

یک ایده جدید برای اعمال شرایط مرزی اساسی در روش بدون المان گالرکین برای حل معادلات با مشتقات جزئی بیضوی

علی مس فروش¹، کمیل ایزدپناه^{2*}

^(2,1) گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

تاریخ ارسال مقاله: 1398/06/12 تاریخ پذیرش مقاله: 1400/02/07

چکیده

روش بدون المان گالرکین یک روش شناخته شده برای حل معادلات با مشتقات جزئی است. اعمال شرایط مرزی اساسی در این روش که بر اساس تقریب کمترین مربعات متحرک انجام می‌شود، با پیچیدگی‌هایی همراه است. از آنجا که توابع شکل تقریب کمترین مربعات متحرک در خاصیت دلتای کرونیگر صدق نمی‌کنند، نمی‌توان همانند روش عناصر متناهی، شرایط مرزی اساسی را به صورت مستقیم در فرم ضعیف گالرکین معادله اعمال کرد و نیاز به روش‌های اصلاحی برای فرم ضعیف معادله داریم. در این مقاله یک ایده جدید برای اعمال شرایط مرزی اساسی در روش بدون المان گالرکین برای حل معادلات با مشتقات جزئی بیضوی معرفی می‌شود. این ایده براساس روش کمترین مربعات متحرک درونیاب است. در این روش ابتدا شرایط مرزی را در تقریب کمترین مربعات متحرک تابع اعمال می‌کنیم سپس تقریب حاصل را در روش بدون المان گالرکین به کار می‌بریم. بنابراین شرایط مرزی به صورت مستقیم اعمال می‌شود. در این مقاله ابتدا تقریب کمترین مربعات متحرک درونیاب معرفی می‌شود و سپس نحوه اعمال شرایط مرزی بیان خواهد شد. در انتها با ارائه چند مثال مختلف کارایی روش را نشان می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: شرایط مرزی اساسی، تقریب کمترین مربعات متحرک درونیاب، روش بدون المان گالرکین، معادلات با مشتقات جزئی بیضوی.

1- مقدمه

اعمال شرایط مرزی اساسی ارائه خواهد شد. ابتدا شرایط مرزی را در تقریب تابع مجهول اعمال می‌کنیم سپس تابع تقریب اصلاح شده را در روش بدون المان گالرکین برای حل معادلات با مشتقات جزئی بیضوی به کار می‌بریم. بنابراین شرایط مرزی به صورت مستقیم اعمال می‌شود.

2- روش کمترین مربعات متحرک درونیاب

فرض $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ مجموعه‌ای از نقاط در دامنه کراندار $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ باشد که N تعداد نقاط است. پارامتر ρ_I شعاع دامنه تاثیر نقطه \mathbf{x}_I و $\|\cdot\|$ نرم اقلیدسی را نشان می‌دهند. دامنه تاثیر نقطه \mathbf{x}_I به شکل $\Omega_I = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\| \leq \rho_I, \mathbf{x} \in \Omega\}$ تعریف می‌شود.

فرض $\rho = \max_{\mathbf{x}_I \in \mathbf{X}} \{\rho_I\}$ باشد. برای نقطه داده شده $\mathbf{x} \in \Omega$ ، مجموعه اندیس $\tau_{\mathbf{x}} = \{I : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\| \leq \rho_I, \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}$ را تعریف می‌کنیم.

فرض $u(\mathbf{x})$ تابعی از متغیر میدان در Ω باشد. تابع تقریب $u(\mathbf{x})$ با نماد $u^h(\mathbf{x})$ نمایش داده می‌شود. به منظور اینکه تقریب $u^h(\mathbf{x})$ در روش کمترین مربعات متحرک درونیاب در خاصیت درونیابی صدق کند تابع وزن منفردی را به شکل زیر تعریف می‌کنیم،

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = \begin{cases} \left\| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_I}{\rho_I} \right\|^{-\alpha}, & \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\| \leq \rho_I, \\ 0, & \text{others.} \end{cases} \quad (1)$$

که پارامتر α یک عدد صحیح زوج است. ضرب داخلی را به صورت،

$$\langle f, g \rangle_{\mathbf{x}} = \sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) f(\mathbf{x}_I) g(\mathbf{x}_I),$$

$$\forall f, g \in C^0(\Omega),$$

تعریف می‌کنیم که \mathbf{x} یک نقطه در Ω را مشخص می‌کند. نرم متناظر در \mathbf{x} نیز به شکل زیر است،

روش بدون المان گالرکین یک روش بدون شبکه شناخته شده برای حل معادلات با مشتقات جزئی است [1]. چون توابع شکل تقریب کمترین مربعات متحرک در خاصیت دلتای کرونیگر صدق نمی‌کند، اعمال شرایط مرزی اساسی به سادگی روش عناصر متناهی نیست.

ایده‌هایی برای اعمال شرایط مرزی اساسی در روش بدون المان گالرکین بر پایه اصلاح فرم ضعیف مانند روش ضرایب لاگرانژ، روش جریمه و روش نیچه وجود دارند. روش ضرایب لاگرانژ به علت راحتی اعمال آن در مسئله‌های گوناگون، یکی از پرکاربردترین روش‌هاست. این روش یک تابع مجهول جدید به نام ضریب لاگرانژ تولید می‌کند. فضای درونیابی ضریب لاگرانژ باید به دقت انتخاب شود زیرا برای رسیدن به جواب قابل قبول به فضای با درجه بالاتری نیاز داریم و از طرفی هر چه درجه آزادی بیشتر شود دستگاه حاصل از گسسته سازی به سمت منفرد شدن پیش می‌رود. از طرف دیگر روش جریمه و نیچه نیاز به انتخاب یک پارامتر عددی دارند. در روش جریمه برای اینکه شرایط مرزی اساسی به شکل مناسبی اعمال شوند باید مقادیر بزرگی از پارامتر را استفاده کرد. در عمل این به یک دستگاه بد وضع منتهی می‌شود که کاربرد پذیری روش را کاهش می‌دهد. بر خلاف روش جریمه روش نیچه مشکل بد وضعی را ندارد گرچه اعمال روش نیچه به سادگی روش ضرایب لاگرانژ یا روش جریمه نیست چون اصلاح فرم ضعیف برای هر مسئله متفاوت است [2].

