mathbb{K})=0$ برای هر $l\ge |W|-r-2$ و $l\neq d-1$.

اکنون آماده‌ایم تا اولین نتیجه اصلی این بخش را بیان کنیم. این قضیه توسعه یافته قضیه۶ .۱ از [۶] می‌باشد.

قضیه ۴. ۲. فرض کنید $r\ge 2$ و $d\ge 1$ اعداد صحیح باشند و همچنین فرض کنید که Δ یک مجتمع سادکی باشد. اگر ایده‌آل استنلی- ریزنر Δ دارای (d+1)- خطی در r مرحله اول روی میدان $\mathbb{K}$ باشد، آنگاه $\Delta=Cl_d(\Delta^{[d]})$ و

۱) مجتمع سادکی $\Delta^{[d]}$ یک مجتمع (d,r)- دور- کامل جهت‌دار می‌باشد.

۲) مجتمع سادکی $\Delta^{[d]}$ یک مجتمع (d,r)- وتری خواهد بود هرگاه مشخصه میدان $\mathbb{K}$ برابر ۲ باشد.

برهان. چون مینیمال درجهٔ مولدهای I_Δ برابر با $d+1$ می‌باشد، لذا بنا به گزاره ۵. ۶ از [۶] رابطه $\Delta=Cl_d(\Delta^{[d]})$ برقرار است.

۱) برهان خلف، فرض کنید Ω یک دور d- بعدی رأس- مینیمال جهت‌دار با حداکثر $d+r+1$ رأس در $\Delta^{[d]}$ باشد، که d- کامل نیست. فرض کنید $F_1,\dots,F_m$ همه d - وجه‌های Ω باشند و قرار دهید $W=\bigcup_{i=1}^m F_i$. چون Ω دور d- ناکامل است، بنا به [۹] (همچنین گزاره ۳. ۱۱ ار از [۶] ببینید) داریم $|W|>d+2$، ادعا می‌کنیم بعد Δ_W برابر d است. چون Ω متعلق به Δ_W می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که بعد Δ_W حداقل برابر d است. از طرف دیگر توجه دارید که

$$\Delta_W=(Cl_d(\Delta^{[d]}))_W$$

بنابراین برای اثبات ادعا، کافی است نشان دهیم که هر زیر مجموعه $\mathrm{d}+2$ عضوی از W شامل یک زیرمجموعه $\mathrm{d}+1$ عضوی است که وجه $\Delta^{[d]}$ نمی‌باشد.

فرض کنید که زیرمجموعه $\mathrm{d}+2$ عضوی چون S، از W وجود دارد که تمام زیرمجموعه‌های $\mathrm{d}+1$ عضوی آن وجه‌های $\Delta^{[d]}$ می‌باشند. پس مجتمع $\Delta_S^{[d]}$ d- کامل می‌باشد و طبق گزاره ۳ .۱۱ از [۶]، مجتمع $\Delta_S^{[d]}$ یک دور d- بعدی جهت پذیر است. که این یک تناقض است، چون که Ω یک دور رأس- مینیمال جهت‌دار است و $d+2=|S|<|W|$. پس، هر زیر مجموعه d+2 عضوی از W شامل یک زیرمجموعه $\mathrm{d}+1$ عضوی است که آن وجه $\Delta^{[d]}$ نیست. بنابراین، $\dim\Delta_W=d$. این نتیجه می‌دهد که مجموع تمام d- وجه‌های Ω یک d- مرز نمی‌باشد. بنابراین به کمک [۹] (همچنین قضیه ۵ .۳ از [۶] را ببینید)، نتیجه می‌گیریم که $\widetilde{H}_d(\Delta_W;\mathbb{K})\neq 0$ که این با گزاره ۴. ۱ تناقض دارد.

