دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال نهم، شماره چهل و سوم، مرداد و شهریور ۱۴۰۲
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

گراف‌های مکعبی نیم متقارن از مرتبهٔ p^5 ۲، p عدد اول فرد

پوریا مجد آملی[۱]، محمدرضا درفشه[۲]*

[۱] گروه ریاضی، دانشکده علوم و فناوری‌های همگرا، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
[۲] گروه ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه تهران، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۱۱/۱۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۶/۲۷

چکیده

یک گراف ساده همبند، نیم متقارن نامیده می شود، اگر منظم و یال انتقالی داشته باشد ولی رأس انتقالی نباشد. در این مقاله ثابت می‌کنیم که در حالت خاص گراف همبند مکعبی نیم متقارن از مرتبهٔ $2p^5$، برای عدد اول p که $p>3$ و $p \neq 7$، وجود ندارد.

واژه‌های کلیدی: گراف نیم‌متقارن، گراف رأس انتقالی، گراف یال انتقالی، رده‌بندی گراف‌های مکعبی نیم متقارن.

* عهده دار مکاتبات:
Email: darafsheh@ut.ac.ir

۱- مقدمه و تعاریف اصلی

در این مقاله، همهٔ گراف‌ها متناهی، همبند و ساده هستند. یک گراف نیم متقارن نامیده می‌شود اگر منظم و یال انتقالی باشد ولی رأس انتقالی نباشد. ردهٔ گراف‌های نیم متقارن اولین بار توسط فولکمن مورد مطالعه قرار گرفت [۱]. او ثابت نمود که گراف نیم متقارن از مرتبه های $2p$ یا $2p^{۲}$ برای هر عدد اول p وجود ندارد. نشان داده شده است که گراف همبند مکعبی نیم متقارن از مرتبهٔ $۲p^{۳}$ برای هرعدداول p که $p > ۳$ وجود ندارد و برای $p = ۳$، گراف گری ([۲] را ببینید) تنها گراف همبند مکعبی نیم متقارن از مرتبهٔ $۲p^{۳}$ می‌باشد [۳]. همچنین ثابت شده است که گراف همبند مکعبی نیم متقارن از مرتبهٔ $۶p^{۳}$ وجود دارد اگر و تنها اگر $p - ۱$ بر ۳ بخش پذیر باشد [۴]. رده بندی گراف‌های همبند مکعبی نیم متقارن از مرتبه $۲۰p$، برای هر عدد اول p انجام شده است. [۵].

نشان داده شده است که برای هر عدد اول p که $p \neq ۱۷$، گراف همبند مکعبی نیم متقارن از مرتبهٔ $۳۴p^{۳}$ موجود نیست [۶].

در این مقاله، گراف مـرتبهٔ $۲p^{۵}$را در نظر می‌گیریم. ثـابـت می‌کنیم گراف همبند مکعبی نیم متقارن از مرتبهٔ $۲p^{۵}$، $p > ۳$ عدد اول و $p \neq ۷$، در حالت خاص، وجود ندارد.

۲- مفاهیم و قضیه های مورد نیاز

در این مقاله، تعداد اعضای یک مجموعه متناهی مانند A با$|A|$ نشان داده می‌شود. سایر نماد گذاری ها درباره گروه‌ها، همان نماد گذاری‌های استاندارد هستند. برای عدد اول p که مرتبهٔ گروه متناهی G را می‌شمارد، $O_p(G)$ برابر بزرگترین $p -$ زیرگروه نرمال G است.

فرض کنید G یک گروه و Ω یک مجموعهٔ ناتهی باشد. گوییمG روی Ω عمل می‌کند هر گاه تابع

$(g,\omega)\rightarrow \omega^{g} \quad : G\times\Omega\rightarrow\Omega$

مـوجود باشد طوری که $\omega = \omega^{1}$ و $(\omega^{g})^{h} = \omega^{g.h}$ برای هـر $h \in G$ و g و هر $\omega \in \Omega$. برای هر $\omega \in \Omega$، ثابت ساز ω در G به صورت