روش کمترین مربعات متحرک درونیاب توسط لنکستر و سالکائوسکاس ارائه شد [3]. توابع شکل روش کمترین مربعات متحرک درونیاب بر خلاف روش کمترین مربعات متحرک در خاصیت دلتای کرونیگر صدق می‌کنند بنابراین با استفاده از این ویژگی می‌توان شرایط مرزی اساسی را به صورت مستقیم اعمال کرد. در این مقاله یک ایده جدید برای

برای بدست آوردن سیمای تابع تقریب $u^h(\mathbf{x})$ که در خاصیت درونیابی صدق کند، لنکستر و سالکائوسکاس [3] تقریب محلی را به صورت زیر تعریف کردند،

$$u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \tilde{p}_0(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}) a_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{\bar{m}} \tilde{p}_i(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}) a_i(\mathbf{x}),$$

که $\bar{\mathbf{x}}$ یک نقطه در دامنه تاثیر \mathbf{x} است و $a_i(\mathbf{x}), i=1, 2, \dots, \bar{m}$ ضرایب مجهول توابع پایه‌ای هستند.

برای یک \mathbf{x} داده شده، تفاضل بین تابع تقریب محلی $u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ و تابع $u(\bar{\mathbf{x}})$ با روش کمترین مربعات وزنی کمینه سازی می شود. بدین منظور نرم L_2 گسسته وزنی را به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) [u^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) - u_I]^2, \quad (3)$$

که $w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)$ تابع وزنی با محمل فشرده است که در (1) نمایش داده شد و برای هر \mathbf{x}_I در نقاطی $I \in \tau_{\mathbf{x}}$ هستند که در دامنه تاثیر آنها قرار دارد و $u_I = u(\mathbf{x}_I)$ می باشد.

با کمینه سازی نرم L_2 گسسته وزنی نمایش داده شده در (3) داریم،

$$\langle u(\cdot) - u^h(\mathbf{x}, \cdot), \tilde{p}_0 \rangle_{\mathbf{x}} = 0, \quad (4)$$

$$\langle u(\cdot) - u^h(\mathbf{x}, \cdot), \tilde{p}_i \rangle_{\mathbf{x}} = 0, i=1, 2, \dots, \bar{m}.$$

به دلیل تعامد (4) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$a_0(\mathbf{x}) = \langle u, \tilde{p}_0 \rangle_{\mathbf{x}}, \quad (5)$$

$$a_0(\mathbf{x}) \langle \tilde{p}_0, \tilde{p}_i \rangle_{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^{\bar{m}} a_i(\mathbf{x}) \langle \tilde{p}_i, \tilde{p}_j \rangle_{\mathbf{x}}$$

$$= \langle u, \tilde{p}_j \rangle_{\mathbf{x}}, \quad j=1, 2, \dots, \bar{m}.$$

با توجه به (2) و تعریف ضرب داخلی، داریم:

$$\|f\|_{\mathbf{x}} = \left[\sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) f^2(\mathbf{x}_I) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

فرض $p_0(\mathbf{x}) \equiv 1, p_1(\mathbf{x}), \dots, p_{\bar{m}}(\mathbf{x})$ توابع پایه‌ای باشند که $\bar{m}+1$ تعداد توابع پایه‌ای را مشخص می کند. توابع پایه‌ای جدیدی را با استفاده از این توابع پایه‌ای می سازیم. ابتدا $p_0(\mathbf{x})$ را نرمال می کنیم،

$$\tilde{p}_0(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\left[\sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2)$$

سپس توابع پایه‌ای جدید را عمود بر $\tilde{p}_0(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}})$ به صورت زیر می سازیم،

$$\tilde{p}_i(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}) = p_i(\bar{\mathbf{x}}) - \mathcal{S}p_i(\mathbf{x}), \quad i=1, 2, \dots, \bar{m}.$$

که $\mathcal{S}p_i$ یک اپراتور خطی است که به صورت زیر تعریف می شود،

$$\mathcal{S}p_i(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}} v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) p_i(\mathbf{x}_I),$$

و

$$v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) = \frac{w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)}{\sum_{J \in \tau_{\mathbf{x}}} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_J)}.$$

تابع $v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)$ دارای خاصیت‌های زیر است [1].

لم 1-2: اگر تابع وزن (1) استفاده شود، آنگاه

$$v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) \in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

$$v(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_J) = \delta_{IJ}, \quad \forall I, J \in \tau_{\mathbf{x}}, \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}} v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \tau_{\mathbf{x}}, \quad (\text{ب})$$

$$0 \leq v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) \leq 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (\text{ج})$$

$$v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) = 0 \text{ if and only if } \mathbf{x} = \mathbf{x}_J, J \neq I,$$

$$\frac{\partial v(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_J)}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad \forall I, J \in \tau_{\mathbf{x}}. \quad (\text{د})$$

$\bar{m} \times N$ یک ماتریس $\mathbf{F}_w(\mathbf{x}) = \bar{\omega}_{kj}(\mathbf{x})_{\bar{m} \times N}$ و
است که برای $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_j$

$$\bar{\omega}_{kj}(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) \tilde{p}_k(\mathbf{x}; \mathbf{x}_j)$$

و برای $\mathbf{x} = \mathbf{x}_j$

$$\bar{\omega}_{kj}(\mathbf{x}) = \sum_{l \in \tau_x, l \neq j} w(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l) [p_k(\mathbf{x}_j) - p_k(\mathbf{x}_l)],$$

پس می‌توانیم ضرایب مجهول را به شکل زیر محاسبه کنیم:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{F}_w(\mathbf{x}) \mathbf{u}.$$

آنگاه تابع تقریب محلی را می‌توان به شکل زیر بدست آورد.

$$u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = Su + \sum_{i=1}^{\bar{m}} a_i(\mathbf{x}) \tilde{p}_i(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}).$$