۲) فرض کنید که Ω یک دور d- بعدی وجه مینیمال با حداکثر $\mathrm{d}+\mathrm{r}+1$ راس در $\Delta^{[d]}$ باشد که d- کامل نمی‌باشد. چون I_Δ تحلیل (d+1)- خطی در r مرحله اول دارد و $\Delta=Cl_d(\Delta^{[d]})$، گزاره ۴. ۱ نتیجه می‌دهد که

$$\widetilde{H}_d\left(Cl_d(\Delta^{[d]})_{V(\Omega)};\mathbb{K}\right)=0$$

و با به کاربردن قضیه ۳ .A۳ از [۱۰]، نتیجه می‌گیریم که

$$\widetilde{H}_d\left(Cl_d(\Delta^{[d]})_{V(\Omega)};\mathbb{Z}_2\right)=0$$

حال فرض کنید $F_1, \dots, F_m$ همگی d- وجه‌های Ω باشند. به کمک [۹] (همچنین گزاره ۵ .۱ از [۶] را ببینید)، یک d- دور همولوژیکی روی میدان $\mathbb{Z}_2$ می‌باشد. لذا، $\sum_{i=1}^{m} F_i$ یک d - مرز در $Cl_d\left(\Delta^{[d]}\right)_{v(\Omega)}$ روی $\mathbb{Z}_2$ می‌باشد. بنابراین به کمک لم ۵ .۹ از [۶]، مجتمع Ω یک مجموعه وتری در $Cl_d\left(\Delta^{[d]}\right)$ دارد. چون مجموعه d- وجه‌های $\Delta^{[d]}$ و $Cl_d\left(\Delta^{[d]}\right)$ یکسان هستند، نتیجه می‌دهد که Ω یک مجموعه وتری در $\Delta^{[d]}$ دارد. بنابراین، $\Delta^{[d]}$ مجتمع (d,r) -وتری می‌باشد.قضیه زیر دومین نتیجه اصلی این بخش به شمار می‌آید. این قضیه تعمیمی از قضیه ۳ .۳ در [۷] می‌باشد و شرط لازم و کافی برای تحلیل خطی در r مرحله اول یک ایده‌آل تک جمله‌ای را فراهم می‌کند.

قضیه۴. ۳. فرض کنید $r \geq 2$ و $d \geq 1$ اعداد صحیح باشند. همچنین فرض کنید I یک ایده‌آل تک جمله‌ای خالی از مربع، تولید شده از درجه d+1 باشد. در این صورت شرایط زیر هم ارزند.

۱) ایده‌آل I خطی در r مرحله اول، روی هر میدان با مشخصه ۲ می‌باشد.

۲) مجتمع $\mathcal{N}(I)^{[m]}$ یک مجتمع سادکی (m,r)- وتری برای $m \geq 0$ می‌باشد.

۳) مجتمع $\mathcal{N}(I)^{[m]}$ یک مجتمع سادکی (m,r)- وتری برای $\mathrm{m} \geq \mathrm{d}$ می‌باشد.

۴) مجتمع $\mathcal{N}(I)^{[d]}$ یک مجتمع سادکی (d,r) - وتری می‌باشد و برای هر $m > d$، هر دور m- بعدی m- ناکامل وجه مینیمال ۱- کامل با حداکثر $\mathrm{m}+\mathrm{r}+1$ رأس یک مجموعه وتری در $\mathcal{N}(I)$ دارد

۵) مجتمع $\overline{Cl_d\left(\mathcal{F}(I)\right)}^{[m]}$ یک مجتمع سادکی (m,r)- وتری برای $m \geq 0$ می‌باشد.

۶) مجتمع $\overline{Cl_d\left(\mathcal{F}(I)\right)}^{[m]}$ یک مجتمع سادکی (m,r)- وتری برای $\mathrm{m} \geq \mathrm{d}$ می‌باشد.

برهان. قرار دهید $\Delta = \mathcal{N}(I)$ و، $\gamma = \overline{\mathcal{F}(I)}$ حال به اثبات می‌پردازیم.

