

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال هفتم، شماره سی و یکم، مرداد و شهریور ۱۴۰۰

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

بررسی جبرهای باناخ تصویری تقریبی

محمدحسین ستاری*

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۸/۲۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۶/۳۱

چکیده

مفهوم جبرهای باناخ تصویری تقریبی توسط پورمحمد آقابابا [15]، آریستوف [۲]، و ژانگ [19] معرفی شده که هر یک از جنبه متفاوتی تقریب را مدنظر قرار داده‌اند. در این مقاله تعریف ارائه شده توسط پورمحمد آقابابا را مبنا قرار می‌دهیم که ضمن اینکه عمومی تر بوده و شرایط محدود کننده به مراتب کمتری دارد، دارای مثال‌های متنوع و جالب از رده‌های گوناگون جبرهای باناخ نیز می‌باشد. چندین ویژگی موروثی از این مفهوم را مورد بررسی قرار می‌دهیم، در حقیقت نشان می‌دهیم که تصویری تقریبی بودن دوگان دوم جبر باناخ A تحت ضرب آرنز، تصویری تقریبی بودن خود A را ایجاب می‌کند. در ادامه تصویری تقریبی بودن را روی جبرهای باناخ ادغامی که یک تعمیم مبتکرانه از جمع مستقیم جبرهای باناخ است و شامل یک‌دار شده، ضرب لائو، ضرب نیم مستقیم و توسیع مدولی جبرهای باناخ می‌شود، مطالعه می‌کنیم. ثابت می‌کنیم جمع‌وند اول در یک جبر باناخ ادغامی تصویری تقریبی، تصویری تقریبی است در صورتیکه برای دست یافتن به نتیجه مشابه روی جمع‌وند دوم مفروضات بیشتری نیاز خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: ضرب آرنز، دوگان دوم جبر باناخ، جبرهای باناخ ادغامی، عملگر قطری.

۱- مقدمه و مطالب مورد نیاز

ابتدا به بیان مقدماتی از مفهوم جبرهای باناخ تصویری تقریبی پرداخته سپس آن را روی دوگان دوم مطالعه می‌کنیم.

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد عملگر قطری A بصورت $\Delta_A: A \hat{\otimes} A \rightarrow A, \Delta(a \otimes b) = ab$ تعریف می‌شود. هرگاه جبر مورد بحث معین باشد می‌توان اندیس را حذف و از Δ بجای Δ_A استفاده کرد. هرگاه Δ دارای وارون راست پیوسته باشد که A -مدول همومرفیسم نیز است آنگاه A تصویری خواهد بود. در مرجع [۱۵] حالت تقریبی این مفهوم بصورت ذیل تعریف شده است که از برخی مزیت‌ها نسبت به تعاریف مشابه که در مراجع [۲] و [۱۹] آمده، برخوردار است.

تعریف ۱-۱: A را تصویری تقریبی نامیم هرگاه تور (ρ_α) از عملگرهای خطی کراندار از A بتوی $A \hat{\otimes} A$ چنان موجود باشد که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) برای هر $a \in A$,

$$\Delta \circ \rho_\alpha(a) \rightarrow a.$$

(ب) برای هر $a, b \in A$

$$a \cdot \rho_\alpha(b) - \rho_\alpha(ab) \rightarrow 0.$$

(ج) برای هر $a, b \in A$

$$\rho_\alpha(a)b - \rho_\alpha(ab) \rightarrow 0.$$

اگر تور (ρ_α) کراندار باشد A بطور کراندار تصویری تقریبی نامیده می‌شود. ملاحظه می‌شود که اگر ρ_α ها برابر باشند آنگاه A تصویری خواهد بود. می‌دانیم که دوگان دوم یک جبر باناخ با ضرب آرنز اول و دوم یک جبر باناخ است که خود A را به عنوان زیر جبر بسته شامل است. در ادامه منظور از جبر باناخ A^{**} ، همان دوگان دوم جبر باناخ A با ضرب آرنز اول است. لازم به ذکر است که این ضرب برای اولین بار توسط آرنز در [۱] معرفی شده است.