بنابراین تابع تقریب درونیاب سراسری تابع $u(\mathbf{x})$ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$u^h(\mathbf{x}) = Su + \sum_{i=1}^{\bar{m}} a_i(\mathbf{x}) g_i(\mathbf{x}) \equiv \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{u} \\ = \sum_{l=1}^N \phi_l(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}_l),$$

که $\Phi(\mathbf{x})$ ماتریسی از توابع شکل است،

$$\Phi(\mathbf{x}) = (\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_N(\mathbf{x})) = \\ \mathbf{v}^T + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{F}_w(\mathbf{x}),$$

که در آن

$$\mathbf{v}^T = (v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1), v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2), \dots, v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_N)), \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_{\bar{m}}(\mathbf{x})), \\ g_i(\mathbf{x}) = p_i(\mathbf{x}) - Sp_i(\mathbf{x}).$$

آنگاه مشتق جزئی مرتبه اول توابع شکل روش کمترین مربعات متحرک درونیاب به شکل زیر قابل محاسبه هستند.

$$\tilde{p}_0(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) a_0(\mathbf{x}) =$$

$$\frac{1}{\left[\sum_{l \in \tau_x} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) \right]^{\frac{1}{2}}} \langle u, \tilde{p}_0 \rangle_x = \\ \sum_{l \in \tau_x} v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) u_l = Su.$$

بنابراین (5) به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\sum_{i=1}^{\bar{m}} a_i(\mathbf{x}) \langle \tilde{p}_i, \tilde{p}_j \rangle_x = \\ \langle u - Su, \tilde{p}_j \rangle_x, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{m}. \quad (6)$$

با توجه به لم زیر، (6) را می‌توان ساده کرد.

لم 2-2: اگر تابع وزن (1) استفاده شود، برای هر $\mathbf{x} \in \Omega$ داریم:

$$\langle Su, \tilde{p}_i \rangle_x = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \bar{m}.$$

اثبات: برای دیدن اثبات به [4] مراجعه شود.

با توجه به لم 2-2 و معادله (6) را می‌توان به شکل زیر ساده کرد

$$\sum_{i=1}^{\bar{m}} a_i(\mathbf{x}) \langle \tilde{p}_i, \tilde{p}_j \rangle_x = \\ \langle u, \tilde{p}_j \rangle_x, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{m}. \quad (7)$$

معادله (7) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_w(\mathbf{x}) \mathbf{u},$$

که

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) = (a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), \dots, a_{\bar{m}}(\mathbf{x})),$$

$$\mathbf{u}^T = (u_1, u_2, \dots, u_N),$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_w(\mathbf{x}) \mathbf{F}^T(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{p}_1(\mathbf{x}\mathbf{x}_1) & \tilde{p}_1(\mathbf{x}\mathbf{x}_2) & \cdots & \tilde{p}_1(\mathbf{x}\mathbf{x}_N) \\ \tilde{p}_2(\mathbf{x}\mathbf{x}_1) & \tilde{p}_2(\mathbf{x}\mathbf{x}_2) & \cdots & \tilde{p}_2(\mathbf{x}\mathbf{x}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{p}_{\bar{m}}(\mathbf{x}\mathbf{x}_1) & \tilde{p}_{\bar{m}}(\mathbf{x}\mathbf{x}_2) & \cdots & \tilde{p}_{\bar{m}}(\mathbf{x}\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}$$

$$\int_{\Omega} \delta(\nabla u)^T \cdot \nabla u d\Omega + b \int_{\Omega} \delta u^T \cdot u d\Omega = \int_{\Omega} \delta u^T \cdot g(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (10)$$

با توجه به روش کمترین مربعات متحرک درونیاب، تقریب تابع مجهول $u(\mathbf{x})$ در نقطه دلخواه \mathbf{x} به شکل زیر است.

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})\mathbf{u} = \sum_{l=1}^N \phi_l(\mathbf{x})u_l,$$

که N تعداد نقاطی است که دامنه محمل فشرده آنها نقطه \mathbf{x} را پوشش می‌دهند. می‌توانیم این نقاط را به دو دسته نقاط درونی و مرزی تقسیم کنیم. بنابراین داریم:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{N_{int}} \phi_l(\mathbf{x})u_l + \sum_{l=1}^{N_b} \phi_l(\mathbf{x})u_l, \quad (11)$$

که N_{int} و N_b به ترتیب تعداد نقاط درونی و مرزی هستند. با اعمال شرایط مرزی (9) در (11) داریم:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{N_{int}} \phi_l(\mathbf{x})u_l + \sum_{l=1}^{N_b} \phi_l(\mathbf{x})\bar{u}_l =$$

$$\Phi_{int}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \Phi_b(\mathbf{x})\bar{\mathbf{u}},$$

که

$$\mathbf{u} = (u(\mathbf{x}_1), u(\mathbf{x}_2), \dots, u(\mathbf{x}_{N_{int}})),$$

$$\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}(\mathbf{x}_1), \bar{u}(\mathbf{x}_2), \dots, \bar{u}(\mathbf{x}_{N_b})),$$

$$\Phi_{int}(\mathbf{x}) = (\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_{N_{int}}(\mathbf{x})),$$

$$\Phi_b(\mathbf{x}) = (\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_{N_b}(\mathbf{x})).$$

بنابراین شرایط مرزی اساسی در تقریب تابع مجهول اعمال می‌شود.

با جایگزینی u و δu به ترتیب با $\Phi_{int}(\mathbf{x})\mathbf{u}$ و $\Phi_{int}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \Phi_b(\mathbf{x})\bar{\mathbf{u}}$ در فرم ضعیف (10) داریم:

$$\begin{aligned} \phi_i(\mathbf{x}) &= \mathbf{v}_{,i}^T + \mathbf{p}_{,i}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{F}_w(\mathbf{x}) \\ &+ \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{F}_{w,i}(\mathbf{x}) \\ &+ \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}_{,i}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{F}_w(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

که

$$\mathbf{F}_w(\mathbf{x}) = \bar{\omega}_{kj,i}(\mathbf{x})_{\bar{m} \times N},$$

که برای $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_j$ داریم

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{kj,i}(\mathbf{x}) &= w_{,i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) \tilde{p}_k(\mathbf{x}; \mathbf{x}_j) + \\ &w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) \tilde{p}_{k,i}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_j)(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

و برای $\mathbf{x} = \mathbf{x}_j$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{kj,i}(\mathbf{x}) &= \sum_{l \in \tau_x, l \neq j} (w_{,i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) [p_k(\mathbf{x}_j) - p_k(\mathbf{x}_l)]) \\ \mathbf{A}_{,i}^{-1}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{A}_{,i}(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

بنابراین توابع شکل و مشتق آن‌ها و سپس تابع تقریب و مشتق آن در روش کمترین مربعات متحرک درونیاب به شکل فوق محاسبه می‌شوند.