۱) ⇐ ۲) فرض کنید که I دارای یک تحلیل خطی، در r مرحله اول روی هر میدان با مشخصه ۲ باشد. به کمک قضیه ۴. ۲، می‌دانیم که $\Delta = Cl_d\left(\Delta^{[d]}\right)$ و $\Delta^{[d]}$ مجتمع‌های (d,r)- وتری هستند. تعریف بستار نتیجه می‌دهد که $\Delta^{[m]}$ برای تمام $m < d$ کامل است. با توجه به تبصره ۴ .۳ از [۶] نتیجه می‌گیریم که $\Delta^{[m]}$ مجتمع m- وتری بوده و لذا می‌توان دریافت که برای $m < d$ آن (m,r)- وتری هم می‌باشد. بنابراین فرض کنید که $\mathrm{m} > d$ و Ω یک دور m- بعدی m- ناکامل وجه مینیمال، با حداکثر $\mathrm{m}+\mathrm{r}+1$ رأس در $\Delta^{[m]}$ باشد. به کمک [۹] (همچنین گزاره ۵ .۱ از [۶] را ببینید)، مجموع m- وجه‌های Ω روی میدان $\mathbb{Z}_2$ یک m- دور همولوژیکی می‌باشد. از طرف دیگر، از گزاره ۴ .۱ نتیجه می‌شود که $\widetilde{H}_l(\Delta_W;\mathbb{K}) = 0$. لذا مجموع m- وجه‌های Ω یک m- مرز از $\Delta_{V(\Omega)}$ می‌باشد. حال، لم ۵ .۹ از [۶] نتیجه می‌دهد که Ω یک مجموعه وتری در $\Delta_{V(\Omega)}$ دارد. بنابراین $\Delta^{[m]}$ مجتمع سادکی (m,r)- وتری است.

۳) ⇐۲) بدیهی است.

۳) ⇐۱) فرض کنید $\Delta^{[m]}$ برای $\mathrm{m} \geq \mathrm{d}$ یک مجتمع سادکی (m,r)- وتری باشد. طبق گزاره ۴. ۱، باید ثابت کنیم که برای هر $W \subseteq V(\Delta)$ با $|W| \leq d+r+1$ و هر عدد صحیح $l \neq d-1$، داریم $\widetilde{H}_1(\Delta_W;\mathbb{K}) = 0$.

فرض کنید که W یک زیر مجموعه‌ای از $\mathrm{V}(\Delta)$ باشد که $|W| \leq d+r+1$. چون I توسط تک جمله‌ای‌های درجه d+1 تولید می‌شود، لذا گزاره ۵ .۶ از [۶] نتیجه می‌دهد که $\Delta = Cl_d\left(\Delta^{[d]}\right)$. از آنجائی که $\Delta^{[d]}$ یک مجتمع سادکی (d,r)- وتری می‌باشد، گزاره ۳. ۵ نتیجه می‌دهد که برای $0 \leq l \leq d-2$ و $l = d$، داریم $\widetilde{H}_l(\Delta_W;\mathbb{K}) = 0$ بنابراین فرض کنید $l > d$ باشد. طبق فرض $\Delta^{[l]}$

یک مجتمع سادکی (l,r)- وتری بوده و گزاره ۳. ۵ نتیجه می‌دهد که $\widetilde{H}_l\left(Cl_l(\Delta^{[l]})_W;\mathbb{K}\right)=0$. بیشتر این که، طبق لم ۲ .۱۰ از [۷]، برای $t\geq l$، داریم

$$Cl_l(\Delta^{[l]})^{[t]}=Cl_l\left(Cl_d(\Delta^{[d]})^{[l]}\right)^{[t]}=$$
$$Cl_d(\Delta^{[d]})^{[t]}=\Delta^{[t]}$$

لذا، l- وجه‌ها و $(l+1)$- وجه‌های $Cl_l(\Delta^{[t]})w$ و Δ_W شبیه هم هستند. پس داریم:

$$\widetilde{H}_l(\Delta_W;\mathbb{K})=\widetilde{H}_l\left(Cl_l(\Delta^{[l]})w;\mathbb{K}\right)=0.$$

۳) $\Leftarrow$ ۴) بدیهی است.

۴) $\Leftarrow$ ۳) از گزاره ۵ .۶ در [۶] در می‌یابیم که $\Delta=Cl_d(\Delta^{[d]})$. لذا با توجه به گزاره ۳. ۶. اثبات کامل خواهد شد.