$G_{\omega} = \{g \in G: \omega^{g} = \omega\}$

تعریف می‌شود. عمل، نیم منظم نامیده می‌شود، هر گاه ثابت ساز هر عضو Ω بدیهی باشد، عمل مذکور منظم نامیده می‌شود هرگاه نیم منظم و انتقالی باشد یعنی $G_{\omega} = \{۱\}$ برای هر $\omega \in \Omega$ و به ازای هر ω_1 و $\omega_۲$ متعلق به Ω، وجود داشته باشد g متعلق به G طوری که$\omega_۱{}^{g} = \omega_۲$. فرض کنید Ω یک مجموعه و G یک گروه و G روی Ω عمل کند در این صورت زیر مجموعه Δ از Ω یک بلوک نامیده می شود هر گاه به ازای هر $g \in G$ داشته باشیم $\Delta^{g} = \Delta$ و یا $\Delta^{g} \cap \Delta = \emptyset$. در اینجا

$\Delta^{g} = \{\delta^{g} | \delta \in \Delta\}.$

فرض کنید گروه G روی مجموعهٔ Ω به طور انتقالی عمل کند. گوییم G یـک گروه جـایگشـتی اولـیه اسـت اگـر و تنها اگر بلوک‌هایش بلوک‌های بدیهی Ω یا زیر مجموعه‌های تک عضوی باشند. در غیر این صورت گوییم که عمل G روی Ω غیر اولیه است و G را گروه جایگشتی غیر اولیه می‌نامیم. در این حالت بلوک غیر بدیهی Δ که برای گروه غیر اولیه G وجود دارد بلوک غیر اولیه نامیده می‌شود.

فرض کنیدΓ یک گراف باشد. بـرای دو رأس u و v می‌نویسیم $u \sim v$ هر گاه این دو رأس مجاور باشند. اگر $u \sim v$، آنگاه هر کدام از زوج های مرتب (u,v) و (v,u) کمان نامیده می‌شوند. مجموعهٔ همهٔ رأس های مجاور با u را با $\Gamma(u)$ نمایش می‌دهیم. درجه هر رأس مانند u نیز برابر $|\Gamma(u)|$ تعریف می‌شود. گراف Γ منظم نامیده می شود اگر همه رأس هایش هم درجه باشند. مجموعهٔ رئوس، مجموعهٔ

یال ها، مجموعهٔ کمان ها و مجموعهٔ خود ریختی‌های Γ را به ترتیب $V(\Gamma)$، $E(\Gamma)$، $Arc(\Gamma)$ و $Aut(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم. اگر Γ یک گراف و $N \trianglelefteq Aut(\Gamma)$، آنگاه Γ_N نمایشگر یک گراف ساده، بدون جهت است که مجموعهٔ رئوس آن مدارهای عمل N روی $V(\Gamma)$ هستند و دو رأس N_u و N_v مجاور هستند اگر و فقط اگر u و v در گراف Γ مجاور باشند. فرض کنید Γ_c و Γ گراف باشند. گوییم Γ_c یک گراف پوششی برای Γ است اگر تابع پوشا مانند $f:V(\Gamma_c) \to V(\Gamma)$ موجود باشد که حافظ مجاورت بوده و تحدید تابع $f\big|_{\Gamma_{c(u)}}: \Gamma_c(u) \to \Gamma(f(u))$ یک تناظر یک به یک باشد برای هر u متعلق به $V(\Gamma_c)$. تابع f یک تصویر پوششی نامیده می شود. به وضوح اگر Γ دوبخشی باشد، آنگاه Γ_c نیز دو بخشی است. برای هر $u \in V(\Gamma)$، فایبر روی u به صورت $fib_u = f^{-1}(u)$ تعریف می‌شود. مجموعهٔ زیر یک زیر گروه از $Aut(\Gamma_c)$ است و گروه تبدیلات پوششی برای f نامیده می‌شود:

$$CT(f) = \{\sigma \in Aut(\Gamma_c) | \sigma(fib_u) = fib_u\}.$$

برای هر u متعلق به $V(\Gamma)$ نشان داده شده است که $K=CT(f)$ روی هر فایبر به صورت نیم منظم عمل می‌کند[۷]. اگر این عمل منظم باشد، آنگاه Γ_c یک $K-$ پوشش منظم Γ نامیده می‌شود.
فرض کنید $X \leq Aut(\Gamma)$. در این صورت Γ یک گراف X- رأس انتقالی نامیده می شود هر گاه X به صورت انتقالی روی $V(\Gamma)$ عمل کند مشابهاً Γ یک گراف X- یال انتقالی نامیده می شود هر گاه X به صورت انتقالی روی $E(\Gamma)$ عمل کند. گراف Γ ، X- نیم متقارن نامیده می‌شود هر گاه X- یال انتقالی باشد ولی X- رأس انتقالی نباشد. برای $X=Aut(\Gamma)$، به منظور سهولت گوییم Γ رأس انتقالی، یال انتقالی یا نیم متقارن می‌باشد و X حذف می‌شود. اگر یک گراف همبند، X- یال انتقالی باشد ولی X- رأس انتقالی نباشد آنگاه، دو بخشی است. جایی که، دو بخش مدارهای عمل X روی $V(\Gamma)$ هستند [۸]. اگر Γ منظم باشد، آنگاه دو بخش دارای یک عدد اصلی می باشند. بنابراین یک گراف X- نیم منظم، یک گراف دو بخشی است طوری که عمل X روی هر بخش انتقالی است ولی X هیچ رأسی را از یک بخش به بخش دیگر منتقل نمی‌کند. یک رده بندی از همهٔ گراف‌های همبند مکعبی نیم متقارن تا مرتبهٔ ۷۶۸ به دست آمده است [۹]. هر زیر گروه نرمال می‌نیمال از یک گروه متناهی برابر حاصل ضرب مستقیم داخلی از نسخه های یکریخت یک گروه ساده می باشد. گروه متناهی G یک K_n- گروه نامیده می شود اگر مرتبهٔ آن دقیقاً n شمارندهٔ مجزای اول داشته باشد، جایی که $n \in \mathbb{N}$. نتیجهٔ زیر تمامی K_3-گروه‌های ساده را مشخص می‌کند.

قضیه ۲-۱: اگر G یکK_3- گروه ساده باشد، آنگاهG با یکی از گروه‌های زیر یکریخت است:[۱۰].
$\mathbb{A}_5$و$\mathbb{A}_6$و$L_2(7)$,
$L_2(2^3), L_2(17), L_3(3), U_3(3), U_4(2)$

قضیه ۲-۲: اگر Γ یک گراف همبند مکعبی X- نیم متقارن باشد، آنگاه برای هر رأس مانند u، تعداد اعضای ثابت ساز X_u به شکل $2^r.3$ است برای $0 \leq r \leq 7$ [۱۱].

گزاره ۲-۳: فرض کنید Γ یک گراف همبند مکعبی X- نیم متقارن باشد برای بعضی $X \leq Aut(\Gamma)$ و $N \trianglelefteq X$. اگر $|X/N|$ بر ۳ بخش پذیر نباشد، آنگاه Γ یک گراف N- نیم متقارن نیز می باشد [۱۲].

قضیه ۲-۴: فرض کنیدΓ یک گراف همبند مکعبی X- نیم متقارن باشد. فرض کنید $\{U,W\}$ افرازی برای Γ و $N \trianglelefteq X$ باشد. اگر عمل N روی U و W غیر انتقالی باشد، آنگاه N روی U و W به

صورت نیم منظم عمل می‌کند و Γ_N گرافی X/N- نیم متقارن است، همچنین Γ یک N- پوشش منظم از Γ_N می‌باشد. [۱۳].

برای هر زیر گروه نرمال $N \trianglelefteq X$، یا N روی حداقل یکی از بخش‌های افراز انتقالی عمل می‌کند یا روی هر دو بخش غیر انتقالی است. در حالت اول، مرتبهٔ N بر $|U| = |W|$ بخش‌پذیر است و در حالت دوم مرتبهٔ N، $|U| = |W|$ را می‌شمارد. بنابراین فرع زیر را بر قضیه ۲-۴ داریم.

گزاره ۲-۵: اگر Γ گراف همبند مکعبی X- نیم متقارن با بخش‌های $\{U,W\}$و $N \trianglelefteq X$ باشد، آنگاه $|N|$ بر $|U|$ بخش‌پذیر یا $|U|$ بر $|N|$ بخش پذیر است.

فرض کنید G یک گروه متناهی، $H \leq G$ و $A = \{x_۱H, \dots, x_nH\}$ مجموعهٔ همدسته‌های چپ و متمایز H در G باشد. در این صورت به

$L = \{x_۱, \dots, x_n\}$

یک مجموعهٔ مورب چپ H در G می‌گوییم.

قضیه ۲-۶: فرض کنید گروه G روی مجموعهٔ Ω به‌صورت غیر اولیه عمل کند و Δ یک بلوک غیر اولیه باشد. قرار دهید:

$H = \{g \in G | \Delta^g = \Delta\}$

فرض کنید L یک مجموعهٔ مورب چپ H در G است. در این صورت:

الف)$\{x\Delta\}$، برای xهای متعلق به L افرازی برای Ω است.

ب) اگر $|\Omega| < \infty$، آنگاه $|\Delta| \big| |\Omega|$.

ج) H روی Δ انتقالی عمل می‌کند [۱۴].

فرض کنید گروه G روی مجموعهٔ Ω عمل کند. گوییم افراز $\sum = \{\Delta_۱ \text{ و} \dots \Delta_R\}$ یک افراز G- پایا برای Ω است، اگر به ازای هر $g \in G$

$\sum = \{\Delta_۱{}^g, \dots \Delta_R{}^g\}$

لم ۲-۷: اگر گروه G روی مجموعهٔ Ω عمل کند، آنگاه B^g برای هر g متعلق به G نیز یک بلوک است [۱۴].

فرض کنید گروه G روی مجموعهٔ Ω به صورت انتقالی عمل کند و Δ یک بلوک باشد. بنا به قضیهٔ ۲-۶ می‌دانیم که زیر مجموعهٔ $L \subseteq G$ وجود دارد، به قسمی که $\{\Delta^x\}$، $x\in L$، افرازی از Ω است. دراین صورت $\{\Delta^x\}$، $x\in L$، را یک دستگاه اولیه برای عمل G روی Ω می‌نامیم.

قضیه ۲-۸: فرض کنید گروه G روی مجموعهٔ Ω به صورت انتقالی عمل می‌کند. فرض کنید Δ یک مدار عمل N روی Ω باشد، در این صورت Δ یک بلوک است. [۱۴].

قضیه ۲-۹: فرض کنید گروه G روی مجموعهٔ Ω به صورت انتقالی عمل می‌کند. فرض کنید $\sum = \{\Delta_۱ \text{ و} \dots \Delta_R\}$ یک افراز G- پایا برای Ω باشد. در این صورت Σ یک دستگاه اولیه برای عمل G روی Ω است [۱۴].

قضیه ۲-۱۰: فرض کنید Γ گراف همبند و X- نیم متقارن با دو بخش $\{U,W\}$ باشد جایی که $X \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$. فرض کنید $\{B_۱, \dots, B_R\}$ یک دستگاه اولیه برای عمل G روی U باشد. آنگاه، یک عدد ثابت m_U وجود دارد که برای هر رأس $w \in W$، رأس مذکور در هر بلوک B_i، برای هر $۱ \leq i \leq k$، دقیقاً صفر یا m_U همسایه دارد.

اثبات: فرض کنید $y \in W$ و x و $\Gamma(x) \cap B_i \neq \emptyset$ و $\Gamma(y) \cap B_j \neq \emptyset$. کافی است نشان دهیم:

$$|\Gamma(x) \cap B_i| = |\Gamma(y) \cap B_j|$$

و از این جا، این عدد مشترک ثابت همان m_U خواهد بود، زیرا x، y، B_i و B_j دلخواه انتخاب شده‌اند. فرض کنید

$u \in \Gamma(x) \cap B_i$ و $v \in \Gamma(y) \cap B_j$

پس $\{v,y\} \in E(\Gamma)$ و $\{u,x\}$ حال چون X روی یال های Γ انتقالی عمل می‌کند، وجود دارد $g\in X$ طوری که

$$g\{u,x\} = \{v,y\}$$

یعنی

$$\{g(u), g(x)\} = \{v,y\}$$

با توجه به مطالب قبل، تنها حالت ممکن، حالت

$$\begin{cases} g(u) = v \\ g(x) = y \end{cases}$$

می باشد.

اکنون نشان می‌دهیم:

$$g(\Gamma(x) \cap B_i) = \Gamma(y) \cap B_j$$
$$g(\Gamma(x) \cap B_i) = g\Gamma(x) \cap gB_i$$

ادعا می‌کنیم:

$$g\Gamma(x) = \Gamma(y), gB_i = B_j$$

فر[illegible]

$E(\Gamma)$. با توجه به اینکه g یکریختی است $\{g(z), g(x)\} \in E(\Gamma)$، می‌دانیم $g(x) = y$، پس $\{g(z), y\} \in E(\Gamma)$، یعنی $g(z) \in \Gamma(y)$. در نتیجه $g\Gamma(x) \subseteq \Gamma(y)$، به همین ترتیب $\Gamma(y) \subseteq g\Gamma(x)$، در نهایت $g\Gamma(x) = \Gamma(y)$. با توجه به اینکه gB_i و B_j قطعات افراز هستند، نتیجه می شود $gB_i = B_j$. حال با استفاده از

$$g(\Gamma(x) \cap B_i) = \Gamma(y) \cap B_j$$

داریم $|\Gamma(x) \cap B_i| = |(y) \cap B_j|$ و قضیه به اثبات می‌رسد. □

نتیجهٔ ۲-۱۱: با مفروضات قضیهٔ ۲-۱۰، اگر گراف Γ منظم با درجهٔ d باشد، آنگاه $m_U|d$.

قضیه ۲-۱۲: فرض کنید Γ گراف همبند و X-نیم متقارن با بخش‌های $\{U,W\}$ باشد، جایی که $X \leq Aut(\Gamma)$. فرض کنید $N \trianglelefteq G$ و $F = \{B_۱, \dots B_k\}$ مدارهای عمل N روی U هستند. آنگاه، با فرض اول بودن درجهٔ گراف و $k > ۱$، باید داشته باشیم $m_U = ۱$.

اثبات: بنا به نتیجه ۲-۱۱، و با فرض این که درجه‌ی گراف برابر p باشد، داریم

$$m_U|p$$

چون p عدد اول است، پس $m_U = p$ یا $m_U = ۱$. فرض کنید $m_U = p$. فرض کنید $x \epsilon W$ طوری باشد که $|\Gamma(x)| = p$ و برای $۱ \leq i \leq k$، $B_i \epsilon F$ به گونه‌ای باشد که $\Gamma(x) \subseteq B_i$. فرض کنید برای $۱ \leq j \leq k$، $B_j \epsilon F$، $B_i \neq B_j$ و $y \epsilon B_j$ باشد. فرض کنید A مجموعه همهٔ همسایه‌های رأس‌های B_i باشد. به وضوح $A \subseteq W$ و $x \epsilon A$. در این صورت مسیری از y به x موجود نیست که با فرض همبند بودن گراف در تناقض است. □

قضیه ۲-۱۳: فرض کنید Γ گراف همبند و X- نیم متقارن با بخش‌های $\{U,W\}$، $N \trianglelefteq G$، $F = \{B_۱, \dots B_k\}$ مدارهای عمل N روی U هستند و N روی W انتقالی عمل می‌کند، آنگاه

$$dB_i = |W|m_U$$

اثبات: فرض کنید برای $۱ \leq i \leq k$، $B_i \epsilon F$ و A مجموعهٔ همهٔ همسایه‌های رأس‌های واقع در B_i

$$|B_i|d = |A|m_U$$

باشد. تعداد یال‌های خارج‌شده از B_i برابر است با $d|B_i|$. از طرفی این تعداد برابر است با $|A|m_U$. در نتیجه

ادعا می‌کنیم:

$$A=W$$

فرض کنید $u\epsilon B_i$، $y\epsilon A$ و $x\epsilon w$ که در آن $y\sim u$. چون N روی W انتقالی عمل می‌کند، پس وجود دارد n ای متعلق به N به قسمی که

$$x = n.v$$

از $y\sim u$ نتیجه می‌شود $n.y\sim n.u$، یعنی $x\sim n.u$. از این جا نتیجه می‌گیریم $x\epsilon A$ و حکم قضیه به اثبات می‌رسد. □

قضیه ۲-۱۴: اگر Γ گراف همبند و X- نیم متقارن از درجهٔ اول d با بخش های $\{U,W\}$باشد و $N \trianglelefteq X$ و روی یکی از بخش‌های U یا W غیر انتقالی عمل کند و n بر d بخش‌پذیر نباشد، $n = |U|$، آنگاه N روی بخش دیگر نیز غـیر انتـقالی عـمل می‌کند.

اثبات: فرض کنید عمل N روی U غیرانتقالی باشد. با توجه به اول بودن d می‌بایست $m_U = ۱$ [۱۲-۲]. حال اگر عمل N روی W انتقالی باشد، باید داشته باشیم:

$$d|B_i| = nm_U = n$$

که در آن $\{B_۱, \dots B_k\}$ مدارهای عمل N روی U هستند و $B_i\epsilon\{B_۱, \dots B_k\}$. در نتیجه

$$d|n$$

که تناقص است و حکم قضیه به اثبات می‌رسد. □

۳- قضیهٔ اصلی

فرض کنید p عدد اول و $p \neq ۷,۳$، باشد. فرض کنید Γ گراف همبند، دو بخشی، مکعبی و یال انتقالی از مرتبهٔ $۲p^{۵}$ باشد به قسمی که هر p-زیرگروه نرمال از $Aut(\Gamma)$، مانند N روی هر دو بخش Γ به صورت همزمان انتقالی عمل نمی‌کند. در این صورت Γ رأس انتقالی است. به عبارت دیگر گراف نیم متقارن همبند مکعبی با شرایط فوق وجود ندارد.

اثبات: فرض کنید Γ گراف نیم متقارن همبند مکعبی از مرتبهٔ $۲p^{۵}$ که p عدد اول و $p \neq ۳,۷$ باشد. فرض کنید $\{U,W\}$دو بخش گراف مذکور باشد. بنابراین $|U| = |W| = p^{۵}$. قـرار می‌دهیم:

$$A:=Aut(\Gamma)$$

از آن جایی که A روی U و W انتقالی عمل می‌کند داریم:

$$|A: A_\omega| = |U|$$

برای هر $\omega \in U$، از این جا

$$|A| = |A_\omega||U| = |A_\omega|. p^{۵}$$

$$|A| = ۲^{r}.۳. p^{۵}$$

که در آن $۰ \leq r \leq ۷$.

اگر A گروهی ساده باشد، آنگاه با استفاده از قضیه ۲-۱ خواهیم داشت:

$$A \cong A_۵ \text{ یا } A \cong L_۲(۷)$$

از این جا

$$p = ۷ \text{ یا } ۳$$

حالت $p = ۷$ که موضوع بحث نیست و در حالت $p = ۳$، وجود گراف‌های همبند نیم متقارن مکعبی از مرتبهٔ $۲۰(۳)^{۵}$ بررسی شده است [۹]. پس A

گروهی غیر ساده می‌باشد. حالت‌های زیر را برای $|O_p(A)|$ را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱: $|O_p(A)| = 1$. فرض کنید N زیر گروه نرمال می نیمال نرمال A باشد، در این صورت $N \cong T^k$ که T گـروه ساده و $k \in \mathbb{N}$. فرض کنید N غیرآبلی باشد.
با توجه به ساختار A، در مرتبۀ N فقط یک عامل ۳ وجود دارد، بنابراین $|N| = 2^i.3.p^j$ که درآن $0 \le i \le 7$ و $1 \le j \le 5$. مشابهاً، با توجه به ساده بودن N و قضیه ۲-۱ داریم:

$$p = 5 \text{یا} 7$$

بنابراین N آبلی، در نتیجه T ساده و آبلی می باشد. لذا داریم:

$|N| = p^t$ یا $|N| = 3$ یا $|N| = 2^i$ که $t \in N$ و i

با استفاده از فرع ۲-۵ می‌توان نوشت:

$|N|\,\big|\,|U|$ یا $|U|\,\big|\,|N|$

در نتیجه

$$N \cong Z_p^t$$

و در آن $t \in \mathbb{N}$. نتیجه مذکور مستقل از $|O_p(A)|$ است. با توجه به اینکه $|O_p(A)| = 1$ فرض شده است، حالت $N \cong Z_p^i$ امکان‌پذیر نیست. پس $|O_p(A)| \neq 1$.

حالت ۲: $|O_p(A)| = p$. قرار می‌دهیم $Q := O_p(A)$. می‌دانیم Q روی هـر دو بـخش U و W، غیرانتقالی عمل می‌کند. بنا به قضیه ۲-۴، Q روی U و W به صورت نیم منظم عمل می‌کند و گراف Γ_Q یک گراف A/Q - نیم متقارن است. داریم:

$$|\Gamma_Q| = \frac{\Gamma}{Q} = 2p^4$$

و

$$|A/Q| = 2^r.3.p^4$$

که $0 \le r \le 7$.
فرض کنید N/Q زیرگروه می‌نیمال نرمال A/Q باشد. مشابه مباحث قبل، $|N/Q|$ به صورت‌های زیر خواهد بود:
$|N/Q| = 2^m$ یا $|N/Q| = 3$ یا $|N/Q| = p^n$
که $n \in \mathbb{N}$ و m. از گزاره ۲-۵ نتیجه می‌شود:

$$|N/Q| = p^n$$

در نتیجه

$$|N| = p^{n+1}$$

چون $|Q| = p$ در نتیجه، n=0؛ از این جا داریم $|N/Q| = 1$ که تناقض است.

حالت ۳: $|Q| = p^2$. در این حـالت Q روی هـر دو بخش U و W غیر انتقالی عمل می‌کند و بنا به قضیه ۲-۴، عمل مذکور روی U و W به صورت نیم منظم است و گراف Γ_Q یک گراف A/Q- نیم متقارن است. داریم:

$$|\Gamma_Q| = \frac{|\Gamma|}{|Q|} = \frac{2p^5}{p^2} = 2p^3$$
$$|A/Q| = 2^r.3.p^3$$

فرض کنید N/Q زیر گروه می نیمال نرمال از A/Q باشد. مشابهاً $j \in N$ و $|N/Q| = P^j$
از این جا

$$|N| = p^{j+2}$$

چون $|Q| = p^2$، پس j=0 در نتیجه $|N/Q| = 1$ که تناقض است.

حالت ۴: $|Q| = p^3$از آن جایی که Q روی هر دو بخش U و W غیر انتقالی عمل می‌کند، در نتیجه عمل Q روی این دو بخش نیم منظم است، همچنین گرافΓ_Q، گرافی A/Q- نیم متقارن می‌باشد. داریم:

$$|\Gamma/Q| = \frac{|\Gamma|}{|Q|} = p^2$$
$$|A/Q| = 2^r.3.p^2$$

فرض کنید N/Q زیر گروه نرمال می‌نیمال از A/Q باشد. نتیجه می‌شود:

$|N/Q| = p^j$ و $j \in N$

پس

$|N| = p^{j+3}$

با توجه به اینکه $|Q| = p^3$، داریم $|N| = p^3$ در نتیجه $|N/Q| = 1$ و تناقض حاصل می‌شود.

حالت ۵: $|Q| = p^4$. مشابه آنچه مطرح شد، Q روی هر دو بخش U و W غیرانتقالی عمل می‌کند، پس عمل مذکور روی این دو بخش نیم منظم می‌باشد، همین طور گراف Γ_Q یک گراف A/Q- نیم‌متقارن می‌باشد که در آن با در نظر گرفتن N/Q به عنوان زیرگروه می‌نیمال نرمال A/Q داریم $j \in N$ و $|N/Q| = p^j$ از این جا داریم:

$|N| = p^{j+4}$

و در نهایت با توجه به $|Q| = p^4$ نتیجه می‌شود $|N| = p^4$، پس $|N/Q| = 1$ که تناقض است.

حالت ۶: $|Q| = p^5$. دو حالت (الف) و (ب) برای حالت ۶ قابل تمیز و تشخیص است.

حالت (الف): Q روی هر دو بخش U و W غیر انتقالی عمل می‌کند که در این صورت Q روی U **و** W به صورت نیم منظم عمل کرده و گراف Γ_Q گرافی A/Q- نیم متقارن است. همچنین Γ پوششی منظم از Γ_Q می باشد، در نتیجه درجه های Γ و Γ_Q برابر است. ولی $|\Gamma_Q| = \frac{2p^5}{p^5} = 2$ یعنی ممکن نیست که درجه Γ_Q برابر ۳ باشد.

حالت (ب): Q روی یکی از بخش ها مانند U انتقالی و روی بخش دیگر مانند W غیرانتقالی عمل می‌کند. با توجه به اینکه $Q \trianglelefteq A$ و روی W غیرانتقالی عمل می‌کند و p^5 بر۳ بخش‌پذیر نیست (در صورتی که p^5 بر ۳ بخش‌پذیر باشد، وجود گراف‌های همبند مکعبی نیم‌متقارن از مرتبهٔ $2(3^5)$ مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۵].)، بنا به قضیه ۲-۱۴ نتیجه می‌شود که N روی U نیز غیرانتقالی عمل می‌کند که تناقض است. در نتیجه قضیه اصلی به اثبات می‌رسد.□

۳- نتیجه‌گیری

در این مقاله گراف‌های نیم متقارن به عنوان خانواده‌ای از گراف‌ها معرفی گردید و با استفاده از قضایا ثابت شد که در حالت خاص گراف همبند مکعبی نیم متقارن از مرتبهٔ $2p^5$ وجود ندارد جایی که $p > 3$ یک عدد اول مخالف ۷ است.

فهرست منابع

[1] J. Folkman, Regular line-symmetric graphs, J. Combinatorial Theory 3 (1967), 215-232.

[2] I. Z. Bouwer, An edge but not vertex transitive cubic graph, Canad. Math. Bull 11(1968), 533-535.

[3] A. Malnič, D. Marušič, and C. Wang, Cubic edge – transitive graphs of order $2p^3$, Discrete Math. 274(2004), no. 1-3,187-198.

[4] Y.- Q. Feng, M. Ghasemi, and C. Wang, Cubic semisymmetric graphs of order $6p^3$, Discrete Math. 310 (2010), no. 17-18, 2345-2355.

[5] M. Shahsavaran and M. R. Darafsheh, Classifying semisymmetric cubic graphs of order 20_p, Turkish J.Math.43(2019), no.6, 2755-2766.

[6] M. R. Darafsheh and M. Shahsavaran, semisymmetric cubic graphs of order $34p^3$, Bull. Korean Math. Soc. 57 (2020), no. 3, 739-750.

[7]. J.H. Kwak and R. Nedela, Graphs and their coverings, Lecture Notes Series, 17,2007., 28-30.

[8] N. Biggs, Algebraic graph theory, Cambridge University Press 1993.

[9] M. Conder, A. Malnič, D. Marušič, and P. Potočnik, A cencus of semisymmetric cubic graphs on up to 768 rertices, J. Algebraic Comb.23 (2006), no 3, 255-294.

[10] M. Herzog, On finite simple groups of order divisible by three primes only, J.Algebra 10 (1968), 383-388.

[11] D. M. Goldschmidt, Automorphisms of trivalent graphs, Ann. of Math. (2) 111 (1980), no. 2, 377- 406.

[12] C. Q. Wang and T. S. Chen, Semisymmetric cubic graphs as regular covers of $k_{3,3}$, Acta Math. Sin (Engl. Ser.) 24 (2008), no. 3, 405-416.

[13] Z. Lu, C. Wang, and M. Xu, on semisymmetric cubic graphs of order $6p^2$, Sci. China Ser. A 47(2004), no. 1, 1-17.

[14] J. D. Dixon, B. Mortimer, Permutation Groups, Springer, 1996.

[15] M. Conder, Summary of all semisymmetric cubic graphs on up to 10000 vertices, https://www.math. Auckland. ac.nz/~conder/Semisymm cubic 10000. txt.