3- اعمال شرایط مرزی اساسی در روش بدون المان گالرکین برای حل معادلات با مشتقات جزئی تصادفی

معادله با مشتق جزئی بیضوی زیر را در نظر بگیرید.

$$-\nabla^2 u(\mathbf{x}) + bu(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (8)$$

با شرایط مرزی دیریکله،

$$u(\mathbf{x}) = \bar{u}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (9)$$

که $g \in L^2(\Omega)$, b تابع مجهول $u(\mathbf{x})$ یک ثابت نامنفی و \bar{u} معلوم است.

فرم ضعیف گالرکین معادله (8) و (9) به شکل زیر می‌باشد.

بنابراین با توجه به نامنفی بودن ثابت b داریم $z^T \mathbf{K} z > 0$ پس ماتریس \mathbf{K} معین مثبت و معکوس پذیر است. در نتیجه جواب دستگاه (12) موجود و منحصر بفرد است. انتگرال گیری در روش بدون شبکه را می‌توان با انتگرال گیری عددی گاوس انجام داد. با حل دستگاه (12) می‌توانیم جواب عددی را در نقاط مورد نظر بدست آوریم.

4- آنالیز خطا

برای $r \in \square$ از $(H^r, \|\cdot\|_r)$ به عنوان نماد فضای سوبولف معمولی به شکل زیر استفاده می‌کنیم:

$$H^r := \left\{ v: \|v\|_{H^r} = \left(\sum_{|k| \leq r} \|D^k v\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

زمانیکه $r = 0$ باشد، $H^0 := H$ فضای توابع انتگرال پذیر از مرتبه 2 روی Ω است که ضرب داخلی و نرم آن را با نمادهای (\cdot, \cdot) و $\|\cdot\|$ نمایش می‌دهیم. همچنین از نماد H_0^1 به عنوان زیر فضایی از H^1 استفاده می‌کنیم که عناصرش روی $\partial\Omega$ صفر هستند.

مسئله تغییراتی متناسب با معادله (8) یافتن یک

تابع $u \in H^1$ است بطوریکه

$$a(u, v) = (g, v) \quad \forall v \in H_0^1, \quad (13)$$

و

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \times \nabla v d\Omega + b \int_{\Omega} u v d\Omega,$$

$$(g, v) = \int_{\Omega} g v d\Omega.$$

می‌توان نشان داد که فرم خطی $a(\cdot, \cdot)$ روی فضای H_0^1 کراندار و کوثرسیو است زیرا ثابت‌های

$$\bar{\alpha} > 0, \bar{M} < \infty$$

موجودند بطوریکه

$$|a(u, v)| \leq \bar{M} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \quad \forall u, v \in H_0^1, \quad (14)$$

$$a(u, v) \geq \bar{\alpha} \|v\|_{H^1}^2 \quad \forall v \in H_0^1.$$

همچنین فرض کنیم:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T (\nabla \Phi_{int})^T(\mathbf{x}). \\ & \int_{\Omega} (\nabla \Phi_{int}(\mathbf{x}) \mathbf{u} + \nabla \Phi_b(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}) d\Omega \\ & + b \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T (\nabla \Phi_{int})^T(\mathbf{x}). \\ & \int_{\Omega} (\Phi_{int}(\mathbf{x}) \mathbf{u} + \Phi_b(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}) d\Omega \\ & = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T (\Phi_{int})^T(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) d\Omega. \end{aligned}$$

از آنجا که تابع آزمون $\delta \mathbf{u}$ دلخواه است، معادله گسسته نهایی به شکل زیر بدست می‌آید

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{L} \bar{\mathbf{u}}, \quad (12)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{\Omega} (\nabla \Phi_{int})^T(\mathbf{x}) (\nabla \Phi_{int})(\mathbf{x}) d\Omega \\ & + b \int_{\Omega} (\Phi_{int})^T(\mathbf{x}) (\Phi_{int})(\mathbf{x}) d\Omega, \\ \mathbf{L} &= \int_{\Omega} (\nabla \Phi_{int})^T(\mathbf{x}) (\nabla \Phi_b)(\mathbf{x}) d\Omega \\ & + b \int_{\Omega} (\Phi_{int})^T(\mathbf{x}) (\Phi_b)(\mathbf{x}) d\Omega, \\ \mathbf{F} &= \int_{\Omega} (\Phi_{int})^T(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\Omega. \end{aligned}$$

در حالت شرایط مرزی همگن (12) به دستگاه زیر تقلیل می‌یابد.

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}.$$

ماتریس \mathbf{K} یک ماتریس متقارن مثبت معین می‌باشد زیرا

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{\Omega} (\nabla \Phi_{int})^T(\mathbf{x}) (\nabla \Phi_{int})(\mathbf{x}) d\Omega \\ & + b \int_{\Omega} (\Phi_{int})^T(\mathbf{x}) (\Phi_{int})(\mathbf{x}) d\Omega, \end{aligned}$$

