دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و سوم، آذر و دی ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

نتایجی در مورد شاخص فراموش شده

فرزانه فلاحتی‌نژاد*

گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد صفادشت، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۰۷/۳۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۷/۰۵

چکیده

فرض کنید G گرافی ساده، همبند و متناهی باشد. پایایی (شاخص توپولوژیک یا توصیف کننده مولکولی) گراف G، عددی حقیقی است که به آن گراف نسبت داده می‌شود و به ازای هر گراف دلخواه H که با گراف G یکریخت است، داریم $Top(H) = Top(G)$. مجموع مکعبات درجه‌های راس‌های گراف توسط فورتولا و گوتمان بازبینی شد و شاخص فراموش شده نام گرفت. شاخص فراموش شده گراف ساده G به صورت زیر نیز بیان می‌شود:

$$F(G) = \sum_{uv \in E(G)} \left({d_u}^2 + {d_v}^2\right)$$

که در رابطه اخیر d_u بیانگر درجه راس u از گراف G است. در این مقاله به مقایسه شاخص فراموش شده با برخی از پارامترهای گراف از قبیل مرتبه، اندازه، شعاع، بیشرین و کمترین درجه راس و همچنین برخی از توصیف کننده‌های مولکولی شناخته شده از جمله شاخص‌های زاگرب نوع اول و دوم، شاخص‌های زاگرب اصلاح شده اول و دوم، شاخص هارمونیک، شاخص هایپر زاگرب، شاخص حسابی هندسی، شاخص همبندی خروج از مرکز و شاخص مجموع وارون درجه‌ها می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: درجه راس، شاخص فراموش شده، کران، پایایی گراف.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: farzanehfalahati_n@yahoo.com

۱- مقدمه

در سراسراین مقاله گراف‌ها را همبند، ساده و متناهی در نظر می‌گیریم. فرض کنید G گرافی با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ باشد. تعداد رئوس و یال‌های گراف G را به ترتیب با حروف n و m نشان می‌دهیم. تعداد رئوس مجاور با رأس u، درجه‌ی رأس u در گراف G نامیده می‌شود. درجه‌ی رأس u در گراف G را با نماد d_u نشان می‌دهیم. بیشترین و کمترین درجه رئوس گراف G را به ترتیب با حروف Δ و δ نشان می‌دهیم. فاصله ی دو رأس، طول کوتاه‌ترین مسیر بین آن دو رأس می‌باشد. فاصله‌ی بین دو رأس u و v در گراف G را با نماد $d_G(u,v)$ نشان می‌دهیم. به بیشترین مقدار فاصله راس u نسبت به سایر رئوس گراف، خروج از مرکز راس u می‌گوییم وآن را با نماد ε_u نشان می‌دهیم. کوچکترین مقدار خروج از مرکز رئوس گراف را شعاع گراف نامیده و آن را با نماد $r(G)$ نشان می‌دهیم.

به مجموعه‌ای از یال‌های یک گراف که با هم راس مشترک و منطبق بر یکدیگر ندارند، تطابق یا مجموعه‌ای مستقل از یال‌ها گفته می‌شود. تطابق کامل تطابقی است که همه‌ی راس‌های یک گراف را تطبیق می‌دهد. یعنی هر یک از رئوس گراف، دقیقاً با یکی از یال‌های تطابق برخورد می‌کند.

شاخص توپولوژیک یک گراف عددی حقیقی است که به آن گراف نسبت داده می‌شود و تحت یکریختی گراف‌ها پایا است. شاخص‌های توپولوژیک در مطالعه‌ی ارتباط کمی بین ساختار یک مولکول و خواص فیزیکی، شیمیایی و بیولوژیکی آن مولکول (QSPR) و ارتباط کمی بین ساختار یک مولکول و فعالیت‌های آن مولکول (QSAR) بسیار مفید می‌باشند. اطلاعات بیشتر در مورد شاخص‌های توپولوژیک در مراجع [۱۲،۵] آمده است.