نخست به یادآوری ضرب آرنز می‌پردازیم. فرض کنید $a, x \in A, f \in A^*$ و $\Phi, \Psi \in A^{**}$ در اینصورت ضرب آرنز (اول) Φ و Ψ به طریق زیر تعریف می‌شود:

$$f \cdot a(x) = f(ax),$$

$$\Psi(f)(a) = \Psi(f \cdot a),$$

$$\Phi \square \Psi(f) = \Phi(\Psi f).$$

با یک بررسی مستقیم مشخص می‌شود که برای هر Ψ از A^{**} نگاشت $\Phi \rightarrow \Phi \square \Psi, A^{**} \rightarrow A^{**}$; $w^* - w^*$ پیوسته است. در حالی که نگاشت $\Phi \rightarrow \Psi \square \Phi, A^{**} \rightarrow A^{**}$ لزوماً $w^* - w^*$ پیوسته نیست مگر اینکه $\Psi \in A \subset A^{**}$. برای اطلاعات تکمیلی در خصوص خواص این ضرب می‌توان از [۶] بهره برد.

همواره بررسی ارتباط خواص جبرهای A و A^{**} از موضوعات جالب در زمینه جبرهای باناخ بوده است. به عنوان مثال A میانگین پذیر است هرگاه A^{**} میانگین پذیر باشد [۱۰]. در حالی که برای میانگین پذیری ضعیف موضوع کمی متفاوت است و وجود مفروضات اضافی ضروری است، در [۸] ثابت شده که اگر A ایده آل چپ A^{**} باشد آنگاه میانگین پذیری ضعیف A از میانگین پذیری ضعیف A^{**} بدست می‌آید. در خصوص تصویری بودن شرایط بیشتری مورد نیاز است، هرگاه A ایده آل A^{**} با واحد تقریبی کراندار باشد آنگاه تصویری بودن A^{**} ، تصویری بودن A را ایجاب می‌کند [۱۲].

۲- بررسی تصویری تقریبی بودن دوگان دوم

خواص موروثی مفاهیم تصویری و یکدستی جبرهای باناخ از دوگان دوم به خود جبر در [۱۲] بررسی شده که البته با برخی محدودیت‌ها نیز همراه بوده است. در حقیقت در حالتی که A دارای واحد

همانند لم ۲-۳. در [۱۵] با بکار بردن اصل بازتابی موضعی (به عنوان مثال قضیه ۳.۳.C از [۲]) برای هر α ، تور (θ_α^λ) از عملگرهای رتبه متناهی کراندار از A بتوی $A \hat{\otimes} A$ چنان موجود است بطوریکه با توپولوژی w^* عملگری روی $B(A, (A \hat{\otimes} A)^*)$ داریم: $\theta_\alpha^\lambda \rightarrow \theta_\alpha$ ، بدین معنی که برای هر $a \in A$ ، $\theta_\alpha^\lambda(a) \xrightarrow{w^*} \theta_\alpha(a)$ که در آن منظور از w^* همان توپولوژی w^* روی $(A \hat{\otimes} A)^*$ است.

برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\alpha \in \mathbb{R}$ ، $F \subset A$ و $G \subset (A \hat{\otimes} A)^*$ که F و G متناهی‌اند می‌توان $\lambda_\alpha = \lambda_{\alpha, n, F, G}$ را چنان یافت که برای هر $\phi \in G$ ، $\lambda \geq \lambda_\alpha$

$$\langle \theta_\alpha^\lambda(a) - \theta_\alpha(a), \phi \rangle < \frac{1}{n} \quad (a \in F, \phi \in G).$$

در ادامه برهان نشان می‌دهیم که تور $(\theta_\alpha^\lambda) \subset B(A, (A \hat{\otimes} A)^*)$ در شرایط معین شده در تعریف ۱.۱، برای تصویری تقریبی بودن A صدق می‌کند. نخست ادعا می‌کنیم که برای $a, b \in A$ داریم:

$$\theta_\alpha^\lambda(ab) - a.\theta_\alpha^\lambda(b) \xrightarrow{w} 0,$$

که در آن w به توپولوژی ضعیف روی $(A \hat{\otimes} A)$ دلالت می‌کند. عدد مثبت ε را در نظر بگیرید. اگر $\frac{3}{n_0} < \varepsilon$ ، چنان $n_0 \in \mathbb{N}$ و $\phi \in (A \hat{\otimes} A)^*$ چنان n_0 باشد که

آنگاه می‌توان α_0 ای یافت که برای هر $\alpha \geq \alpha_0$ ،

$$\langle \theta_\alpha^\lambda(ab) - a.\theta_\alpha^\lambda(b), \phi \rangle < \frac{1}{n_0}.$$

برای هر $n \geq n_0$ ، $\alpha \geq \alpha_0$ ، $F \subset A$ و $G \subset (A \hat{\otimes} A)^*$ که F و G متناهی‌اند و $\{a, b, ab\} \subset F$ ، $\{\phi, \phi a\} \subset G$ خواهیم داشت:

تقریبی چپ کراندار و ایده‌الی در A^{**} است ثابت شده تصویری بودن A^{**} تصویری بودن A را ایجاب می‌کند.

هر چند A -مدول‌های باناخ $A^{**} \hat{\otimes} A^{**}$ و $(A \hat{\otimes} A)^{**}$ ایزومرف نیستند ولی بکار بردن ارتباط بین آنها که در [۸] به آن اشاره شده، راه گشا خواهد بود.

لم ۲-۱: هرگاه A یک جبر باناخ باشد آنگاه عملگر خطی پیوسته $\Psi: A^{**} \hat{\otimes} A^{**} \rightarrow (A \hat{\otimes} A)^{**}$ چنان موجود است که برای هر $a, b, x \in A$ و هر $m \in A^{**} \hat{\otimes} A^{**}$ روابط زیر برقرارند.

(ا) $\Psi(a \otimes b) = a \otimes b$

(ب) $\Psi(m).x = \Psi(m.x)$

(ت) $x.\Psi(m) = \Psi(x.m)$

(ث) $(\Delta_A)^{**} \Psi(m) = \Delta_{A^{**}}(m)$

قضیه ۲-۲: هرگاه دوگان دوم جبر باناخ A ، تصویری تقریبی باشد آنگاه A نیز چنین است.

برهان: فرض کنید تور (ρ_α) همان توری باشد که از تصویری تقریبی بودن A^{**} بدست می‌آید. همچنین نگاشت شمول و $t: A \rightarrow A^{**}$ ، نگاشت معین شده $\Psi: A^{**} \hat{\otimes} A^{**} \rightarrow (A \hat{\otimes} A)^{**}$ در لم ۲.۱ باشد. با در نظر گرفتن دنباله زیر

$$A \xrightarrow{t} A^{**} \xrightarrow{\rho_\alpha} A^{**} \hat{\otimes} A^{**} \xrightarrow{\Psi} (A \hat{\otimes} A)^{**} \xrightarrow{(\Delta_A)^{**}} A^{**}$$

قرار می‌دهیم $\theta_\alpha = \Psi \circ \rho_\alpha \circ t: A \rightarrow (A \hat{\otimes} A)^{**}$ خواصی از Ψ که در لم ۲.۱ آمده ایجاب می‌کند

که برای هر $a, b \in A$

$$a.\theta_\alpha(b) - \theta_\alpha(ab) \rightarrow 0$$

$$\theta_\alpha(a).b - \theta_\alpha(ab) \rightarrow 0$$

$$\Delta^{**} \circ \theta_\alpha(a) \rightarrow a$$

نامتناهی بودن G ، طبق قضیه ۳،۳ از [۷] به یک تناقض منجر می‌شود.
جبر باناخ ارائه شده در مثال بالا آرنز منظم نبود. حال این سوال مطرح می‌شود که آیا با افزودن برخی شرایط اضافی مانند آرنز منظمی و یا ایده‌آل بودن A در A^{**} می‌توان به عکس قضیه ۲-۲ دست یافت. مثال بعدی نشان می‌دهد که حتی وجود چنین شرایطی نیز عکس قضیه ۲-۲ را محقق نخواهد کرد.

مثال ۲-۴: فضای هیلبرت $H = l^2$ را در نظر بگیرید. مطابق معمول هرگاه $K(H)$ فضای عملگرهای فشرده روی H باشد، طبق نتیجه ارائه شده در [۱۳، ۷، ۱] از [۱۴]، $K(H)$ آرنز منظم و ایده‌آل بسته در $B(H) \cong K(H)^{**}$ است. از قضیه ۳، ۱، ۹، در [۱۸]، میانگین‌پذیری و بنابر نتیجه ۳، ۷ از [۱۵]، بطور کراندار تصویری تقریبی بودن $K(H)$ حاصل می‌شود. این در حالی است که قضیه ۱، ۱ (به همراه توضیحات آمده بعد از تعریف ۱-۲) در [۱۳] و نتیجه ۳، ۷ از [۱۵] نشان می‌دهد که $K(H)^{**} \cong B(H)$ تصویری تقریبی نیست.

۳- جبرهای باناخ ادغامی

هرگاه A و B جبرهای باناخ و I ایده‌آل بسته از B باشد و $\theta: A \rightarrow B$ همومرفسیم پیوسته‌ای باشد که $\|\theta\| \leq 1$ آنگاه با تعریف ضرب بصورت زیر روی جمع l^1 -مستقیم A و I می‌توان به جبر باناخ $A \triangleright \triangleleft^{\theta} I$ رسید؛

$$(a, b). (a', b') = (aa', \theta(a)b' + b\theta(a') + bb')$$

که در آن $a, a' \in A$ ، $b, b' \in I$ اختیار شده‌اند. $A \triangleright \triangleleft^{\theta} I$ ادغام A با B در راستاری I نامیده می‌شود. این مفهوم که ابتدا در زمینه مباحث صرفاً جبری مطرح شده بود به عنوان مثال [۵]، در مرجع

$$\begin{aligned} & |\langle \theta_{\alpha}^{\lambda_{\alpha}}(ab) - a\theta_{\alpha}^{\lambda_{\alpha}}(b), \phi \rangle| \\ & \leq |\langle \theta_{\alpha}^{\lambda_{\alpha}}(ab) - \theta_{\alpha}(ab), \phi \rangle| \\ & + |\langle \theta_{\alpha}(ab) - a\theta_{\alpha}(b), \phi \rangle| \\ & + |\langle a\theta_{\alpha}(b) - a\theta_{\alpha}^{\lambda_{\alpha}}(b), \phi \rangle| \\ & \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n} \\ & \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} \\ & < \varepsilon \end{aligned}$$

لازم بذکر است که

$$\langle a\theta_{\alpha}(b) - a\theta_{\alpha}^{\lambda_{\alpha}}(b), \phi \rangle = \langle \theta_{\alpha}(ab) - \theta_{\alpha}^{\lambda_{\alpha}}(b), \phi a \rangle.$$

بنابراین نتیجه می‌شود همانطوریکه ادعا کرده بودیم:
 $w - \lim_{\alpha} \theta_{\alpha}^{\lambda_{\alpha}}(ab) - a\theta_{\alpha}^{\lambda_{\alpha}}(b) = 0 \quad (a, b \in A)$

با یک بحث استاندارد، که به‌عنوان مثال می‌توان آنرا در لم ۲-۳ از [۱۵]، یافت نتیجه می‌شود حد ظاهر شده در بالا به همگرایی در نرم تبدیل می‌گردد. بطور مشابه نیز ثابت می‌شود برای هر $a, b \in A$

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha}^{\lambda_{\alpha}}(ab) - a\theta_{\alpha}^{\lambda_{\alpha}}(b) & \longrightarrow 0 \\ \Delta \circ \theta_{\alpha}^{\lambda_{\alpha}}(a) & \longrightarrow a \end{aligned}$$

مطابق تعریف A تصویری تقریبی است.

مثال ۲-۳: همانند دیگر مفاهیم کوهومولوژیک مانند میانگین‌پذیری، میانگین‌پذیری تقریبی، تصویری بودن و یا یکدستی، نمی‌توان انتظار داشت که عکس قضیه ۲، ۲ برقرار باشد. در حقیقت اگر $A = l^1(G)$ اختیار کنیم که در آن G یک گروه گسسته میانگین‌پذیر نامتناهی است آنگاه A میانگین‌پذیر و طبق نتیجه ۳، ۷ از [۱۵]، تصویری تقریبی است در حالی که A^{**} تصویری تقریبی نیست زیرا در غیر اینصورت با توجه به اینکه A^{**} نیز یکدار است بار دیگر از نتیجه ۳، ۷ از [۱۵]، A^{**} میانگین‌پذیر تقریبی خواهد بود که با عنایت به

قضیه ۳-۱: هرگاه $A \triangleright \triangleleft^{\theta} I$ تصویری تقریبی باشد آنگاه A نیز چنین است.

برهان: فرض کنید $P_A: A \triangleright \triangleleft^{\theta} I \rightarrow A$ ، $P_A(a, b) = a$ ، نگاشت تصویر $\iota_A: A \rightarrow A \triangleright \triangleleft^{\theta} I$ و $\iota_A(a) = (a, 0)$ توری باشد که از تصویری تقریبی بودن (ρ_{α}) بدست می‌آید. با توجه به دیاگرام

$$\begin{array}{ccc} A \triangleright \triangleleft^{\theta} I & \xrightarrow{\rho_{\alpha}} & (A \triangleright \triangleleft^{\theta} I) \hat{\otimes} (A \triangleright \triangleleft^{\theta} I) \\ \uparrow & & \downarrow \\ A & & A \hat{\otimes} A \end{array}$$

برای هر α قرار می‌دهیم:

$$\theta_{\alpha} = (P_A \otimes P_A) \circ \rho_{\alpha} \circ \iota_A: A \rightarrow A \hat{\otimes} A.$$

در ادامه برای هر $a, b \in A$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha}(ab) - a.\theta_{\alpha}(b) &= (P_A \otimes P_A)(\rho_{\alpha}((a, 0), (b, 0))) \\ &\quad - a.(P_A \otimes P_A)(\rho_{\alpha}(b, 0)) \\ &= (P_A \otimes P_A)(\rho_{\alpha}((a, 0), (b, 0))) \\ &\quad - (P_A \otimes P_A)((a, 0)\rho_{\alpha}(b, 0)) \\ &= (P_A \otimes P_A)(\rho_{\alpha}((a, 0), (b, 0))) \\ &\quad - (a, 0)\rho_{\alpha}(b, 0) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

لازم به ذکر است که طبق فرض

$$\rho_{\alpha}((a, 0), (b, 0)) - (a, 0)\rho_{\alpha}(b, 0) \rightarrow 0$$

یعنی $\theta_{\alpha}(ab) - a.\theta_{\alpha}(b) \rightarrow 0$ رابطه $\theta_{\alpha}(ab) - a.\theta_{\alpha}(b) \rightarrow 0$ نیز بطور مشابه ثابت می‌شود. با محاسبه ساده و مستقیم نتیجه می‌شود که

$$\Delta_A(P_A \otimes P_A) = P_A \circ \Delta_{A \triangleright \triangleleft^{\theta} I}$$

حال با بکار گیری رابطه اخیر خواهیم داشت:

[۱۷] برای جبرهای باناخ تعریف و مورد مطالعه قرار گرفت. برتری ضربی که در روش ادغامی تعریف می‌شود این است که ضرب‌هایی که قبلاً روی جمع مستقیم جبرهای باناخ تعریف می‌شد را پوشش داده و همه را در یک قالب قرار می‌دهد، از آن جمله می‌توان به حاصلضرب نیم مستقیم و ضرب لائو اشاره کرد. به‌عنوان مثال با اختیار $\theta = 0$ جبر باناخ $A \oplus_{\theta} I$ به عنوان جمع مستقیم عادی با جمع و ضرب مؤلفه‌ای بدست می‌آید و با اختیار $\theta: \mathbb{C} \rightarrow A^{\#}$ ، $\theta(\alpha) = (\alpha, 0)$ یکدار شده A یعنی $A^{\#}$ به‌عنوان جبر باناخ ادغامی بدست می‌آید. همچنین هرگاه ϕ تابع خطی ضربی ناصفر روی A باشد، با اختیار θ بصورت حاصلضرب $\theta: A \rightarrow B^{\#}$ ، $\theta(a) = (\phi(a), 0)$ ϕ -لائوی A و B یعنی $A \oplus_{\phi} B$ به‌عنوان جبر باناخ ادغامی ظاهر خواهد شد.

در [۱۷] خواص مهمی از $A \triangleright \triangleleft^{\theta} I$ برحسب A و I بررسی شده است که در برخی موارد نتیجه کلی حاصل شده مانند وجود واحد تقریبی، محاسبه مرکز توپولوژیکی و بررسی آرنز منظمی و یا میانگین پذیری، در حالی که برای میانگین‌پذیری ضعیف نتیجه کامل حاصل نشده است. به عنوان نمونه بر ای میانگین‌پذیری، $A \triangleright \triangleleft^{\theta} I$ میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر A و I میانگین‌پذیر باشند.

هر چند در حالت بسیار خاص ادغام، برای جمع l^1 -مستقیم دو جبر باناخ با یک استدلال مستقیم به آسانی نتیجه می‌شود که $A \oplus_{\theta} I$ تصویری است اگر و تنها اگر A و I تصویری باشند و همانطوری که در [۱۶] نیز آمده است این موضوع برای مفهوم تصویری تقریبی نیز صادق است ولی در حالت کلی نتیجه‌ای برای ادغام برقرار نیست. البته در بررسی موضوع مشخص خواهد شد که A و I جایگاه یکسانی نداشته و نتایج برای این دو متفاوت خواهد بود.

همانطوری که در [۱۹] اشاره شده، تصویری بودن B توسط هلمسکی بدست آمده است.

هرچند در مثال قبل ملاحظه شد که با وجود تصویری تقریبی بودن $A \triangleright \triangleleft^{\theta} I$ ممکن است I چنین نباشد ولی با بررسی برهان قضیه ۱،۳ به این نکته پی می‌بریم که عامل اصلی در تغییر نتیجه برای جایگزینی A با I ، این است که برخلاف نگاشت P_A ، نگاشت متناظر آن یعنی تصویر روی I ، $P_I: A \triangleright \triangleleft^{\theta} I \rightarrow I$ ، $P_I(a, x) = x$ ، همومرفیسم جبری نیست. برای برطرف کردن این مشکل باید به دنبال همومرفیسم جبری دیگری از $A \triangleright \triangleleft^{\theta} I$ بروی I باشیم که تحت ایزومرفیسم $I \cong \{0\} \triangleright \triangleleft^{\theta} I$ ، روی I ، همانی باشد. با توجه به مثال ۳،۴ همواره چنین همومرفیسمی موجود نیست اما با افزودن برخی مفروضات می‌توان نتیجه مثبتی حاصل نمود.

قضیه ۳-۵: هرگاه I یکدار و $A \triangleright \triangleleft^{\theta} I$ تصویری تقریبی باشد آنگاه I نیز چنین است.

برهان: فرض کنید نگاشت $P_{\theta}: A \triangleright \triangleleft^{\theta} I \rightarrow I$ بصورت $P_{\theta}(a, x) = \theta(a)e + x$ تعریف شود که در آن $e \in I$ عضو واحد است. به وضوح P_{θ} به همومرفیسم جبری است که روی I همانی است. حال با استفاده از نمادهای قضیه ۱،۳ و در نظر گرفتن نمودار

$$\begin{array}{ccc} A \triangleright \triangleleft^{\theta} I & \xrightarrow{P_{\theta}} & (A \triangleright \triangleleft^{\theta} I) \hat{\otimes} (A \triangleright \triangleleft^{\theta} I) \\ \uparrow & & \downarrow P_{\theta} \otimes P_{\theta} \\ A & & A \hat{\otimes} A \end{array}$$

و تعریف تور (θ_a) متشکل از جملات زیر $\theta_a = (P_{\theta} \otimes P_{\theta}) \circ \rho_a \circ \iota_A: I \rightarrow I \hat{\otimes} I$

نتیجه مطلوب همانند برهان قضیه ۱،۳ حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \Delta_A \circ \theta_a(a) &= \Delta_A((P_A \otimes P_A)(\rho_a(a, 0))) \\ &= P_A(\underbrace{\Delta_{A \triangleright \triangleleft^{\theta} I}(\rho_a(a, 0))}_{\rightarrow(a, 0)}) \\ &= a \end{aligned}$$

بنابراین طبق تعریف A تصویری تقریبی است. با توجه به اینکه ρ_a های برابر در قضیه قبل به θ_a های یکسانی ختم می‌شود نتیجه زیر بدست می‌آید.

نتیجه ۳-۲: هرگاه $A \triangleright \triangleleft^{\theta} I$ تصویری باشد آنگاه A نیز چنین است.

با بررسی ماهیت θ_a در قضیه قبل مشخص می‌شود که هر کران برای ρ_a ها یک کران برای θ_a نیز است بنابراین:

نتیجه ۳-۳: هرگاه $A \triangleright \triangleleft^{\theta} I$ بطور کراندار تصویری تقریبی باشد آنگاه A نیز چنین است. در ادامه مشاهده خواهد شد که موضوع برای I کاملاً متفاوت است و در حقیقت حکم قضیه قبل برای I برقرار نیست.

مثال ۳-۴: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{C} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{C} \end{bmatrix} \\ I = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{C} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و $\theta: A \rightarrow B$ نگاشت شمول باشد. در کمال تعجب ولی به سادگی نتیجه می‌شود که نگاشت

$$A \triangleright \triangleleft^{\theta} I \rightarrow B \\ \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

جبرهای باناخ B و $A \triangleright \triangleleft^{\theta} I$ را ایزومرف می‌کند. با توجه به اینکه $I^2 = 0$ ، I نمی‌تواند تصویری و یا حتی تصویری تقریبی باشد در حالیکه

نتیجه ۳-۶: فرض کنید I یکدار باشد. اگر $A \triangleright \triangleleft^{\theta} I$ بطور کراندار تصویری تقریبی باشد آنگاه I نیز چنین است. نوبت به بررسی عکس قضیه ۱,۳ در حالت تصویری تقریبی بودن I می‌رسد. هرچند که برای حالت خاص جمع مستقیم $A \oplus_1 I$ از ضرب ادغامی جواب مثبت است ولی مثال زیر نشان می‌دهد که در حالت کلی نمی‌توان از تصویری تقریبی بودن I و A به خاصیت مشابه برای $A \triangleright \triangleleft^{\theta} I$ رسید.

مثال ۳-۷: جبر باناخ $I = l^1$ را با ضرب نقطه وار در نظر بگیرید. همانطوری که در فصل چهارم [۴] آمده میانگین‌پذیر تقریبی نیست، پس طبق نتیجه ۸,۳ از [۱۵]، $I^{\#}$ تصویری تقریبی نیست. این در حالی است که خود I نه تنها تصویری تقریبی بلکه تصویری نیز است. بدین ترتیب با جمع‌بندی به این نتیجه می‌رسیم که با وجود تصویری تقریبی بودن I و \mathbb{C} ، جبر باناخ حاصل از ادغام آنها $I^{\#} = \mathbb{C} \triangleright \triangleleft^{\theta} I$ تصویری تقریبی نیست.

قدردانی: نویسنده این مقاله از داوران محترم برای مطالعه دقیق و ارائه پیشنهادات سازنده سپاسگزاری می‌کند.

فهرست منابع

- [11] R. J. Loy and G. A. Willis, The approximation property and nilpotent ideals in amenable Banach algebras, *Bull. Austral. Math. Soc.* 49 (1994), 341-346.
- [12] M. S. Moslehian and A. Niknam, Biflatness and biprojectivity of second dual of Banach algebras, *Southeast Asian Bull. Math.* 27(1) (2003), 129-133.
- [13] N. Ozawa, A note on non-amenability of $B(l^p)$ for $p=1,2$., *Internat. J. Math.* 15 (2004), 557–565.
- [14] T. W. Palmer, *Banach Algebras and the General Theory of *-Algebras*, I. Cambridge University Press, 1994.
- [15] H. Pourmahmood-Aghababa, Approximatively biprojective Banach algebras and nilpotent ideals, *Bull. Aust. Math. Soc.* 87 (2013), 158-173.
- [16] H. Pourmahmood-Aghababa and M. H. Sattari, Approximate biprojectivity and biflatness of some algebras over certain semigroups, *J. Iran. Math. Soc.* 1(2) (2020), 145-155.
- [17] H. Pourmahmood-Aghababa, and N. Shirmohammadi, On amalgamated Banach algebras, *Period. Math. Hung.* 75(1) (2017), 1-13.
- [18] V. Runde, *Lectures on Amenability*, in: *Lect. Notes in Mathematics*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2002.
- [19] Y. Zhang, Nilpotent ideals in a class of Banach algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* 127(11) (1999), 3237-3242.
- [1] R. Arens, The adjoint of a bilinear operation, *Proc. American Math. Soc.* 2 (1951), 839-848.
- [2] O. Yu. Aristov, On approximation of flat Banach modules by free modules, *Sbornik. Math.* 196(11) (2005), 1553-1583.
- [3] G. Dales, *Banach Algebra and Automatic Continuity*, Oxford University Press. (2001).
- [4] H. G. Dales, R. J. Loy and Y. Zhang, Approximate amenability for Banach sequence algebras, *Studia Math.* 177 (2006), 81–96.
- [5] M. D’Anna and M. Fontana, An amalgamated duplication of a ring along an ideal: the basic properties, *J. Algebra Appl.* 6(3) (2007), 443-459.
- [6] T. Duncan and S. A. R. Hosseini, The second dual of a Banach algebra, *Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sect. A*, 84 (1979), 309-325.
- [7] F. Ghahramani, R. Loy, Generalized notions of amenability, *J. Funct. Anal.* 208 (2004) 229–260.
- [8] F. Ghahramani, R. Loy and G. Willis, Amenability and weak amenability of second conjugate Banach algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* 124 (5), 1489-1497.
- [9] F. Ghahramani and Y. Zhang, Pseudo-amenable and pseudo-contractible Banach algebras, *Math Proc Cambridge Philos* 142 (2007), 111-123.
- [10] F. Gourdeau, *Amenability of Banach algebras*, Ph.D. thesis, University of Cambridge, 1989.