و برای بردار دلخواه z داریم

$$\begin{aligned} z^T \mathbf{K} z &= z^T \left(\int_{\Omega} (\nabla \Phi_{int})^T(\mathbf{x}) (\nabla \Phi_{int})(\mathbf{x}) d\Omega \right. \\ & \left. + b \int_{\Omega} (\Phi_{int})^T(\mathbf{x}) (\Phi_{int})(\mathbf{x}) d\Omega \right) z \\ &= \int_{\Omega} z^T (\nabla \Phi_{int})^T(\mathbf{x}) (\nabla \Phi_{int})(\mathbf{x}) z d\Omega \\ & + b \int_{\Omega} z^T (\Phi_{int})^T(\mathbf{x}) (\Phi_{int})(\mathbf{x}) z d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\nabla \Phi_{int} z)^T(\mathbf{x}) (\nabla \Phi_{int} z)(\mathbf{x}) d\Omega \\ & + b \int_{\Omega} (\Phi_{int} z)^T(\mathbf{x}) (\Phi_{int} z)(\mathbf{x}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \|\nabla \Phi_{int} z\|_2^2 d\Omega + b \int_{\Omega} \|\Phi_{int} z\|_2^2 d\Omega. \end{aligned}$$

$$\inf_{v \in V_\rho} \|u_N - v\|_E \leq \|u_N - u_N^\rho\|_E.$$

بنابراین

$$\|u_N - u_N^\rho\|_E = \inf_{v \in V_\rho} \|u_N - v\|_E,$$

یعنی

$$a(u_N - u_N^\rho, u_N - u_N^\rho) = \inf_{v \in V_\rho} a(u_N - v, u_N - v).$$

برای بند ج داریم

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} \|u - u^\rho\|_{\mathbb{H}^1}^2 &\leq a(u - u^\rho, u - u^\rho) \\ &= a(u - u_\rho, u - v) \\ &\quad + a(u - u_\rho, v - u_\rho) \\ &= a(u - u_\rho, u - v) \\ &\leq \bar{M} \|u - u_\rho\|_{\mathbb{H}^1} \|u - v\|_{\mathbb{H}^1} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\|u - u_\rho\|_{\mathbb{H}^1} \leq \frac{\bar{M}}{\bar{\alpha}} \|u - v\|_{\mathbb{H}^1}.$$

با اینفیمم گرفتن روی هر $v \in V_\rho$ داریم

$$\|u - u_\rho\|_{\mathbb{H}^1} \leq \frac{\bar{M}}{\bar{\alpha}} \inf_{v \in V_\rho} \|u - v\|_{\mathbb{H}^1}.$$

بنابراین اثبات کامل می‌شود.

عملگر درونیاب روش کمترین مربعات متحرک را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$Iu = Su + \sum_{i=1}^m a_i(x) g_i(x) = \Phi^T u.$$

از [5,6] داریم اگر $u \in \mathbb{H}^{m+1}$ آنگاه تابع کراندار $C_k'(x)$ و ثابت C_k وجود دارند بطوریکه

$$\frac{\partial^{k_1} \partial^{k_2} \dots \partial^{k_n}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} \Phi_I(x) = C_k'(x) \rho_x^{-|k|}, \quad (16)$$

$$\|Iu - u\|_{\mathbb{H}^k} \leq C_k \rho^{m+1-|k|} \|u\|_{\mathbb{H}^{m+1}},$$

$$V_\rho = \{v \mid v \in \text{Span}\{\phi_I\}, v = 0 \text{ on } \partial\Omega\},$$

که ϕ_I توابع شکل روش بدون المان گالرکین هستند. فرم ضعیف گالرکین متناسب با معادله (35) یافتن

یک تابع $u_\rho \in V_\rho$ است بطوریکه

$$a(u_\rho, v) = (g, v) \quad \forall v \in V_\rho. \quad (15)$$

قضیه 4-1: فرض u, u_ρ به ترتیب جواب‌های مسئله تغییراتی (13) و روش بدون المان گالرکین (15) باشند، بنابراین داریم:

$$a(u - u_\rho, v) = 0 \quad \forall v \in V_\rho \quad (\text{الف})$$

$$a(u - u_\rho, u - u_\rho) = \inf_{v \in V_\rho} a(u - v, u - v) \quad (\text{ب})$$

$$\|u - u_\rho\|_{\mathbb{H}^1} \leq C \inf_{v \in V_\rho} \|u - v\|_{\mathbb{H}^1} \quad (\text{ج})$$

اثبات: با تفاضل (15) از (13) برای هر $v \in V_\rho$ داریم

$$a(u - u_\rho, v) = a(u, v) - a(u_\rho, v) = 0$$

نرم انرژی را به شکل $\|u\|_E = \sqrt{a(u, u)}$ تعریف می‌کنیم. حال داریم:

$$\begin{aligned} \|u - u_\rho\|_E^2 &= a(u - u_\rho, u - u_\rho) \\ &= a(u - u_\rho, u - v) + \\ &\quad a(u - u_\rho, v - u_\rho) \\ &= a(u - u_\rho, u - v) \\ &\leq \|u - u_\rho\|_E \|u - v\|_E. \end{aligned}$$

اگر $\|u_N - u_N^\rho\|_E \neq 0$ با تقسیم کردن بر آن برای هر

$v \in V_\rho$ داریم $\|u_N - u_N^\rho\|_E \leq \|u_N - v\|_E$ اگر

$\|u_N - u_N^\rho\|_E = 0$ این نامساوی بدیهی است. با

اینفیمم گرفتن از $v \in V_\rho$ داریم:

$$\|u_N - u_N^\rho\|_E \leq \inf_{v \in V_\rho} \|u_N - v\|_E.$$

چون $v \in V_\rho$ داریم

که $k = (k_1, k_2, \dots, k_n), 0 \leq |k| \leq m$ و (18) و (19) به این نتیجه

می‌رسیم که

$$a(\varphi - v_\rho, u - u_\rho) = (f, u - u_\rho). \quad (20)$$

حال اگر $v_\rho = I\varphi$ و $f = u - u_\rho$ آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} \|u - u_\rho\|_{L^2}^2 &= (u - u_\rho, u - u_\rho) \\ &= a(\varphi - I\varphi, u - u_\rho) \\ &\leq \bar{M} \|\varphi - I\varphi\|_{H^1} \|u - u_\rho\|_{H^1} \\ &\leq \bar{M} C_1 \rho \|\varphi\|_{H^2} C_2 \rho^m \|u\|_{H^{m+1}}. \end{aligned} \quad (21)$$

با توجه به معادلات (18) و (21) داریم:

$$\|u - u_\rho\|_{L^2} \leq C \rho^{m+1} \|u\|_{H^{m+1}}.$$

بنابراین این قضیه اثبات می‌شود.