۲) $\Leftrightarrow$ ۵) این واضح است که $\overline{\mathcal{F}(\mathrm{I})}=\mathcal{N}(\mathrm{I})^{[\mathrm{d}]}$. بنابراین $\mathrm{Cl_d}(\gamma)=\mathrm{Cl_d}(\Delta^{[\mathrm{d}]})=\Delta$. لذا $\mathrm{Cl_d}(\gamma)^{[\mathrm{m}]}$ یک مجتمع سادکی (m,r)- وتری برای m≥1 می‌باشد اگر و فقط اگر $\Delta^{[m]}$ یک مجتمع سادکی (m,r)- وتری برای m≥1 باشد.

۳) $\Leftrightarrow$ ۶) اثبات این حالت مشابه حالت ۲)$\Leftrightarrow$ ۵) می‌باشد.

نتیجه ۴. ۴. فرض کنید $r\geq 2$ و $d\geq 0$ اعداد صحیح باشند. همچنین فرض کنید Δ یک مجتمع سادکی d- بعدی خالص باشد، به طوری که هیچ دور d- بعدی با حداکثر $\mathrm{d+r+1}$ رأس نداشته باشد. در این صورت $I_{Cl_d(\Delta)}$ دارای یک تحلیل $(\mathrm{d+1})$ -خطی، در r مرحله اول روی هر میدان با مشخصه ۲ می‌باشد.

برهان. با توجه به قضیه۴. ۳، بایستی ثابت کنیم که $Cl_d(\Delta)^{[m]}$ یک مجتمع سادکی (m,r)- وتری برای $m\geq d$ می‌باشد. چون مجموعه d- وجه‌های Δ و $Cl_d(\Delta)^{[d]}$ یکسان هستند. طبق فرض می‌توان نتیجه گرفت که $Cl_d(\Delta)^{[d]}$ هیچ دور d- بعدی با حداکثر $\mathrm{d+r+1}$ رأس ندارد. بنابراین $Cl_d(\Delta)^{[d]}$ یک مجتمع سادکی (d,r)-وتری است. حال فرض می‌کنیم $m>d$. ثابت می‌کنیم که $Cl_d(\Delta)^{[m]}$ تهی است. برهان خلف، فرض کنید که $Cl_d(\Delta)$ شامل وجهی با بعد m باشد. این نتیجه می‌دهد که $Cl_d(\Delta)$ وجه d+1 بعدی دارد. چنین وجهی در $Cl_d(\Delta)$ تنها وقتی وجود دارد که تمام زیر مجموعه‌های با تعداد d+1 رأس، وجهی از Δ باشند. بنابر [۹] (همچنین گزاره ۳. ۱۱ را از [۶] ببینید) این d- وجه‌های Δ یک دور d- بعدی در Δ شکل می‌دهند. که این یک تناقض است، چراکه Δ شامل هیچ دور d- بعدی با حداکثر $\mathrm{d+2}$ رأس نمی‌باشد. در نتیجه $Cl_d(\Delta)^{[m]}$ تهی است و لذا، (m,r)- وتری است. همانطور که در مقدمه اشاره شد. ایزنباد و همکارانش ثابت کردند که ایده‌آل‌های یالی گراف G دارای تحلیل خطی در r مرحله اول هستند اگر و فقط اگر متمم گراف، $\bar{G}$ هیچ دور القایی به طول s که $4\leq s\leq r+2$ نداشته باشد (قضیه ۲ .۱ از [۸] را ببینید). هدف ارائه یک اثبات جدید برای این نتیجه روی میدان‌های با مشخصه ۲ می‌باشد. ابتدا به اثبات لم زیر می‌پردازیم.

لم۴. ۵. فرض کنید G یک گراف باشد (می‌توان آن را همچون یک مجتمع سادکی ۱- بعدی در نظر گرفت). گراف G دارای هیچ دور القایی چون C، با $4\leq|V(C)|\leq r+2$ نمی‌باشد اگر و فقط اگر $Cl_1(G)^{[t]}$ یک مجتمع سادکی (t,r)- وتری برای $t\geq 0$ باشد.