شاخص هایزاگرب در سال ۱۹۷۲ توسط گوتمان و تریناجستیک معرفی شدند.[۱۳]

شاخص‌های زاگرب اول و دوم گراف G به ترتیب با نمادهای $M_1(G)$ و $M_2(G)$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$M_1(G)=\sum_{u\in V(G)} {d_u}^2$$

و

$$M_2(G)=\sum_{uv\in E(G)} d_u d_v$$

شاخص زاگرب اول را می‌توان به صورت زیر نیز تعریف کرد:

$$M_1(G)=\sum_{uv\in E(G)}(d_u+d_v)$$

شاخص‌های زاگرب اصلاح شده اول و دوم در سال ۲۰۰۴ توسط نیکولیچ و همکارانش معرفی شدند.[۱۵] شاخص‌های زاگرب اصلاح شده اول و دوم گراف G به ترتیب با نماد $M_1^*(G)$ و $M_2^*(G)$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$M_1^*(G)=\sum_{u\in V(G)}\frac{1}{{d_u}^2}$$

و

$$M_2^*(G)=\sum_{uv\in E(G)}\frac{1}{d_u d_v}$$

شاخص رندیک در سال ۱۹۷۵ توسط میلان رندیک معرفی شد.[۱۶] شاخص رند یک گراف G با نماد $R(G)$ نشان داده شده و تعریف می‌شود:

$$R(G)=\sum_{uv\in E(G)}\frac{1}{\sqrt{d_u d_v}}$$

شاخص حسابی هندسی توسط وکشویک و فورتولا [۱۹] ارائه شد.شاخص حسابی هندسی گراف G با نماد $GA(G)$ نشان داده شده و تعریف می‌شود:

$$GA(G)=\sum_{uv\in E(G)}\frac{2\sqrt{d_u d_v}}{d_u+d_v}$$

در سال ۱۹۹۷، شاخص همبندی خروج از مرکز توسط شارما و همکارانش ارائه شد. [۱۷] این شاخص در زمینه مدل‌های ریاضی فعالیت‌های بیولوژیکی به‌خوبی عمل کرده است. شاخص همبندی خروج از مرکز گراف G با نماد $\xi^c(G)$

نشان داده شده و تعریف می‌شود:

$$\xi^c(G) = \sum_{uv\in E(G)} d_u\, \varepsilon_u = \sum_{uv\in E(G)} (\varepsilon_u + \varepsilon_v)$$

در سال ۲۰۱۳، شاخص هایپر زاگرب توسط شیردل و همکارانش ارائه شد. [۱۸] شاخص هایپر زاگرب گراف G با نماد $HM(G)$ نشان داده شده و تعریف می‌شود:

$$HM(G) = \sum_{uv\in E(G)} (d_u + d_v)^2$$

در سال ۲۰۱۰، شاخص مجموع وارون درجات توسط وکوشویک و همکارانش ارائه شد. [۲۰] شاخص مجموع وارون درجات گراف G با نماد $ISI(G)$ نشان داده شده و تعریف می‌شود:

$$ISI(G) = \sum_{uv\in E(G)} \frac{1}{\frac{1}{d_u}+\frac{1}{d_v}} = \sum_{uv\in E(G)} \frac{d_u d_v}{d_u+d_v}$$

در سال ۲۰۱۵، مجموع مکعبات درجات رئوس یک گراف توسط گوتمن و فورتولا بازنگری شده و شاخص فراموش شده نامیده شد.[۱۱] شاخص فراموش شده گراف G با نماد $F(G)$ نشان داده شده و تعریف می‌شود:

$$F(G) = \sum_{u\in V(G)} {d_u}^3$$

شاخص فراموش شده را می‌توان به صورت زیر نیز تعریف کرد:

$$F(G) = \sum_{uv\in E(G)} \left({d_u}^2 + {d_v}^2\right)$$

در این مقاله به ارائه کران برای شاخص فراموش شده می‌پردازیم. برای مطالعه‌ی بیشتر در مورد محاسبه کران برای شاخص‌هایی که بر مبنای درجه رئوس تعریف شده‌اند، مراجع [۶-۱۰، ۱-۳] را ببینید.