5- نتایج عددی

در مثال‌های زیر شرایط مرزی و تابع g از روی جواب دقیق مسئله بدست آمده‌اند و

$$q_x = \max_{1 \leq i \leq N} \min_{1 \leq j \leq N, j \neq i} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2.$$

همچنین با محاسبه نرم سوپولف مرسوم خطای روش مثال‌های ارائه شده، مرتبه همگرایی تابع و مشتق را برای آن‌ها مشخص می‌کنیم.

$$\|u - u^h\|_{H^k} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} (D^\alpha (u - u^h))^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

مثال 1-5: معادله (8) از درجه اول با $b = 0$ را روی

$\Omega = [0, 1]$ در نظر بگیرید. پایه‌ها را تا مرتبه دوم نظر

می‌گیریم. جواب دقیق این مسئله $u = \sin(\pi x)$

است. شرایط مرزی برای این مثال از نوع همگن

می‌باشد. تخمین خطای بدست آمده برای این مثال

در شکل 1 نمایش داده شده است.

شکل 1 همگرایی روش ارائه شده در این مقاله را تایید

می‌کند و نشان می‌دهد که مرتبه همگرایی جواب 3

قضیه 2-4: فرض u_ρ, u به ترتیب جواب‌های (13)

و (15) باشند، آنگاه C_1 و C_2 مستقل از ρ وجود

دارند بطوریکه

$$\|u - u_\rho\|_E \leq C_1 \rho^m \|u\|_{H^{m+1}},$$

$$\|u - u_\rho\|_{H^1} \leq C_2 \rho^m \|u\|_{H^{m+1}}.$$

اثبات: با استفاده از قضیه 1-4 و (16) داریم:

$$\|u - u_\rho\|_E^2 = a(u - u_\rho, u - u_\rho)$$

$$= \inf_{v \in V_\rho} a(u - v, u - v)$$

$$\leq a(u - Iu, u - Iu)$$

$$\leq \bar{M} \|u - Iu\|_{H^1}^2$$

$$\leq C_1 \rho^{2m} \|u\|_{H^{m+1}}^2,$$

$$\|u - u_\rho\|_{H^1} \leq C \inf_{v \in V_\rho} \|u - v\|_{H^1}$$

$$\leq C \|u - Iu\|_{H^1}$$

$$\leq C_2 \rho^m \|u\|_{H^{m+1}}.$$

قضیه 3-4: فرض u_ρ, u به ترتیب جواب‌های

(13) و (15) باشند، آنگاه ثابت C مستقل از ρ

وجود دارد بطوریکه

$$\|u - u_\rho\|_{L^2} \leq C \rho^{m+1} \|u\|_{H^{m+1}}.$$

اثبات: برای هر $f \in L^2$ فرض $\varphi \in H_0^1 \cap H^2$ جواب

$$a(\varphi, v) = (g, v) \quad \forall v \in H_0^1,$$

$$\|\varphi\|_{H^2} \leq \|f\|_{L^2}. \quad (17)$$

اگر $v = u - u_\rho$ پس داریم:

$$a(\varphi, u - u_\rho) = (f, u - u_\rho), \quad (18)$$

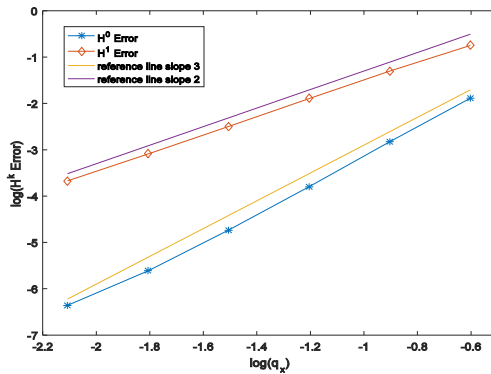
برای $v_\rho \in V_\rho$ دلخواه با توجه به قضیه 1-4 داریم:

$$a(v_\rho, u - u_\rho) = 0. \quad (19)$$

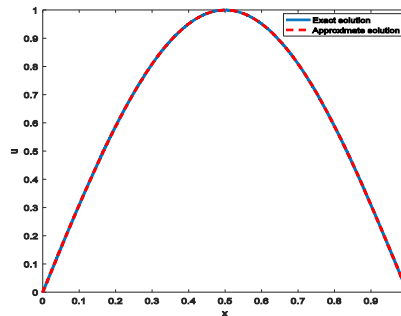
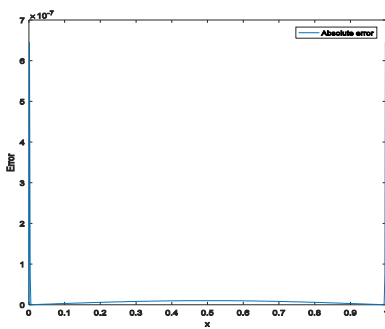
را ناهمگن فرض می‌کنیم. در شکل 3 نمودار خطای سوبولف را گزارش کرده‌ایم. همگرایی روش توسط شکل 3 نیز تایید می‌شود. می‌توان مشاهده کرد که مرتبه همگرایی جواب 3 و مرتبه همگرایی مشتق آن 2 است. همچنین جواب عددی، جواب دقیق و قدر مطلق خطا در شکل 4 نمایش داده شده است.

و مرتبه همگرایی مشتق آن 2 می‌باشد. همچنین جواب عددی، جواب دقیق و قدر مطلق خطا در شکل 2 نمایش داده شده است.