برهان. ابتدا فرض کنید گراف G دارای هیچ دور القایی چون C، با $4\leq|V(C)|\leq r+2$ نباشد. چون یال‌های G و $Cl_1(G)^{[1]}$ یکسان هستند، نتیجه می‌گیریم که هر دور ۱- بعدی در $Cl_1(G)^{[1]}$ با حداکثر $r+2$ رأس، یک مثلث است (یعنی، یک دور کامل) و یا مجموعه وتری

دارد. در نتیجه $Cl_1(G)^{[1]}$ مجتمع سادکی $(1,r)$- وتری است. اکنون عدد m>1 را یک عدد صحیح در نظر بگیرید. و فرض کنید Ω یک دور m- بعدی وجه مینیمال ۱- کامل در $Cl_1(G)$ با حداکثر m+r+1 رأس باشد که m- کامل نیست. بنا به تبصره ۴. ۳ از [۶] می‌توان نتیجه گرفت که $Cl_1(G)_{V(\Omega)}$ یک $(|V(\Omega)|-1)$- سادک و $Cl_1(G)^{[m]}_{V(\Omega)}$ یک m- وتری می‌باشد. لذا، Ω در $Cl_1(G)$ مجموعه وتری دارد. بنابراین، از گزاره ۳. ۶ و لم ۲. ۱۰ از [۷] نتیجه می‌گیریم که $Cl_1\big(Cl_1(G)^{[1]}\big)^{[t]} = Cl_1(G)^{[t]}$ یک مجتمع سادکی $(t.r)$- وتری، برای هر عدد صحیح $t \geq 0$، باشد. چون $Cl_1(G)^{[1]}$ یک مجتمع سادکی $(1,\mathrm{r})$- وتری و $Cl_1(G)^{[1]} = G$، نتیجه می‌گیریم که هر دور ۱- بعدی ۱- ناکامل با حداکثر r+2 رأس، در G مجموعه وتری دارد. بنابراین، گراف G هیچ دور القایی چون C با $4 \leq |V(C)| \leq r+2$ ندارد.

قضیه ۴. ۶. فرض کنید $r \geq 2$ یک عدد صحیح باشد و همچنین فرض کنید G یک گراف باشد. در این صورت ایده‌آل یالی I(G) دارای تحلیل ۲- خطی در r مرحله اول، روی هر میدان با مشخصه ۲ می‌باشد اگر و فقط اگر $\bar{G}$ دارای هیچ دور القایی چون C با $4 \leq |V(C)| \leq r+2$ نباشد.

برهان. گراف G را به عنوان یک مجتمع سادکی ۱- بعدی در نظر می‌گیریم. بنابراین به راحتی می‌توان دید که $I_{Cl_1(\bar{G})} = I(G)$. ابتدا فرض کنید که $\bar{G}$ دور القایی چون C با $4 \leq |V(C)| \leq r+2$ نداشته باشد و $\mathbb{K}$ یک میدان با مشخصه ۲ باشد. به کمک گزاره ۴ .۱، باید نشان دهیم که برای هر $t \geq 1$ و $W \subseteq V(G)$ با $|W| \leq t+r+1$ داریم $\widetilde{H}_t(Cl_1(\bar{G})w;\mathbb{K}) = 0$. پس فرض کنید که t≥1 یک عدد صحیح بوده و W زیرمجموعه‌ای از $V(G)$ باشد که $|W| \leq t+r+1$. چون $\bar{G}$ هیچ دور القایی چون C با $4 \leq |V(C)| \leq r+2$ ندارد، بنا بر گزاره۳ .۳، مجتمع سادکی $Cl_1(\bar{G})^{[t]}$ قطعاً (t,r)- وتری می‌باشد. لذا، گزاره۳ .۵ نتیجه می‌دهد که

$$\widetilde{H}_t(Cl_t\big(Cl_1(\bar{G})^{[t]w};\mathbb{K}) = 0 .$$

به هر حال

$$\widetilde{H}_t(Cl_t\big(Cl_1(\bar{G})^{[t]w};\mathbb{K}) = \widetilde{H}_t(Cl_1(\bar{G})w;\mathbb{K})$$

و بنا بر لم ۲ .۱۰ از [۷] می‌توان نتیجه گرفت که t- وجه‌ها و (t+1)- وجه‌های دو مجتمع سادکی یکسان هستند. پس، $\widetilde{H}_t(Cl_1(\bar{G})w;\mathbb{K}) = 0$.
برعکس، توجه دارید که بنا به قضیه ۴ .۲، مجتمع سادکی $G = Cl_1(\bar{G})^{[1]}$ قطعاً $(1,t)$- وتری خواهد بود. این بدین معنی است که $\bar{G}$ هیچ دور القایی چون C با $|V(C)| \leq r+2$ ندارد.