۲- پیش نیازها

در این بخش به ارائه تعاریف و لم‌های مورد نیاز می‌پردازیم. فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ اعداد حقیقی مثبت باشند، آنگاه:

میانگین حسابی $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر است با

$$AM(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

میانگین هندسی $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر است با

$$GM(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

میانگین مربعی $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر است با

$$QM(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{\frac{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}{n}}$$

میانگین هارمونیک $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر است با

$$HM(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

در لم زیر ارتباط بیناین چهار میانگین به خوبی بیان شده است.

لم ۱: فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ اعداد حقیقی نامنفی باشند، آنگاه همواره داریم:

$$QM(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq AM(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq GM(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq HM(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

لم ۲ (نامساوی کشی-شوارتز): فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ و $y_1, y_2, \dots, y_n$ دنباله‌هایی از اعداد حقیقی باشند، آنگاه داریم:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2$$

در نامساوی اخیر،حالت تساوی برقرار است اگر و فقط اگر به ازای هر $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم $x_i = cy_i$.

نتیجه ۳: فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد، آنگاه داریم:
$(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$

حالت تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

لم ۴[۴] **(نامساوی دیاز-متکالف):** فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ و $y_1, y_2, \dots, y_n$ اعداد حقیقی باشند و به ازای هر $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم $px_i \leq y_i \leq Px_i$، آنگاه داریم:
$\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 + pP \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \leq (p + P) \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
$y_i = Px_i$یا$y_i = px_i$

در نامساوی اخیر، حالت تساوی برقرار است اگر و فقط اگر به ازای هر $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم $y_i = px_i$یا $y_i = Px_i$.

لم ۵[۱۴]: فرض کنید G یک گراف همبند غیر بدیهی از مرتبه‌ی n باشد.آنگاه به ازای هر $v \in V(G)$ داریم:
$d_u \leq n - \varepsilon_u$

حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G \cong P_4$ یا $G \cong K_n - iK_2$، که در آن $0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ بطوریکه $K_n - iK_2$ گراف حاصل از حذف iیال غیر وابسته از گراف کامل K_n باشد.

۳- نتایج

در این مقاله به ارائه کران‌های بالا و پایین متنوعی برای شاخص فراموش شده بر حسب پارامترهای گراف و توصیف‌گرهای مولکولی متعدد می‌پردازیم. در سرتاسر این بخش باگراف‌های غیر بدیهی، ساده و هم‌بنداز مرتبه‌ی n و اندازه‌ی m، سروکار داریم.

قضیه ۱: شاخص فراموش شده گراف دلخواه G برابر است با:
$F(G) = HM(G) - 2M_2(G)$

اثبات: طبق تعریف شاخص‌های فراموش شده، هایپر زاگرب و شاخص زاگرب دوم داریم:
$F(G) = \sum_{uv \in E(G)} \left({d_u}^2 + {d_v}^2\right) =$
$\sum_{uv \in E(G)} (d_u + d_v)^2 - \sum_{uv \in E(G)} 2 d_u d_v$
$= HM(G) - 2M_2(G)$

این اثبات را کامل می‌کند.■

قضیه ۲: برای هر گراف دلخواه G،
$n\delta^3 \leq F(G) \leq n\Delta^3$

حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر گراف منتظم باشد.

اثبات: واضح است که به ازای هر $u \in V(G)$ داریم $\delta^3 \leq {d_u}^3 \leq \Delta^3$ لذا
$n\delta^3 = \sum_{u \in V(G)} \delta^3 \leq F(G) =$
$\sum_{u \in V(G)} {d_u}^3 \leq \sum_{u \in V(G)} \Delta^3 = n\Delta^3$

حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر به ازای هر $u \in V(G)$ داشته باشیم $d_u = \delta = \Delta$ که بر منتظم بودن گراف دلالت می‌کند.■

قضیه ۳: برای هر گراف دلخواه G، $2M_2(G) \leq F(G)$ حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر گراف منتظم باشد.

اثبات: طبق نامساوی هندسی- مربعی داریم:
$2M_2(G) = 2 \sum_{uv \in E(G)} d_u d_v$
$\leq \sum_{uv \in E(G)} \left({d_u}^2 + {d_v}^2\right) = F(G)$

حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر به ازای هر $uv \in E(G)$ داشته باشیم $d_u = d_v$ که بر منتظم بودن گراف دلالت می‌کند.■

قضیه ۴: برای هر گراف دلخواه G، $\frac{F(G)}{8} \geq \frac{ISI(G)^2}{m}$ حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر گراف منتظم باشد.

اثبات: طبق نامساوی‌های کوشی شوارتز و مربعی-هارمونیک داریم:

$$\frac{F(G)}{8} = \sum_{uv\in E(G)} \frac{\left({d_u}^2+{d_v}^2\right)}{8} \geq \left(\sum_{uv\in E(G)} \left(\frac{d_u d_v}{d_u+d_v}\right)^2\right) \geq \frac{\left(\sum_{uv\in E(G)} \frac{d_u d_v}{d_u+d_v}\right)^2}{\left(\sum_{uv\in E(G)} 1^2\right)} = \frac{ISI(G)^2}{m}$$

با توجه به لم ۱، اولین حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر به ازای هر $uv \in E(G)$ داشته باشیم $d_u = d_v$ که بر منتظم بودن گراف دلالت می‌کند.
با توجه به لم ۲، دومین حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگربه ازای هر $uv \in E(G)$ ثابت c وجود داشته باشد بطوریکه داشته باشیم $\frac{d_u d_v}{d_u+d_v} = c$.
اگر $uv, uz \in E(G)$آنگاه $\frac{d_u d_v}{d_u+d_v} = \frac{d_u d_z}{d_u+d_z}$، لذا $d_v(d_u + d_z) = d_z(d_u + d_v)$که به سادگی می‌توان نوشت $d_v = d_z$. لذا به ازای هر u تمامی رئوسی که در همسایگی آن هستند دارای درجه یکسانند لذا دومین تساوی برقرار است اگر و تنها اگر گراف G منتظم یا دو منتظم باشد.
در نتیجه حکم برقرار است وحالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر گراف منتظم باشد.■

قضیه ۵: برای هر گراف دلخواه G، $2m\delta^4 + 2m\delta\Delta \leq (\delta + \Delta)F(G)$ حالت تساوی برقرار است و تنها اگر گراف منتظم باشد.

اثبات: کافیست در نامساوی دیاز-متکالف مقادیر $p = 2\delta$،$P = 2\Delta$ و همچنین $x_i = 1$، $y_i = {d_u}^2+{d_v}^2$ و به ازای هر $1 \leq i \leq m$ جایگزاری شود، لذا داریم

$$4m\delta^4 + 4m\delta\Delta = 4m\delta^4 + 4\delta\Delta \sum_{uv\in E(G)} (1)^2 \leq \sum_{uv\in E(G)} \left({d_u}^2+{d_v}^2\right)^2 + 4\delta\Delta \sum_{uv\in E(G)} (1)^2 \leq 2(\delta + \Delta) \sum_{uv\in E(G)} \left({d_u}^2+{d_v}^2\right)$$

در نتیجه $2m\delta^4 + 2m\delta\Delta \leq (\delta + \Delta)F(G)$ حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر به ازای هر $uv \in E(G)$ داشته باشیم ${d_u}^2+{d_v}^2 = 2\delta$ یا ${d_u}^2+{d_v}^2 = 2\Delta$که بر منتظم بودن گراف دلالت می‌کند.■

قضیه ۶: برای هر گراف دلخواه G، $2\delta^3 R(G) \leq F(G) \leq 2\Delta^3 R(G)$ حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر گراف منتظم باشد.

اثبات: واضح است که برای هر $uv \in E(G)$،

$$2\delta^3 = 2\delta^2\sqrt{\delta^2} \leq \left({d_u}^2 + {d_v}^2\right)\sqrt{d_u d_v} \leq 2\Delta^2\sqrt{\Delta^2} = 2\Delta^3$$

به کمک تعریف شاخص‌های فراموش شده و رندیک داریم:

$$2\delta^3 R(G) \leq F(G) = \sum_{uv\in E(G)} \left({d_u}^2 + {d_v}^2\right) \frac{\sqrt{d_u d_v}}{\sqrt{d_u d_v}} \leq 2\Delta^3 R(G)$$

حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر به ازای هر $uv \in E(G)$ داشته باشیم $d_u = d_v = \delta = \Delta$ که بر منتظم بودن گراف دلالت می‌کند. ■

قضیه ۷: برای هر گراف دلخواه G، $(2\delta^4)M_2^*(G) \leq F(G) \leq (2\Delta^4)M_2^*(G)$ حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر گراف منتظم باشد.

اثبات: واضح است که برای هر $uv \in E(G)$ ،

$$2\delta^4 = 2\delta^2\delta^2 \leq \left({d_u}^2 + {d_v}^2\right) d_u d_v \leq 2\Delta^2\Delta^2 = 2\Delta^4$$

به کمک تعریف شاخص‌های فراموش شده و زاگرب اصلاح شده دوم داریم:

$$(2\delta^4)M_2^*(G) \le F(G) = \sum_{uv\in E(G)}\left({d_u}^2+{d_v}^2\right)\frac{d_ud_v}{d_ud_v} \le (2\Delta^4)M_2^*(G)$$

حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر به ازای هر $uv\in E(G)$ داشته باشیم $d_u=d_v=\delta=\Delta$ که بر منتظم بودن گراف دلالت می‌کند.■

قضیه ۸: برای هر گراف دلخواه G، $F(G)\ge \frac{2\delta^2}{m}(GA(G))^2$ حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر گراف منتظم باشد.

اثبات: طبق نامساوی مربعی هارمونیک و نتیجه ۳ داریم:

$$\frac{F(G)}{2}=\sum_{uv\in E(G)}\frac{{d_u}^2+{d_v}^2}{2}\ge \sum_{uv\in E(G)}\left(\frac{2}{\frac{1}{d_u}+\frac{1}{d_v}}\right)^2 = \sum_{uv\in E(G)}\left(\frac{2d_ud_v}{d_u+d_v}\right)^2 \ge \frac{1}{m}\left(\sum_{uv\in E(G)}\frac{2d_ud_v}{d_u+d_v}\right)^2 = \frac{1}{m}\left(\sum_{uv\in E(G)}\frac{2\sqrt{d_ud_v}}{d_u+d_v}\sqrt{d_ud_v}\right)^2 \ge \frac{1}{m}\left(\delta\sum_{uv\in E(G)}\frac{2\sqrt{d_ud_v}}{d_u+d_v}\right)^2 = \frac{\delta^2}{m}(GA(G))^2$$

با توجه به لم ۱، اولین حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر به ازای هر $uv\in E(G)$ داشته باشیم $d_u=d_v$ که بر منتظم بودن گراف دلالت می‌کند.
با توجه به لم۱، دومین حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگربه ازای هر $uv\in E(G)$، ثابت c وجود داشته باشد بطوریکه داشته باشیم $\frac{2d_ud_v}{d_u+d_v}=c$. اگر $uv,uz\in E(G)$ آنگاه داریم $\frac{2d_ud_v}{d_u+d_v}=\frac{2d_ud_z}{d_u+d_z}$، لذا $d_v(d_u+d_z)=d_z(d_u+d_v)$ که به سادگی می‌توان نوشت $d_v=d_z$. لذا به ازای هر u تمامی رئوسی که در همسایگی آن هستند دارای درجه یکسانند لذا دومین تساوی برقرار است اگر و تنها اگر گراف منتظم یا دو منتظم باشد.
سومین حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگربه ازای هر $uv\in E(G)$، داشته باشیم $d_u=d_v=\delta$ که بر منتظم بودن گراف دلالت می‌کند.
در نتیجه حکم برقرار است و حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر گراف منتظم باشد.■

قضیه۹: برای هر گراف دلخواه G، $F(G)\ge \frac{2m^2\delta^3}{\Delta\, GA(G)}$. حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر گراف منتظم باشد.

اثبات: طبق نامساوی حسابی هارمونیک داریم:

$$\frac{m}{GA(G)}=\frac{m}{\sum_{uv\in E(G)}\frac{2\sqrt{d_ud_v}}{d_u+d_v}} \le \frac{1}{m}\sum_{uv\in E(G)}\frac{d_u+d_v}{2\sqrt{d_ud_v}} = \frac{1}{2m}\sum_{uv\in E(G)}\frac{d_u+d_v}{\sqrt{d_ud_v}}\times\frac{{d_u}^2+{d_v}^2}{{d_u}^2+{d_v}^2} = \frac{1}{2m}\sum_{uv\in E(G)}\left({d_u}^2+{d_v}^2\right)\times\frac{d_u+d_v}{\sqrt{d_ud_v}\left({d_u}^2+{d_v}^2\right)} \le \frac{\Delta}{2m\delta^3}F(G)$$

با توجه به لم ۱،اولین حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگربه ازای هر $uv\in E(G)$، ثابت c وجود داشته باشد بطوریکه داشته باشیم $\frac{d_u+d_v}{2\sqrt{d_ud_v}}=c$. اگر $uv,uz\in E(G)$ آنگاه داریم $\frac{d_u+d_v}{2\sqrt{d_ud_v}}=\frac{d_u+d_z}{2\sqrt{d_ud_z}}$، لذا $\sqrt{d_ud_v}(d_u+d_z)=\sqrt{d_ud_z}(d_u+d_v)$ که به سادگی می‌توان نوشت $d_v=d_z$. لذا به ازای هر u تمامی رئوسی که در همسایگی آن هستند دارای درجه یکسانند لذا اولین تساوی برقرار است اگر و تنها اگر گراف منتظم یا دو منتظم باشد.
دومین حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر به ازای هر $uv\in E(G)$، داشته باشیم

$d_u = d_v = \delta = \Delta$ که بر منتظم بودن گراف دلالت می‌کند.

در نتیجه حکم برقرار است و حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر گراف منتظم باشد.■

قضیه ۱۰: برای هر گراف دلخواه G، $F(G) \leq 2n^2m + \xi_3(G) - 2n\xi^c(G)$ بطوریکه $\xi_3(G) = \sum_{u\in V(G)}({\varepsilon_u}^2 + {\varepsilon_v}^2)$.

حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G \cong P_4$ یا به ازای هر $0 \leq i \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ داشته باشیم $G \cong K_n - iK_2$.

اثبات: طبق تعریف شاخص فراموش شده و لم ۵ داریم:

$$F(G) = \sum_{uv\in E(G)}\left({d_u}^2 + {d_v}^2\right)$$
$$\leq \sum_{uv\in E(G)}((n - \varepsilon_u)^2 + (n - \varepsilon_v)^2)$$
$$= \sum_{uv\in E(G)}(2n^2 + ({\varepsilon_u}^2 + {\varepsilon_v}^2) - 2n(\varepsilon_u + \varepsilon_v))$$
$$= 2n^2m + \xi_3(G) - 2n\xi^c(G)$$

حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر به ازای هر $u \in V(G)$ داشته باشیم $d_u = n - \varepsilon_u$ لذا با توجه به لم ۵ به ازای هر $0 \leq i \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ داریم $G \cong P_4$ یا $G \cong K_n - iK_2$ و این اثبات را کامل می‌کند.■

نتیجه ۱۱: برای هر گراف دلخواه G، $F(G) \leq 2m\big(n - r(G)\big)^2$ حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G \cong K_n$ یا G گراف حاصل از برداشتن یک تطابق کامل از گراف K_n باشد.

اثبات: طبق تعریف شاخص فراموش شده و لم ۵ داریم:

$$F(G) = \sum_{uv\in E(G)}\left({d_u}^2 + {d_v}^2\right)$$
$$\leq \sum_{uv\in E(G)}((n - \varepsilon_u)^2 + (n - \varepsilon_v)^2)$$
$$\leq \sum_{uv\in E(G)}((n - r(G))^2 + (n - r(G))^2) = 2m\big(n - r(G)\big)^2$$

اولین حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر به ازای هر $u \in V(G)$ داشته باشیم $d_u = n - \varepsilon_u$ لذا با توجه به لم ۵ به ازای هر $0 \leq i \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ داریم $G \cong P_4$ یا $G \cong K_n - iK_2$. دومین حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگربه ازای هر $u \in V(G)$، داشته باشیم $r(G) = \varepsilon_i$ که با توجه به لم ۵ اثبات کامل است.■

فهرست منابع

[1] M. Azari, Sharp lower bounds on the Narumi-Katayama index of graph operations, *Appl. Math. Comput.*, 239C (2014) 409-421.

[2] M. Azari and A. Iranmanesh, Some inequalities for the multiplicative sum Zagreb index of graph operations, *J. Math. Inequal.*, 9 (3) (2015), 727-738.

[3] K. C. Das, I. Gutman and B. Furtula, Survey on geometric–arithmetic indices of graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 65(2011) 595-644.

[4] J. B. Diaz and F. T. Metcalf, Stronger forms of a class of inequalities of G. Pólya-G. Szegö, and L. V. Kantorovich, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69(1963) 415-418.

[5] M. V. Diudea, *QSPR/QSAR studies by molecular descriptors*, NOVA, New York, 2001.

[6] F. FalahatiNezhad, A. Iranmanesh, A. Tehranian and M. Azari, Strict lower bounds on the multiplicative Zagreb indices of graph operations, *ArsCombin.*, 117(2014) 399-409.

[7] F. Falahati-Nezhad, M. Azari. Bounds on the hyper-Zagreb index, J. Appl. Math. Inform., 34(2016), 319-330.

[8] F. Falahati-Nezhad, A. Iranmanesh, A. Tehranian and M. Azari, Comparing the second multiplicative Zagreb coindex with some graph invariants, *Trans. Comb.*, 3(4) (2014) 31-41.

[9] F. FalahatiNezhad, M. Azari andT. Došlić, Sharp bounds on the inverse sum indegindex, Discrete Applied Mathematics, 217 (2017) 185-195.

[10] F. Falahati-Nezhad, A. Iranmanesh, A. Tehranian and M. Azari, Upper bounds on the second multiplicative Zagreb coindex, *Util. Math.*, 96 (2015) 79-88.

[11] B. Furtula and I. Gutman, A forgotten topological index, J. Math. Chem. 53(4) (2015) 1184–1190.

[12] I. Gutman and O. E. Polansky, *Mathematical Concepts in Organic Chemistry*, Springer, Berlin, 1986.

[13] I. Gutman and N. Trinajstić, Graph theory and molecular orbitals, Total $\pi-$electronenergy of alternant hydrocarbons, *Chem. Phys. Lett.*, 17 (1972) 535-538.

[14] A. Ilić, G. Yu and L. Feng, On the eccentric distance sum of graphs, *J. Math. Anal. Appl.*, 381(2011) 590–600.

[15] A. Miličević, S. Nikolić, N. Trinajstić, On reformulated Zagreb indices, Mol. Divers.8399-3930 (2004).

[16] M. Randić, On characterization of molecular branching, *J. Am. Chem. Soc.*, 97 (1975) 6609-6615.

[17] V. Sharma, R. Goswami and A. K. Madan, Eccentric connectivity index: A novel highly discriminating topological descriptor for structure–property and structure–activity studies, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.*, 37 (1997) 273–282.

[18] G. H. Shirdel, H. Rezapour and A. M. Sayadi, The hyper-Zagreb index of graph operations, *Iranian J. Math. Chem.,* 4(2) (2013) 213-220.

[19] D. Vukičević and B. Furtula, Topological index based on the ratios of geometrical and arithmetical means of end-vertex degrees of edges, *J. Math. Chem.*, 46 (2009) 1369-1376.

[20] D. Vukičević, M. Gašperov, Bond additive modeling 1. Adriatic indices, Croat. Chem. Acta83 (2010) 243–260.