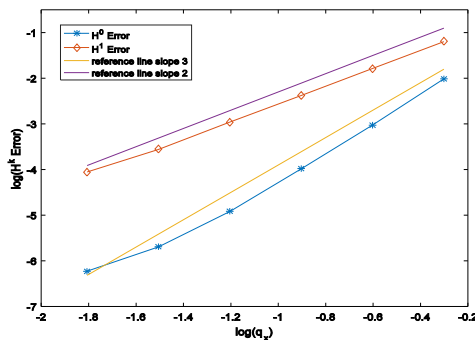
مثال 5-2: در این مثال معادله (8) از درجه اول را با $b = 1$ روی $\Omega = [0, 1]$ در نظر می‌گیریم. دوباره پایه‌ها را تا مرتبه دوم در نظر می‌گیریم. جواب دقیق این مثال $u = \exp(x)$ است. شرایط مرزی این مثال



شکل 1: نمودار نرم سوبولف خطا برای مثال 5-1



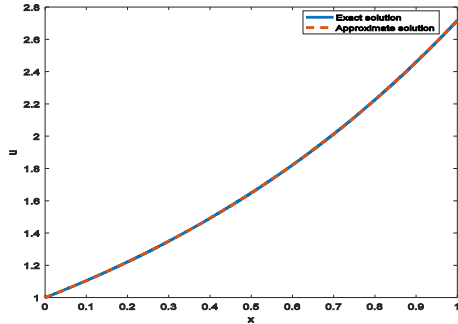
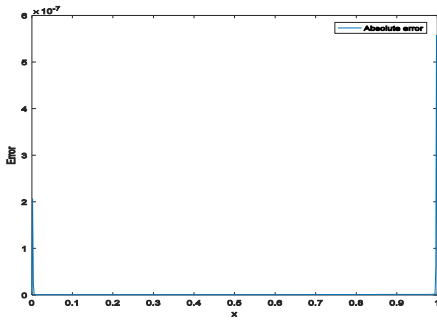
شکل 2: جواب عددی، جواب دقیق و قدر مطلق خطا روش ارائه شده برای مثال 5-1 با $q_x = 0.001953125$



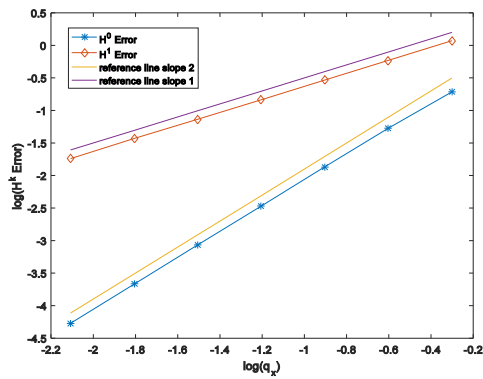
شکل 3: نمودار نرم سوبولف خطا برای مثال 5-2

نمودار نرم سوبولف خطای روش را برای این مثال رسم کرده‌ایم. شکل 5 نیز نشان می‌دهد که این روش همگراست و مرتبه همگرایی برای جواب این مثال 2 و برای مشتق جواب 1 است. همچنین جواب عددی، جواب دقیق و قدر مطلق خطا در شکل 6 نمایش داده شده است.

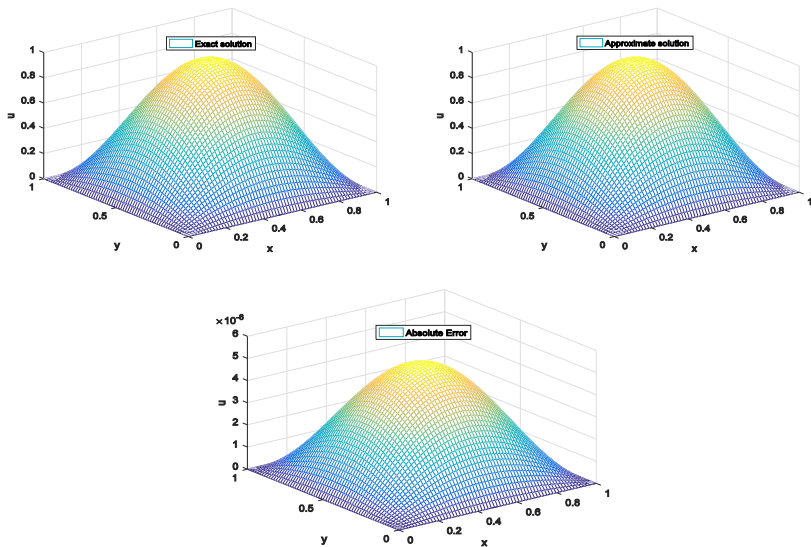
مثال 3-5: اکنون معادله (8) از درجه دوم را روی $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ در نظر بگیرید. فرض $b = 0$ و جواب دقیق این مسئله به شکل $u = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ باشد. پایه‌ها را از مرتبه اول و شرایط مرزی برای این مسئله را از نوع همگن در نظر می‌گیریم. در شکل 5



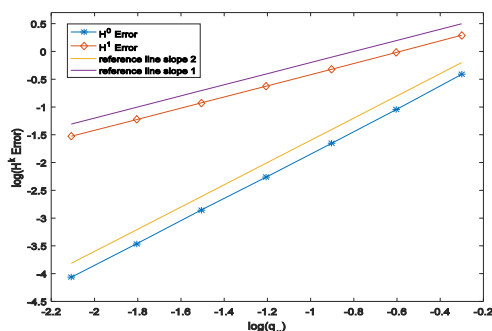
شکل 4: جواب عددی، جواب دقیق و قدر مطلق خطا روش ارائه شده برای مثال 2-5 با $q_x = 0.001953125$



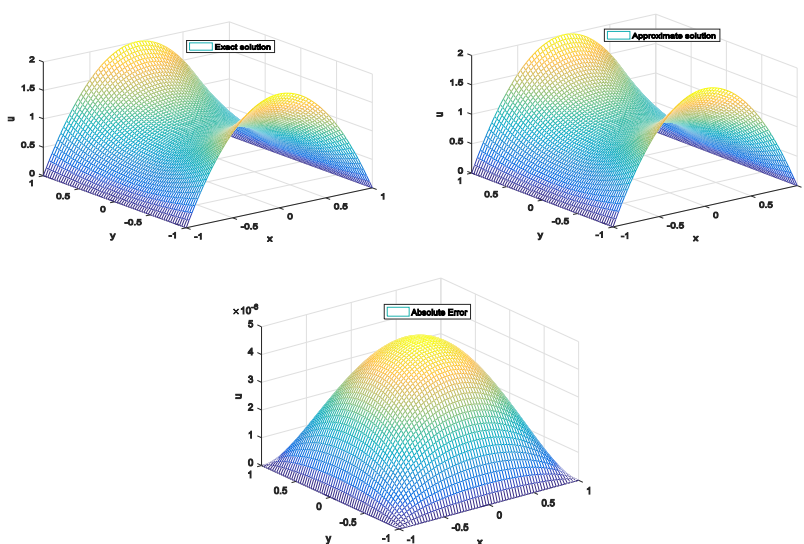
شکل 5: نمودار نرم سوبولف خطا برای مثال 3-5



شکل 6: جواب عددی، جواب دقیق و قدر مطلق خطا روش ارائه شده برای مثال 3-5 با $q_x = 0.0156$



شکل 7: نمودار نرم سوپولف خطا برای مثال 4-5

شکل 8: جواب عددی، جواب دقیق و قدر مطلق خطا روش ارائه شده برای مثال 4-5 با $q_x = 0.0156$

نتیجه‌گیری

در این مقاله یک ایده جدید برای اعمال شرایط مرزی اساسی در روش بدون المان گالرکین برای حل معادلات با مشتقات جزئی بیضوی ارائه شد. مهم‌ترین اشکال‌های روش ضرایب لاگرانژ از قرار زیر هستند:

- (1) بعد دستگاه حاصل از گسسته‌سازی معادله افزایش می‌یابد.
- (2) با اینکه ماتریس اصلی حاصل از گسسته‌سازی متقارن و نیمه معین مثبت است، ماتریس سراسری نیز متقارن است ولی دیگر معین مثبت نیست.

مثال 4-5: اکنون معادله (8) از درجه دوم را روی $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ در نظر می‌گیریم. فرض $b = 0$ و جواب دقیق این مسئله به شکل $u = (1 - x^2)(1 + y^2)$ باشد. پایه‌ها را از مرتبه اول و شرایط مرزی برای این مسئله را از نوع همگن در نظر می‌گیریم. نمودار نرم سوپولف خطای روش برای این مثال در شکل 7 رسم شده است. با توجه به شکل 7 نیز می‌توان همگرایی روش را مشاهده کرد. همچنین مرتبه همگرایی برای جواب این مثال 2 و برای مشتق جواب 1 است. قدر مطلق خطا در شکل 8 نمایش داده شده است.

نمی‌یابد. ماتریس همچنان متقارن و معین مثبت باقی می‌ماند بنابراین روش‌های خطی برای حل ماتریس‌های متقارن و معین مثبت همچنان قابل استفاده هستند.

بنابراین روش‌های استاندارد خطی برای ماتریس‌های متقارن و معین مثبت را نمی‌توان به کار برد. (3) گسسته‌سازی ضریب λ باید دارای دقت کافی باشد تا جواب قابل قبولی بدست آید، اما دستگاه حاصل از معادله، زمانی که تعداد ضرایب لاگرانژ خیلی بزرگ شود، به سمت منفرد شدن پیش می‌رود. در حقیقت، فضای درونیایی برای ضریب لاگرانژ λ و مجهول اصلی یعنی u باید در شرط بابوشکا-برزی صدق کند تا همگرایی تقریب تضمین شود. روش جریمه به راحتی قابل به کارگیری برای انواع مختلف معادلات است. روش جریمه دو مزیت واضح دارد: (1) بعد دستگاه افزایش نمی‌یابد و (2) دستگاه حاصل متقارن و معین مثبت است به شرط اینکه ماتریس اصلی متقارن و α به اندازه کافی بزرگ باشد.

گرچه روش جریمه دو اشکال مهم دارد: شرایط مرزی دیریکله به صورت ضعیف اعمال شده است (پارامتر α چگونگی اعمال شرایط مرزی را کنترل می‌کند) و ماتریس حاصل به طور معمول بدوضع است (عدد حالت ماتریس با افزایش α افزایش می‌یابد).

گسسته‌سازی فرم ضعیف روش نیچه به یک دستگاه هم بعد با ماتریس اصلی منجر می‌شود و ماتریس حاصل متقارن و معین مثبت است به شرطی که ماتریس اصلی متقارن و α به اندازه کافی بزرگ باشد. گرچه همانند روش جریمه، عدد حالت ماتریس با افزایش α افزایش می‌یابد، در عمل نیازی به مقادیر بزرگ α به جهت تضمین همگرایی و اعمال مناسب شرایط مرزی نیست.

عدد حالت ماتریس مشکل اصلی این روش نیست. مشکل اصلی روش نیچه وضع فرم ضعیف آن است. در روش این مقاله بعد ماتریس حاصل نسبت به ماتریس اصلی کاهش می‌یابد (به علت کاهش متغیرها) به خصوص در حالت‌های دو بعدی و بالاتر. نیازی به پارامتر اضافی نیست پس انتخاب پارامتر مسئله‌ای نیست و عدد حالت ماتریس افزایش

- [1] T. Belytschko, Y.Y. Lu, L.Gu. Element-free Galerkin methods, *International journal for numerical methods in engineering*, 37(2):229–256 (1994).
- [2] S. Fernández-Méndez, A. Huerta. Imposing essential boundary conditions in mesh-free methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(12):1257 – 1275, (2004). *Meshfree Methods: Recent Advances and New Applications*.
- [3] P. Lancaster, K. Salkauskas. Surfaces generated by moving least squares methods. *Math.Comp.*, 37:141–158 (1981).
- [4] J.F. Wang, F.X. Sun, Y.M. Cheng, and A.X. Huang. Error estimates for the interpolating moving least-squares method. *Applied Mathematics and Computation* 245:321–342 (2014).
- [5] X. Li, H. Chen, and Y. Wang. Error analysis in Sobolev spaces for the improved moving least-square approximation and the improved element-free Galerkin method. *Applied Mathematics and Computation*, 262:56–78 (2015).
- [6] J.F. Wang, S.Y. Hao, and Y.M. Cheng. The error estimates of the interpolating element-free Galerkin method for two-point boundary value problems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, (2014).