تعریف ۴ .۷. فرض کنید r≥2 یک عدد صحیح باشد و همچنین فرض کنید I یک ایده‌آل تک جمله‌ای خالی از مربع باشد ایده‌آل تولید شده توسط تمام تک جمله‌ای‌های خالی از مربع از درجه d با $I_{[d]}$ نمایش داده می‌شود. ایده‌آل I خطی مولفه‌ای نامیده می‌شود، اگر $I_{[d]}$ دارای تحلیل خطی به ازای هر d باشد. بیشتر این‌که I خطی مولفه‌ای در r مرحله اول نامیده می‌شود، اگر $I_{[d]}$ برای هر d دارای تحلیل خطی در r مرحله اول باشد.

در قضیه بعدی یک شرط لازم برای این‌که ایده‌آل استنلی- ریزنر داری تحلیل خطی مولفه‌ای در r مرحله اول باشد را پیدا می‌کنیم.

قضیه ۴. ۸. فرض کنید $r \geq 2$ و d ≥ 0 اعداد صحیح باشند. همچنین فرض کنید که Δ یک مجتمع سادکی باشد. اگر I_Δ دارای تحلیل خطی

مولفه‌ای در r مرحله اول روی هر میدان با مشخصه ۲ باشد. در این صورت $\Delta^{[d]}$ یک مجتمع سادکی $(\mathrm{d.r})$- وتری برای $\mathrm{d} \leq \dim\Delta$ خواهد بود

برهان. بنا بر قضیه ۴. ۳، مجتمع سادکی $\mathcal{N}\left((I_{\Delta})_{[d+1]}\right)^{[d]}$ قطعا $(\mathrm{d.r})$- وتری خواهد بود. از طرف دیگر، بنا بر لم ۸ .۳ از [۶] داریم که

$$\mathcal{N}\left((I_{\Delta})_{[d+1]}\right)^{[d]} = \Delta^{[d]}$$

پس $\Delta^{[d]}$ یک مجتمع سادکی $(d.r)$-وتری برای هر $d \leq dim\Delta$ خواهد بود.

فهرست مراجع

[1] Froberg, R., 1990. On Stanley-Reisner rings. in: Topics in algebra, Banach Center Publications, 26 Part 2, 57–70.

[2] Bigdeli, M., Yazdan Pour, A. A., Zaare-Nahandi, R., 2017. Stability of Betti numbers under reduction processes: towards chordality of clutters. J. Combin. Theory Ser. A 145, 129–149.

[3] Emtander, E., 2010. A class of hypergraphs that generalizes chordal graphs. Math. Scand 106, 50–66.

[4] Van Tuyl, A., Villarreal, R. H., 2008. Shellable graphs and sequentially Cohen--Macaulay bipartite graphs. J. Combin. Theory Ser. A 115, 799–814.

[5] Woodroofe, R., 2011. Chordal and sequentially Cohen--Macaulay clutters, Electron. J. Combin., 18, Research Paper 208.

[6] Connon, E., Faridi, S., 2013. Chorded complexes and a necessary condition for a monomial ideal to have a linear resolution. J. Combin. Theory Ser. A120, 1714–1731.

[7] Connon, E., Faridi, S., 2015. A criterion for a monomial ideal to have a linear resolution in characteristic 2, Electron. J. Combin. 22(1) P1.63.

[8] Eisenbud, D., Green, M., Hulek, K., Popescu, S., 2005. Restricting linear syzygies: algebra and geometry. Compos. Math. 141, 6, 1460–1478.

[9] Connon, E., On d-dimensional cycles and the vanishing of simplicial homology, preprint.

[10] Hatcher, A. (2002). *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge.