دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و هفتم، مرداد و شهریور ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

استنباط‌های کلاسیک و بیزی در توزیع پواسن-نمایی بر پایه‌ی داده‌های سانسور شده‌ی هیبرید فزاینده نوع دو

معصومه محمدی منفرد[1]، محمدحسن بهزادی[*1]، رضا عربی بلاغی[2]

[(1)] گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات، تهران، ایران
[(2)] گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۴/۲۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۹/۲۲

چکیده

در این مقاله به مسئله براوردیابی پارامترهای نامعلوم وقتی داده‌های طول عمر دارای توزیع پواسن-نمایی تحت طرح سانسور هیبرید فزاینده نوع دو هستند، در حالت کلاسیک و بیز می‌پردازیم. براوردگرهای نقطه‌ای و فاصله‌ای را تحت تقریب‌های کلاسیک و بیزی محاسبه می‌کنیم. برای محاسبه‌ی براوردهای نقطه‌ای، برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی را با استفاده از دو الگوریتم امید ریاضی گرفتن-ماکزیمم کردن و امیدریاضی گرفتن-ماکزیمم کردن تصادفی تحت تقریب کلاسیک بدست می‌آوریم. این الگوریتم‌ها به راحتی اجرا می‌شوند. همچنین برآوردهای بیزی را با بکار بردن روش تقریب لیندلی و تکنیک نمونه‌گیری ازنقاط مهم تحت پیشین‌های آگاهی بخش و ناآگاهی بخش با استفاده از تابع زیان‌های مربع خطا، آنتروپی و لاینکس محاسبه می‌کنیم. برآوردگرهای بازه‌ای کلاسیک و بیزی مرتبط، با در نظر گرفتن ماتریس اطلاع فیشر و روش چن-شائو محاسبه می‌شود. مجموعه‌ی داده‌های واقعی را آنالیز می‌کنیم و مطالعات شبیه‌سازی مونت کارلو برای مقایسه‌ی روش‌های پیشنهادی مختلف، انجام می‌شود. سرانجام نتیجه‌گیری و پیشنهادات را ارائه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: براورد بیز، الگوریتم EM، الگوریتم SEM، تقریب لیندلی، شبیه‌سازی مونت کارلو.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: Behzadi.stat@gmail.com

۱- مقدمه

در زمینه‌ی آزمون های طول عمر و آنالیز قابلیت اعتماد، طول عمرهای شکست واحدها در یک آزمایش طول عمر برای توزیع‌های آماری مختلف مطالعه می‌شود. توزیع ها در حقیقت طبق رفتار شکست واحدهای آن مانند نرخ شکست افزایشی، کاهشی یا ثابت و یا به صورت ترکیبی از اینها در مدل‌های طول عمر استفاده می‌شوند. بررسی یک توزیع طول عمر نقش خیلی مهمی در بحث آمار دارد و کارهای زیادی بر روی مسائل براوردیابی در مقالات موجود برای توزیع‌های آماری مختلف مانند وایبل، نمایی تعمیم یافته، بوور و خانواده‌های مرتبط وقتی داده‌های مشاهده شده کامل یا سانسور شده باشند، انجام شده است. برای مطالعات بیشتر مقالات فرنوش و همکاران، بانرجی و کوندو، کوندو و پرادهان، کووندو و هولادر و سینگ و همکاران را ببینید (۱)، (۲)، (۳)، (۴)، (۵). به هرحال نه فقط رفتار نرخ شکست، بلکه ساختار و دلایل شکست برای واحدهای موجود در آزمایش در مطالعات مورد توجه هستند. برای مثال یک واحد ممکن است به دلیل خطرات مختلف ناشناخته به جای یک ریسک معین، شکست بخورد و بنابراین دلیل واقعی شکست ناشناخته بماند. برای مشاهده‌ی چنین مسائلی در زمینه‌ی آزمون طول عمر و قابلیت اعتماد به باسو مراجعه کنید (۶). در ادامه‌ی مطالعه‌ی این چنین داده‌های طول عمر کانچو و همکاران توزیع پواسن- نمایی را پیشنهاد دادند، که به صورت خلاصه به شکل زیر معرفی می‌گردد (۷):

فرض کنید برای واحدهای تحت بررسی M تعداد، از ریسک‌های مکمل تصادفی وجود دارند که دارای توزیع پواسون بریده شده با تابع چگالی احتمال

$$P(M=m)=\frac{e^{-\theta}\theta^{m}}{m(1-e^{-\theta})}, m=1,2,\dots,\theta>0$$

هستند. همچنین فرض کنید که T_j زمان اتفاق یک پیشامد مورد علاقه به دلیل j امین ریسک مکمل باشد، برای $j=1,2,\dots$ و متغیر تصادفی داده شده‌ی $M=m$ متغیرهای تصادفی T_j که $j=1,2,\dots,m$ مستقل و هم توزیع با توزیع نمایی با پارامتر λ هستند. مقدار ماکزیمم T_j یعنی $X=\max\ (T_1,T_2,\dots,T_M)$ دارای توزیع پواسون-نمایی است که با نماد $\mathrm{PE}(\theta,\lambda)$ نشان داده می‌شود و دارای تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی به فرم زیر است:

$$f(x;\ \theta,\lambda)=\frac{\theta\lambda e^{-\lambda x-\theta e^{-\lambda x}}}{1-e^{-\theta}}\ ;\quad x>0,\theta>0,\lambda>0 \qquad (1)$$

$$F(x;\ \theta,\lambda)==\ 1\quad \frac{1-e^{-\theta e-\lambda x}}{1-e^{-\theta}} \qquad (2)$$

که θ پارامتر شکل و $\frac{\theta}{1-e^{-\theta}}$ میانگین تعداد ریسک های مکمل است، همچنین λ پارامتر مقیاس است. این توزیع وقتی پارامتر θ به صفر میل می کند به توزیع نمایی با پارامتر λ همگرا می شود. برای بررسی مشخصات بیشتر این توزیع به مقاله کانچو مراجعه کنید(۷). سانسور نوع اول و سانسور نوع دوم از متداول‌ترین طرح های سانسور می‌باشند، این دو طرح سانسور به واحدهای موجود در آزمایش اجازه خروج از آزمایش را غیر از زمان خاتمه آزمایش نمی‌دهند. ترکیبی از سانسورهای نوع اول و نوع دوم به عنوان سانسور هیبرید شناخته می‌شوند که اولین بار توسط اپستین معرفی شد و در بحث قابلیت اعتماد و آنالیز بقا طرفداران زیادی دارد (۸). مطالعات زیادی در زمینه طرح سانسور هیبرید و حالت‌های مختلف آن انجام شده است، (۹)، (۱۰)، (۱۱)، (۱۲). برای مثال فیربانک و همکارانش سانسور هیبرید نوع یک را معرفی کرد و وقتی داده‌های طول عمر از توزیع نمایی پیروی می‌کردند را بررسی کرد (۱۳). از معایب اصلی طرح سانسور هیبرید نوع یک این است که نتایج استنباط در حالتی قابل استناد است که حداقل یک شکست در آزمایش مشاهده شود، در حالی که ممکن است تا زمان مشخص t شکست‌های خیلی کمی اتفاق

بیفتد، که این منجر به کارایی پایین براوردگرهای پارامترهای مدل می شود. به همین دلیل، چایلد و همکارانش یک سانسور هیبرید جایگزین معرفی کردند که آزمایش در زمان تصادفی $T = \max(X_{m:m:n}, T)$ خاتمه پیدا می‌کند. این طرح سانسور هیبرید، سانسور هیبرید نوع دو نامیده می‌شود و مزیتش این است که ضمانت می‌کند که حداقل m شکست در پایان آزمایش مشاهده شود.

کوندو و جواردر سانسور هیبرید فزاینده نوع دو را بحث کردند (۱۴). که به صورت خلاصه به شکل زیر توصیف می‌شود:

فرض کنید n واحد مستقل و هم توزیع از تابع چگالی احتمال $f(x;\theta)$ و تابع توزیع تجمعی $F(x;\theta)$ در آزمایش قرار داده می‌شوند. تحت این نوع سانسور، آزمایش وقتی خاتمه پیدا می‌کند که زمان از پیش تعیین شده‌ی T به دست آید و تعداد از پیش تعیین شده از واحدها مثلا m تا شکست بخورند. بنابراین براساس این سانسور در زمان اولین شکست که با $X_{1:n}$ نشان می‌دهیم تعداد R_1 تا از واحدهای زنده از $(n \quad 1)$ واحد باقیمانده،کنار گذاشته می‌شوند. به همین ترتیب تعداد R_2 تا از واحدهای زنده ی $n \quad R_1 \quad 2$ می‌توانند در زمان شکست دوم یعنی $X_{2:n}$ کنار گذاشته شوند و به همین صورت در زمان m امین شکستیعنی $X_{m:n}$ همه‌ی $R_m = (n \quad m \quad \sum_{i=1}^{m-1} R_i)$ واحد باقیمانده از آزمایش خارج می‌شوند. فرض کنید D تعداد شکست‌هایی است که قبل از زمان T اتفاق می‌افتد. مشاهده می‌کنیم که اگر در $X_{m:n} > T$، بنابراین آزمایش در زمان m-امین شکست با تعداد واحد کنار گذاشته‌ی $R_m = (n \quad m \quad \sum_{i=1}^{m-1} R_i)$ خاتمه پیدا می‌کند و اگر $X_{m:n} < T$، آزمایش در زمان T با تعداد واحد کنار گذاشته‌ی $R_m = (n \quad d \quad \sum_{i=1}^{d} R_i)$ خاتمه پیدا می‌کند.

دو حالت به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

مورد ۱: $\{X_{1:n} < X_{2:n} < \quad < X_{m:n}\}$

مورد ۲:

$$\{X_{1:n} < X_{2:n} < \quad < X_{m:n} < X_{m+1:n} < \quad < X_{d:n}\}$$

در بررسی منابع مشاهده کردیم که همه‌ی مطالعاتی که در توزیع پواسن-نمایی انجام شده بود، در حالت داده‌های کامل بود و حالت داده‌های سانسور شده که باعث محدودیت‌هایی می‌شود، مورد مطالعه قرار نگرفته است. برای همین ما این مقاله را با هدف اصلی مسئله براوردیابی پارامترهای نامعلوم توزیع پواسن-نمایی در حالتی که برخی داده‌ها سانسور شده‌اند، با استفاده از تقریب‌های کلاسیک و بیز پرداختیم. نتایج کار می‌تواند برای داده‌های کامل و نمونه‌های مشاهده شده تحت سانسورهای نوع یک و سانسور نوع دو تعمیم داده شود. ادامه این مقاله به شکل زیر سازماندهی شده است. در بخش ۲ براورد ماکزیمم درستنمایی بحث می‌شود. بخش ۳ شامل براورد بیزی است. در بخش ۴ آنالیز داده‌ها و مطالعات شبیه‌سازی ارائه شده است. سرانجام نتیجه گیری و پیشنهادات در بخش ۵ ارائه شده است.

۲. براورد ماکزیمم درستنمایی

در این بخش درباره‌ی براوردگرهای ماکزیمم درستنمایی برای پارامترهای توزیع پواسن-نمایی در طرح سانسور هیبرید فزاینده نوع دو بحث خواهیم کرد. فرض کنید نمونه تصادفی از n واحد که طول عمر واحدها از توزیع پواسن-نمایی تبعیت می کند، در آزمایش طول عمر وارد می‌شوند. آزمون در نقطه زمان $T = \max(X_{m:m:n}, T)$ خاتمه پیدا می‌کند. فرض کنیم $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_R)$ نمونه‌ای از داده‌های مشاهده شده از توزیع پواسن-نمایی تحت سانسور هیبرید فزاینده نوع دو باشد. سپس تابع درستنمایی از پارامترهای θ و λ بر پایه نمونه مشاهده شده‌ی $\boldsymbol{x}$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\mathrm{L}(\theta, \lambda \mid \mathbf{x}) = k \prod_{i=1}^{R} f(x_i, \theta, \lambda)(1 \quad F(x_i, \theta, \lambda))^{R_i}$$

$(1 \quad F(\mathrm{T},\theta,\lambda))^{R_T}$

که

$$k = n(n \quad R_1 \quad 1)\ldots(n \quad \sum_{i=1}^{m-1} R_i \quad R+1),$$

در حالت اول، $R = m$ و $R_T = 0$ می‌باشد و برای حالت دوم $R = D$ و D $R_T = n \quad \sum_{c=1}^{m-1} R_c$ می‌باشد. $f(.,\theta,\lambda)$ و $F(.,\theta,\lambda)$ از رابطه‌های (۱) و (۲) جایگذاری می‌شوند. در فرایند محاسبه براوردگر ماکزیمم درستنمایی (MLE)، مسئله مهم بررسی وجود و منحصر به فرد بودن آنها است. در مطالعه ای از کانچو (۷)، اثبات فرمولی برای وجود و منحصر به فرد بودن MLEها برای پارامترهای توزیع پواسن-نمایی در حالت داده‌های کامل ارائه شده است که همان ایده می‌تواند اینجا استفاده شود. برای به دست آوردن براوردهای MLE برای پارامترهای θ و λ، باید از تابع لگاریتم-درستنمایی بر روی θ و λ مشتق‌گیری جزئی انجام دهیم و با مساوی صفر قرار دادن آن‌ها، معادلات را حل کنیم. در ادامه مشاهده می‌کنیم که جواب معادلات به فرم بسته به دست نمی‌آیند و بنابراین به تکنیک‌های عددی برای محاسبه MLE ها نیاز داریم.
ایده‌ی الگوریتم امیدریاضی گرفتن-ماکزیمم کردن (EM) به وسیله‌ی دمپستر و همکاران (۱۵) برای محاسبه‌ی MLEها، استفاده شد. مقالات موجود پیشنهاد می کنند که الگوریتم EM کاراتر از روش نیوتن-رافسون عمل می‌کند، به خصوص زمانی که داده‌ها کامل نیستند و با تعدادی سانسور مشاهده می‌شوند (۱۶). در بخش بعد الگوریتم EM را توضیح می‌دهیم.

۱. ۲. الگوریتم امیدریاضی گرفتن- ماکزیمم کردن

الگوریتم EM به عنوان یک فرایند جایگزین برای محاسبه‌ی MLEها در حضور داده‌های سانسور شده است که شامل گام E میانگین‌گیری و گام M ماکزیمم سازی توسط دمپستر (۱۵) معرفی شد. تحت سانسور فزاینده هیبرید نوع دو، فرض کنید x_i زمان i-امین شکست و R_i تعداد واحدهایی که از آزمایش خارج می‌شوند را نشان دهد. حال فرض کنید که $z_i = (z_{i1}, z_{i2}, \ldots, z_{iR_i}), i = 1, \ldots, m$ و $z_T = (z_{T1}, z_{T2}, \ldots, z_{TR_T})$ طول عمر واحدهای سانسور شده در زمان T و x_i را نشان دهند، سپس داده‌های سانسور شده کل به صورت $z = (z_1, z_2, \ldots, z_m, z_D, z_T)$ مشاهده می‌شود. حال نمونه‌ی کامل از n تعداد از واحدها می‌تواند به صورت ترکیبی از داده‌های مشاهده شده و داده‌های سانسور شده به صورت $w = (x, z)$ مشاهده شود. بنابراین با مشتق‌گیری جزئی از تابع لگاریتم-درستنمایی داده‌های کامل نسبت به θ و λ و برابر صفر قرار دادن آن‌ها، معادلات زیر را به دست می-آوریم:

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} \quad \frac{n}{e^{\theta}-1} \quad \sum_{i=1}^{R} e^{-\lambda x_i}$$
$$\sum_{i=1}^{R}\sum_{j=1}^{R_i} e^{-\lambda z_{ij}} \quad \sum_{p=1}^{R_T} e^{-\lambda z_p} = 0$$
$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} \quad \sum_{i=1}^{R} x_i \quad \sum_{p=1}^{R_T} z_p$$
$$\sum_{i=1}^{R}\sum_{j=1}^{R_i} z_{ij} \quad \theta\Big[\sum_{i=1}^{R} x_i e^{-\lambda x_i}$$
$$\sum_{i=1}^{R}\sum_{j=1}^{R_i} e^{-\lambda z_{ij}} \quad \sum_{p=1}^{R_T} z_p e^{-\lambda z_p}\Big] = 0$$

الگوریتم EM دو گام دارد، گام E و گام M. در گام E مشاهدات سانسور شده با مقادیر میانگین داده‌های کامل به شرط داده‌های سانسور شده، جایگزین می‌شود و گام M شامل مقادیر براورد شده از پارامترهاست که گام E را ماکزیمم می‌کند. حال فرض کنید که (θ^k, λ^k) براوردهایی از مقادیر (θ, λ) در k-امین مرحله باشد، سپس $(\mathrm{k}+1)-$ امین براورد از λ به روزرسانی می‌شود و با حل معادله زیر به دست می‌آید:

$$\frac{n}{\theta^{(k)}} \quad \frac{n}{e^{\theta^{(k)}}-1} \quad \sum_{i=1}^{R} e^{-\lambda^{(k+1)} x_i}$$
$$\sum_{i=1}^{R} R_i E_1(x_i, \theta^{(k)}, \lambda^{(k)})$$
$$R_T E_1(T, \theta^{(k)}, \lambda^{(k)}) = 0$$

$$\theta^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{R} x_i - \sum_{i=1}^{R} R_i E_2(x_i,\theta^{(k)},\lambda^{(k)}) + R_T E_2(T,\theta^{(k)},\lambda^{(k)}) - n\left((\lambda^{(k+1)})^{(-1)}\right)}{\sum_{i=1}^{R} e^{-\lambda^{(k)} x_i} - \sum_{i=1}^{R} R_i E_3(x_i,\theta^{(k)},\lambda^{(k)}) + R_T E_3(T,\theta^{(k)},\lambda^{(k)})}$$

که

$$E_1(c,\theta,\lambda) = E\left(e^{-\lambda Z} \middle| Z > C\right) = \frac{\lambda\theta}{1-e^{-\theta e^{-\lambda c}}} \int_c^{\infty} \exp\{\ \ 2\lambda x \quad \theta e^{-\lambda x}\}\, dx$$

$$E_2(c,\theta,\lambda) = E(Z|Z > C) = \frac{\lambda\theta}{1-e^{-\theta e^{-\lambda c}}} \int_c^{\infty} x \exp\{\lambda x \quad \theta e^{-\lambda x}\}\, dx$$

$$E_3(c,\theta,\lambda) = E\left(z e^{-\lambda Z} \middle| Z > C\right) = \frac{\lambda\theta}{1-e^{-\theta e^{-\lambda c}}} \int_c^{\infty} x \exp\{\ \ 2\lambda x \quad \theta e^{-\lambda x}\}\, dx$$

۲. ۲. الگوریتم امیدریاضی گرفتن-ماکزیمم کردن تصادفی

در این بخش، الگوریتم SEM برای براورد ماکزیمم درستنمایی پارامترهای نامعلوم استفاده می‌شود. دایبولت و سلوکس (۱۷) یک نوع تصادفی از الگوریتم EM معرفی کردند که در آن گام E با گام تصادفی جایگزین می‌شود و با استفاده از شبیه سازی مقادیر محاسبه می‌شوند. یعنی الگوریتم SEM، نمونه مشاهده شده برای اطلاع گم شده را با یک مقدار تصادفی که از توزیع شرطی روی نتایجی که از گام قبلی به دست می‌آیند، جایگذاری می‌کند. این الگوریتم از الگوریتم EM مناسب تر و قابل محاسبه‌تر در بسیاری مسائل می‌باشد. منابع (۱۸)، (۱۹) را ببینید.

۳. ۲. ماتریس اطلاع فیشر

با در نظر گرفتن $\eta = (\theta,\lambda)$، اطلاع کامل $I_W(\eta)$ به فرم زیر داده می‌شود:

$$I_W(\eta) = \quad E\left(\frac{\partial^2 L_c(W;\eta)}{\partial\eta^2}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

که

$$a_{11} = \frac{n}{\theta^2} \quad \frac{n e^{-\theta}}{(1-e^{-\theta})^2}$$

$$a_{12} = a_{21} = n\lambda\theta(1 \quad e^{-\theta})^{-1} \int_0^{\infty} u \exp\{\ \ 2\lambda u \quad \theta e^{-\lambda u}\}\, du$$

$$a_{22} = \frac{n}{\lambda^2} + n\lambda\theta^2(1 \quad e^{-\theta})^{-1} \int_0^{\infty} u^2 \exp\{\ \ 2\lambda u \quad \theta e^{-\lambda u}\}\, du$$

ماتریس اطلاع فیشر مشاهدات سانسور شده به صورت زیر است:

$$I_{W|X}(\eta) = \sum_{i=1}^{R} R_i\, {I^i}_{w|x}(\theta,\lambda) + R_T {I^T}_{w|x}(\theta,\lambda)$$

ماتریس اطلاع فیشر مشاهدات سانسور شده به شکل زیر داده می‌شود:

$$I_{W|X}{}^{i}(\eta) = \quad E_{z_i|C}\left(\frac{\partial^2 ln f_{z_i}(z_i|c,\eta)}{\partial\eta^2}\right) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = \frac{1}{\lambda^2} \quad \frac{\theta c^2 e^{-\theta e^{-\lambda c}-\lambda c}\left[e^{-\theta e^{-\lambda c}} + \theta e^{-\lambda c} - 1\right]}{\left[1-e^{-\theta e^{-\lambda c}}\right]^2} + \lambda\theta^2(1 \quad e^{-\theta})^{-1} \int_0^{\infty} u^2 e^{-\theta e^{-\lambda u} - 2\lambda u}\, du$$

$$b_{22} = \frac{1}{\theta^2} \quad \frac{e^{-\theta e^{-\lambda c}-2\lambda c}}{\left[1-e^{-\theta e^{-\lambda c}}\right]^2}$$

$$b_{12} = b_{21} = \frac{c e^{-\theta e^{-\lambda c}-\lambda c}\left[1-e^{-\theta e^{-\lambda c}} - \theta e^{-\lambda c}\right]}{\left[1-e^{-\theta e^{-\lambda c}}\right]^2} + \lambda\theta(1 \quad e^{-\theta})^{-1} \int_0^{\infty} u e^{-\theta e^{-\lambda u} - 2\lambda u}\, du$$

۳. براورد بیزی

هدف از این بخش بدست آوردن براوردگرهای بیزی برای پارامترهای θ و λ است که براساس نمونه‌های سانسور هیبرید فزاینده نوع دو پایه‌ریزی شده است. ابتدا برای استنباط نیازمندیم که توابع زیان و توزیع‌های پیشین را برای پارامترها به دست آوریم. لوزادا (۲۰) پیشین گاما را برای پارامتر θ و پیشین جفری را برای λ در نمونه کامل از توزیع PE در نظر گرفتند و همان توزیع‌ها توسط سینگ (۲۱) استفاده شد. در این مطالعه ما توزیع‌های گامای مستقل را برای هر دو پارامتر θ و λ پیشنهاد می‌کنیم، بنابراین چگالی پیشین‌ها به ترتیب به صو.رت زیر است:

$$\pi(\theta|a_1,b_1) \propto \theta^{a_1-1} e^{-b_1\theta}\ , \quad a_1 > 0, b_1 > 0$$

$$\pi(\lambda|a_2,b_2) \propto \lambda^{a_2-1}e^{-b_2\lambda} \ , a_2>0, b_2>0$$

اینجا a_1، a_2،b_1 و b_2 پیش-پارامترها هستند و اطلاع راجع به پارامترهای θ و λ را فراهم می‌کنند. پیشین نااطلاع با برابر صفر قرار دادن پارامترهای a_1 و b_1 به دست می‌آید. مقادیر پیش پارامتر a_1، a_2،b_1 و b_2 با استفاده از داده‌های در دسترس گذشته می‌توانند ساخته شوند. برای مثال شرایطی را در نظر بگیرید که k تعداد نمونه از توزیع پواسن-نمایی خارج کنیم. سپس براورد ماکزیمم درستنمایی از θ و λ با مقادیر $\hat{\theta}^j$ و $\hat{\lambda}^j$ برای هر نمونه‌ی j که j=1,2,…,k: می‌تواند به دست آید. با مساوی قرار دادن مقادیر میانگین و واریانس $\hat{\theta}^j$ و $\hat{\lambda}^j$ با میانگین و واریانس پیشین‌های مدنظر، مقادیر پیش-پارامتر به دست می‌آیند. حال چگالی پیشین توام برای (θ,λ) می‌تواند به صورت زیر محاسبه شود:

$$\pi(\theta,\lambda) = \pi(\theta|a_1,b_1)\pi(\lambda|a_2,b_2)$$

و چگالی پسین توام بر روی داده‌های مشاهده شده‌ی $\boldsymbol{x}$ به این صورت است:

$$\pi(\theta,\lambda|\boldsymbol{x}) = \frac{\pi(\theta|a_1,b_1)\pi(\lambda|a_2,b_2)L(\theta,\lambda|\boldsymbol{x})}{\int_0^\infty\int_0^\infty \pi(\theta|a_1,b_1)\pi(\lambda|a_2,b_2)L(\theta,\lambda|\boldsymbol{x})d\theta d\lambda}$$
$$\pi(\theta,\lambda|\boldsymbol{x}) \propto G_\lambda(r+a_2, b_2+\sum_{i=1}^R x_i)$$
$$G_{\theta|\lambda}(r+a_1, b_1+\sum_{i=1}^R e^{-\lambda x_i}) \ \ (\theta,\lambda)$$

که $G(.,.)$ تابع چگالی توزیع گاما را نشان می‌دهد و (θ,λ) به صورت زیر است:

$$(\theta,\lambda) = (1 \quad e^{-\theta})^{-r}$$
$$[\frac{1-e^{-\theta e^{-\lambda c}}}{1-e^{-\theta}}]^{R_T} \prod_{i=1}^r (\frac{1-e^{-\theta e^{-\lambda c}}}{1-e^{-\theta}})^{R_i} \qquad (3)$$

چون استنباط‌های بیزی مرتبط با توابع زیان می‌باشند، بنابراین ابتدا تابع زیان مربع خطا (SEL) را در نظر می‌گیریم، که به صورت زیر است:

$$\delta_{SEL}(\varphi(\eta) \quad \hat{\varphi}(\eta)) = (\varphi(\eta) \quad \hat{\varphi}(\eta))^2$$

این نکته مهم است که تابع زیان مربع خطا یک تابع زیان نامتقارن است و بنابراین برای شرایطی که کم-براوردی از بیش-براوردی بیشتر باشد یا برعکس، مناسب نمی‌باشد. در بسیاری شرایط کاربردی به تابع زیان‌های نامتقارن احتیاج داریم، یک تابع زیان نامتقارن مفید تابع نمایی-خطی یا همان لاینکس (LL) می باشد که به صورت زیر می‌باشد:

$$\delta_{LL} = (\varphi(\eta), \hat{\varphi}(\eta)) = \exp\left(\nu(\hat{\varphi}(\eta)\right.$$
$$\left.\varphi(\eta))\right) \qquad \nu(\hat{\varphi}(\eta) \quad \varphi(\eta)) \quad 1, \nu \neq 0$$

سپس تابع زیان آنتروپی تعمیم یافته (GEL)را مورد نظر قرار می‌دهیم:

$$\delta_{GEL} = (\varphi(\eta), \hat{\varphi}(\eta)) = (\hat{\varphi}(\eta)/$$
$$\varphi(\eta))^q \quad q\ln(\left(\frac{\hat{\varphi}(\eta)}{\varphi(\eta)}\right) \quad 1,$$

حال براوردگرهای بیزی از تابع $\varphi(\eta)$ با استفاده از پیشین‌های در نظرگرفته شده‌ی $\pi(\theta,\lambda)$، تحت توابع زیان لاینکس و آنتروپی تعمیم یافته، به ترتیب زیر است:

$$\hat{\varphi}_{LL}(\eta) = \frac{1}{\nu} Ln(E(e^{-\nu\varphi(\eta)}|\mathrm{x}) \ \ ,$$
$$\hat{\varphi}_{GEL}(\eta) = E((\varphi(\eta))^{-q}|\mathrm{x})^{-\frac{1}{q}}$$

توجه کنید که در تابع زیان انتروپی تعمیم یافته با قرار دادن $q = \ \ 1$، براوردگر بیز تحت این تابع زیان همان براوردگر بیز تحت تابع زیان مربع خطا می‌باشد. همانطور که ملاحظه شد براوردگرهای بیز تحت دارای عبارات بسته‌ای نیستند و بنابراین در بخش بعدی روش‌های عددی را بررسی می‌کنیم.

۳. ۱. تقریب لیندلی

در این زیربخش، از تقریب لیندلی که توسط لیندلی برای بدست آوردن براوردگرهای بیز پیشنهاد شده است، استفاده می‌کنیم (۲۲). این روش وقتی استفاده می‌شود که براوردگرهای بیز موردعلاقه یک فرم قابل حل بسته‌ای ندارند و احتیاج داریم تا

نسبتی از دو انتگرال را محاسبه کنیم. برای پارامترهای $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ تقریب لیندلی از $E(g(\varphi)|\mathrm{x})$ به شکل زیر داده می‌شود:

$$\hat{g}(\varphi) = \mathrm{g}(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}) + 1/2[A + L_{30}B_{12} + L_{03}B_{21} + L_{21}C_{12} + L_{12}C_{21}] + \rho_1 A_{12} + \rho_2 A_{21}$$

که

$$L_{ij} = \frac{\partial^{i+j}\mathrm{L}(\theta_1,\theta_2)}{\partial{\theta_1}^i\,\partial{\theta_2}^j}\ i,j = 0,1,2,3\ \ i+j = 3$$

$$A = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} w_{ij}\sigma_{ij}\ ,\quad \rho_i = \frac{\partial\rho}{\partial\theta_i}\ ,$$

$$w_i = \frac{\partial g}{\partial\theta_i},\ \ w_{ij} = \frac{\partial^2 g}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j}$$

$$\rho = \ln\pi(\theta_1,\theta_2),\ \ A_{ij} = w_i\sigma_{ii} + w_j\sigma_{ij}\ ,$$

$$B_{ij} = (w_i\sigma_{ii} + w_j\sigma_{ij})\sigma_{ii}$$

$$C_{ij} = 3w_i\sigma_{ii}\sigma_{ij} + w_j(\sigma_{ii}\sigma_{jj} + 2{\sigma_{ij}}^2)$$

اینجا $L(.,.)$ تابع درستنمایی، $\pi(\theta_1, \theta_2)$ توزیع پیشین و σ_{ij}، ij-امین عنصر از معکوس ماتریس اطلاع فیشر را نشان می‌دهد. توجه کنید که عبارات بالا در براوردهای ماکزیمم درستنمایی پارامترهای (θ_1, θ_2) محاسبه می‌شوند. برای مسئله موردنظر ما $(\theta_1, \theta_2) = (\theta, \lambda)$ است و برای محاسبه براوردگر بیز پارامتر θ تحت تابع زیان مربع خطا $g(\theta_1, \theta_2) = \theta$ قرار می‌دهیم و عبارات زیر را بدست می‌آوریم:

$$w_1 = 1\ , w_2 = 0\ , w_{ij} = 0,$$

$$A = 0,\ \ B_{12} = {\sigma_{11}}^2,$$

$$B_{21} = {\sigma_{21}}^2\sigma_{22}$$

$$C_{12} = 3\sigma_{11}\sigma_{12}\ ,\ C_{21} = (\sigma_{22}\sigma_{11} + 2\sigma_{12}\sigma_{21})$$

$$\rho_1 = \frac{a_1 - 1}{\hat{\theta}} \quad b_1\ \ , \rho_2 = \frac{a_2 - 1}{\hat{\lambda}} \quad b_2$$

در نتیجه براوردگر بیز θ و λ تحت تابع زیان مربع خطا(SEL) به فرم زیر است:

$$\hat{\theta}_{SEL} = \hat{\theta} + 1/2[{\sigma_{22}}^2L_{03} + 3\sigma_{22}\sigma_{12}L_{12} + \sigma_{22}\sigma_{11}L_{21} + 2\sigma_{21}\sigma_{12}L_{21} + \sigma_{21}\sigma_{11}L_{30}] + \rho_2\sigma_{22} + \rho_1\sigma_{21}$$

$$\hat{\lambda}_{SEL} = \hat{\lambda} + 1/2[{\sigma_{11}}^2L_{30} + 3\sigma_{11}\sigma_{21}L_{21} + \sigma_{11}\sigma_{22}L_{12} + 2\sigma_{21}\sigma_{12}L_{12} + \sigma_{12}\sigma_{22}L_{03}] + \rho_1\sigma_{11} + \rho_2\sigma_{12}$$

همه‌ی عناصر عبارات بالا در براوردهای درستنمایی ماکزیمم پارامترهای (θ, λ) محاسبه می‌شوند و مقادیر L_{ij} برای $i,j = 0,1,2,3$ با استفاده از نرم افزار مطلب به راحتی محاسبه می‌شوند. با یک حل مشابه براوردگرهای بیز پارامترهای θ و λ تحت تابع زیان‌های لاینکس و آنتروپی تعمیم یافته به دست می‌آیند. توجه کنید که تقریب لیندلی براوردهای بیزی را محاسبه می‌کند ولی براوردهای بازه‌ای چگالی پسین رفیع (HPD) را فراهم نمی‌کند. در بخش بعد روش نمونه‌گیری از نقاط مهم که در محاسبه براوردگرهای بیزی و بازه‌های (HPD) کاربرد دارد، را شرح می‌دهیم.

۳. ۲. نمونه گیری از نقاط مهم

هدف از این بخش بدست آوردن براوردگرهای بیز با استفاده از استخراج نمونه‌هایی از توزیع های چگالی پسین مختلف است. چگالی پسین با استفاده از فرمول داده شده است، حال گام‌های زیر را دنبال می‌کنیم:

گام۱: λ_j را ازتوزیع گاما با پارامترهای $(R + a_2\ , b_2 + \sum_{i=1}^{R} x_i\ )$ تولید می‌کنیم.

گام۲: به شرط اینکه λ_j داده شده است، مقدار θ_j را از توزیع گاما با پارامترهای $(R + a_1\ , b_1 + \sum_{i=1}^{R} e^{-\lambda x_i}\ )$ تولید می‌کنیم.

گام۳: گام ۱ و ۲ را s بار تکرار می‌کنیم تا نمونه‌ی $\{(\theta_1, \lambda_1), (\theta_2, \lambda_2), \ldots, (\theta_s, \lambda_s)\}$ را به دست آوریم.

بنابراین براوردگرهای بیز از θ تحت تابع زیان‌های مربع خطا، لاینکس و آنتروپی تعمیم یافته به صورت زیر است:

$$\hat{\theta}_{SEL} = \frac{\sum_{i=1}^{s} \theta_i h(\theta_i,\lambda_i)}{\sum_{i=1}^{s} h(\theta_i,\lambda_i)},$$
$$\hat{\theta}_{LL} = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{s} e^{-h\theta_i} h(\theta_i,\lambda_i)}{\sum_{i=1}^{s} h(\theta_i,\lambda_i)}\right),$$
$$\hat{\theta}_{GEL} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{s} \theta_i^{-q} h(\theta_i,\lambda_i)}{\sum_{i=1}^{s} h(\theta_i,\lambda_i)}\right)^{-1/q}$$

که (θ_i,λ_i) بوسیله معادله‌ی (۳) داده شده است. در ادامه ما از ایده‌ی چن و شائو برای ساختن براوردهای بازه‌ای HPD برای پارامتر θ استفاده می‌کنیم، فرایند انجام کار در مقاله‌ی سینگ و همکاران شرح داده شده است (۲۳) و (۲۴). براوردگرهای بیز و بازه‌های HPD پارامتر λ نیز مشابه روش بالا محاسبه می‌شود.

۴. آنالیز داده-ها و مطالعات شبیه‌سازی

۴. ۱. آنالیز داده‌ها

در این بخش آنالیز یک مجموعه از داده‌های واقعی را انجام می‌دهیم. داده‌ها مربوط به طراحی پنجره‌ی هواپیمای شیشه‌ای است که مقدار مقاومت شیشه‌ی شفاف اندازه‌گیری می‌شود. مجموعه-ی داده‌ها از مقاله‌ی پیپی استخراج شده است (۲۵).

18/83 ,20/8, 21/657, 23/03, 23/23, 24/05, 24/321, 25/5, 25/52, 25/8, 26/69, 26/77 26/78, 27/05, 27/67, 29/9, 31/11, 33/2, 33/73, 33/76, 33/89, 34/76, 35/75, 35/91 36/98, 37/08, 37/09, 39/58, 44/045, 45/29, 45/381

در مقاله ی کومار این مجموعه‌ی داده‌ها برای توزیع پواسن-نمایی بررسی شده است (۲۶). در این مقاله نویسندگان از روش گرافیکی برای نشان دادن مناسب بودن توزیع PE برای این مجموعه داده‌ها استفاده کردند. ما مناسب بودن توزیع PE برای مجموعه‌ی داده‌ها را با توزیع‌های دیگر مانند وایبل، نمایی تعمیم داده شده و توزیع بور سیزده مقایسه می‌کنیم. برای این کار از معیار اطلاع آکائیکه (AIC) معیار اطلاع بیز (BIC) و آماره آزمون کولموگرف-اسمیرنوف (KS) استفاده می‌کنیم.

همه‌ی مقادیر پایه‌ریزی شده در معیارها در جدول (۱) آمده است. ابتدا ما داده‌های سانسور هیبرید فزاینده‌ی نوع دو از یک مجموعه داده با $m = 24$، طبق طرح سانسور $R = (0^{23}, 7)$ و مقدار $T = 35,38$ تولید می‌کنیم. برای همه‌ی داده‌های تولید شده MLE را با استفاده از الگوریتم‌های نیوتن-رافسون، EM و SEM به دست می‌آوریم (جدول ۲). از مقادیر به دست آمده دیده می‌شود که برای مقادیر جدول‌بندی شده انجام الگوریتم SEM در مقایسه با روش EM و نیوتن-رافسون بهتر است. برای محاسبه‌ی براوردگرهای بیزی از روش لیندلی و تکنیک نمونه‌گیری از نقاط مهم استفاده می‌کنیم. توجه کنید که تحت تابع زیان لاینکس ما دو مقدار $0/25\,, 0/5 \quad =$ را در نظر می‌گیریم و تحت آنتروپی تعمیم یافته دو مقدار $\mathrm{q} = \quad 0/5\,, 1/25$ در نظر گرفته می‌شود. براوردگرهای بیزی برای تابع زیان‌های مربع خطا، آنتروپی، لاینکس برای پیشین‌های آگاهی بخش و ناآگاهی بخش در جدول (۳) ارائه شده است. مقادیر نشان می‌دهد که براوردگرها تحت تابع زیان کمتر هستند. بازه‌های اطمینان ۹۵ درصد مجانبی و براوردهای بازه ای HPD در جدول (۴) گزارش داده شده است و نشان می‌دهد که براوردگرهای بیز در مقایسه با براوردگرهای ماکزیمم درستنمایی بازه‌های بسته تری را ارائه می‌دهد.

۴. ۱. مطالعات شبیه سازی شده

در این بخش شبیه‌سازی مونت کارلو را برای امتحان کردن براوردگرهای پیشنهادی استفاده می‌کنیم (۲۷). ابتدا ما نمونه‌ی کامل به اندازه‌ی n از توزیع $PE(2,0/5)$ با استفاده از زبان برنامه نویسی R شبیه سازی می‌کنیم. سپس مشاهدات شبیه‌سازی شده را مرتب می‌کنیم و داده‌ها را تحت سانسور هیبرید نوع دو براساس مقادیر مختلف داده شده از (m,T) و $n = 35$ مشاهده می‌کنیم. نتایج گزارش

شده در اینجا براساس ۵۰۰۰ نمونه شبیه‌سازی مونت کارلو می‌باشد. ما ابتدا براوردگرهای ماکزیمم درستنمایی را برای θ و λ که با استفاده از الگوریتم‌های EM و SEM محاسبه شده‌اند، در جدول (۵) گزارش داده‌ایم. با یک مقایسه با معیار میانگین براوردگرها و میانگین مربع خطا (MSE) انجام شده است، که نشان می‌دهد که براوردهای به دست آمده از الگوریتم SEM بهتر از الگوریتم EM است. جدول (۶) براوردگرهای بیز بدست آمده از پیشین‌های ناآگاهی بخش NIN و آگاهی بخش IN را نشان می‌دهد. توجه کنید که برای بدست آوردن مقادیر پارامتر-پیشین تحت IN، ابتدا 1000 تعداد از نمونه‌های کامل از توزیع پواسن-نمایی با پارامترهای $\lambda = 2$ و $\theta = 0/5$ تولید می‌کنیم که هر نمونه ۳۰ مشاهده دارد. سپس طبق بحث حاضر در بخش سوم مقادیر پیش-پارامترها به صورت $a_1 = 16/5443$، $b_1 = 7/3979$، $a_2 = 1/2145$، $b_2 = 1/3608$ بدست می‌آید. نتایج نشان می‌دهد که اجرای پیشین IN بهتر از پیشین NIN در مقایسات بین براوردهای میانگین و مقادیر MSE می‌باشد و اجرای براوردگرهای بیز به دست آمده با استفاده از تکنیک نمونه‌گیری از نقاط مهم در مقایسه با روش لیندلی بهتر است. سپس مشاهده می‌شود که مقدار بالا از h و q به ترتیب تحت تابع‌های لاینکس (LINEX) و انتروپی تعمیم یافته (GEL) منجر به براوردهای کوچکتر در مقایسه با مقادیر منفی از h و q می‌شود. بنابراین در جدول (۷) براوردگرهای بازه‌ای مجانبی ۹۵ درصد و چگالی پسین رفیع را با میانگین طول بازه (AILs) حاضر کرده‌ایم. از مقادیر جدول‌بندی شده دیده می‌شود که براوردهای بازه‌ای چگالی پسین رفیع به دست آمده از پیشین IN، $AILs$ کمتر در مقایسه با پیشین‌های NIN دارند.

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این مقاله، مسئله ی براورد کلاسیک و بیزی وقتی داده‌های طول عمر از توزیع پواسن-نمایی تحت مشاهدات سانسور شده هیبرید نوع دو پیروی می‌کنند، بررسی شده است. براوردهای ماکزیمم درستنمایی از پارامترهای نامعلوم توزیع به فرم بسته بدست نمی‌آید، بنابراین الگوریتم EM را برای محاسبه‌ی براوردگرهای ماکزیمم درستنمایی استفاده می‌کنیم. فاصله‌های اطمینان مجانبی را با استفاده از ایده‌ی مفهوم اطلاع گمشده و به‌طور مجانبی نرمال بودن MLEها، محاسبه می‌کنیم. به دلیل پیچیدگی در عبارات گام E از الگوریتم EM، الگوریتم SEM را پیشنهاد دادیم. در مطالعات شبیه سازی اجرای الگوریتم SEM در مقایسه با الگوریتم EM بهتر عمل کرد. در تقریب‌های بیزی، براوردگرهای بیز را تحت توابع زیان مربع خطا، لاینکس و آنتروپی تعمیم یافته با استفاده از تقریب لیندلی و نمونه‌گیری از نقاط مهم به دست آوردیم و در این مورد نیز مشابه براوردگرهای درستنمایی ماکزیمم، براوردگرهای بیزی فرم بسته ای را ندارند بنابراین با کمک روش نمونه‌گیری از نقاط مهم و تشکیل چگالی پسین، براوردهای بازه‌ای چگالی پسین رفیع را با استفاده از روش چن و شائو محاسبه کردیم. براوردگرهای بیز تحت پسین آگاهی بخش (IN) در مطالعات شبیه‌سازی ما بر پایه‌ی مقادیر میانگین و میانگین مجذور خطا (MSE) عملکرد بهتری دارند.

در این مقاله ما طرح سانسور هیبرید فزاینده نوع دو را بر روی توزیع پواسن-نمایی بررسی کردیم و برای توزیع‌های عمر مختلف تحت طرح‌های سانسور متفاوت، می‌توان استنباط‌های آماری را گسترش داد.

جدول ۱: برازش داده ها برای توزیع پواسن-نمایی

مدل	تابع چگالی توزیع	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	NLC	AIC	BIC	$k\ \ S$
PE	$f(x;\ \theta,\lambda)$	0/1669	96/955	104/1426	212/2852	215/1532	0/1271
WD	$\frac{\theta}{\lambda^{\theta}}x^{\theta-1}e^{(-\frac{x}{\lambda})^{\theta}}$	4/635	33/673	105/4889	214/9778	217/8458	0/1276
GE	$\theta\lambda e^{-\lambda x}(1\quad e^{-\lambda x})^{\theta}$	0/190	193	104/8668	213/7336	216/6016	0/1386
$Burr\ XII$	$\theta\lambda x^{\lambda-1}(1+x^{\lambda})^{-\theta-1}$	0/069	4/2567	269/3431	542/6862	545/5541	0/991
$Lomax$	$\theta\lambda(1+\lambda x)^{-\theta-1}$	0/1227	115/248	201/481	406/9621	409/8301	0/619

جدول ۲: براورد درستنمایی ماکزیمم و براوردهای بیز برای داده‌های واقعی

براورد درستنمایی ماکزیمم						براوردهای بیز				
						$LINEX$		SEL	GEL	
T	$Parameter$	NR	EM	SEM	$method$	$=\ 0/25$	$=0/5$		$q\ =\ 0/5$	$q\ =1/25$
35	θ	0/1745	0/0702	0/06523	$Lindley$	0/0317	0/0307	0/0417	0/0398	0/0389
	λ	4/120	1/6723	1/5912		1/9301	1/1974	2/0426	1/4257	1/3245
	θ				Is	0/0315	0/0331	0/0407	0/0409	0/0410
	λ					1/7542	1/1543	1/8012	1/1785	1/3549
38	θ	0/1457	0/0578	0/0542	$Lindley$	0/0274	0/0299	0/0435	0/0401	0/0368
	λ	3/8678	1/5934	1/4012		1/1642	1/1453	1/3814	1/2214	1/0942
	θ				Is	0/0275	0/0247	0/0364	0/0254	0/0251
	λ					1/0354	0/9754	1/1854	1/0895	1/0312

جدول ۳: بازه‌های اطمینان برای داده‌های واقعی

T	$Parameter$	$Asymptotic\ confidence\ interval$	$HPD\ interval$
35	θ	(0/0345,1/4354)	(0/0172,0/9958)
	λ	(0/9314,2/9275)	(1/0325,3/1024)
38	θ	(0/0268,1/6124)	(0/02415,1/1658)
	λ	(0/8952,2/6142)	(0/8042,2/9285)

جدول۴: مقادیر میانگین و مقدار خطای میانگین درجه دو برای براوردگرهای درستنمایی ماکزیمم

			θ				λ			
T	m	R	Avg	MSE	Avg	MSE	Avg	MSE	Avg	MSE
3	25	$(10,0^{24})$	0/4423	0/0153	0/4365	0/0221	1/8234	1/3548	1/6485	0/5063
		$(0^{24},10)$	0/4312	0/0164	0/4213	0/0187	1/6642	0/5497	1/5525	0/5402
		$(0^{12},10,0^{12})$	0/4451	0/0152	0/4336	0/0189	1/6425	0/5592	1/6321	0/5284
	30	$(5,0^{29})$	0/3942	0/0153	0/4215	0/0165	1/7425	0/5932	1/7234	0/6482
		$(0^{29},5)$	0/4121	0/0175	0/4213	0/0152	1/7142	0/5395	1/6751	0/6192
		$(0^{14},5,0^{15})$	0/4152	0/0168	0/4201	0/0167	1/7215	0/5163	1/6847	0/6389
5	25	$(10,0^{24})$	0/3678	0/0164	0/3724	0/01532	1/7053	0/5227	1/6618	0/6246
		$(0^{24},10)$	0/4128	0/0165	0/4235	0/0164	1/7254	0/5321	1/6652	0/6395
		$(0^{12},10,0^{12})$	0/4217	0/0172	0/4276	0/0162	1/7042	0/5618	1/5746	0/6243
	30	$(5,0^{29})$	0/4218	0/0131	0/4235	0/0131	1/7424	0/5226	1/7235	0/7813
		$(0^{29},5)$	0/4251	0/0130	0/4203	0/0130	1/6587	0/5221	1/7054	0/9615
		$(0^{14},5,0^{15})$	0/4234	0/0130	0/4251	0/0129	1/7642	0/5246	1/6734	0/7193

جدول ۵: مقادیر میانگین و مقدار خطای میانگین درجه دو برای براوردگرهای بیز تحت پیشین‌های آگاهی بخش و ناآگاهی بخش

T =3					NIN prior					IN prior				
					LINEX			GEL		LINEX			GEL	
m	R	method			= -1/5	= 0/5	SEL	$q=$ -0/5	$q=$ 1/5	= -1/5	= 0/5	SEL	$q=$ 0/5	$q=$ 1/5
25	$(10,0^{24})$	Lindley	θ	Avg	0/5011	0/4512	0/4934	0/4841	0/5098	0/4923	0/4567	0/4971	0/4851	0/5104
				MSE	0/0051	0/0035	0/0031	0/0030	0/0049	0/0041	0/0042	0/0034	0/0039	0/0041
			λ	Avg	1/6921	1/7912	1/83117	1/5924	1/7891	1/8042	1/8954	1/7869	1/6987	1/8991
				MSE	0/2013	0/1798	0/1218	0/1567	0/1195	0/1058	0/1735	0/1098	0/1534	0/1324
		IS	θ	Avg	0/4712	0/3721	0/3798	0/3642	0/3614	0/4765	0/4756	0/4741	0/4738	0/4768
				MSE	0/0021	0/0012	0/0012	0/0014	0/0018	0/0015	0/0013	0/0012	0/0012	0/0017
			λ	Avg	1/782	1/8842	1/7765	1/8723	1/8827	1/8453	1/8146	1/8012	1/7924	1/7896
				MSE	0/0456	0/0512	0/0401	0/0508	0/0741	0/0514	0/0412	0/0869	0/0512	0/0541
	$(0^{24},10)$	Lindley	θ	Avg	0/5001	0/4532	0/4935	0/4837	0/5102	0/4934	0/4534	0/4967	0/4867	0/5123
				MSE	0/0060	0/0035	0/0034	0/0035	0/0051	0/0050	0/0051	0/0033	0/0034	0/0049
			λ	Avg	1/6912	1/7846	1/7864	1/5921	1/7865	1/7816	1/8921	1/7921	1/7011	1/6531
				MSE	0/1832	0/1753	0/1311	0/1534	0/1301	0/1212	0/1734	0/1127	0/1534	0/1342
		IS	θ	Avg	0/3612	0/3642	0/3632	0/3633	0/3642	0/4521	0/4715	0/4735	0/4711	0/4721
				MSE	0/0018	0/00150	0/0013	0/0014	0/0014	0/0012	0/0012	0/0013	0/0012	0/0012
			λ	Avg	1/7643	1/9412	1/7924	1/8711	1/8812	1/7824	1/7895	1/7768	1/8142	1/8214
				MSE	0/1542	0/1034	0/1345	0/1524	0/1048	0/1538	0/1534	0/1187	0/1589	0/1501
	$(0^{12},10,0^{12})$	Lindley		Avg	0/5012	0/4513	0/4911	0/4721	0/5012	0/4942	0/4568	0/4945	0/4821	0/5011
				MSE	0/0021	0/0022	0/0016	0/0030	0/0018	0/0023	0/0021	0/0014	0/0024	0/0021
				Avg	1/3542	1/7513	1/7634	1/5541	1/7621	1/7641	1/8612	1/7265	1/6687	1/8542
				MSE	0/1889	0/1758	0/1247	0/1578	0/1187	0/1235	0/1749	0/1258	0/1534	0/1498
		IS		Avg	0/3641	0/3642	0/3678	0/3689	0/3721	0/4714	0/4731	0/4732	0/4733	0/4732
				MSE	0/0018	0/0012	0/0013	0/0014	0/0018	0/0012	0/0012	0/0011	0/0012	0/0013
				Avg	1/7568	1/8997	1/8724	1/9142	1/8967	1/7981	1/7921	1/8710	1/8465	1/8041
				MSE	0/1235	0/1524	0/1465	0/1532	0/1534	0/1569	0/1536	0/1336	0/1539	0/1598

جدول۶: مقادیر میانگین و مقدار خطای میانگین درجه دو برای براوردگرهای بیز تحت پیشین‌های آگاهی بخش و ناآگاهی بخش

					NIN prior					IN prior				
					LINEX			GEL		LINEX			GEL	
		T =3			= -1/5	= 0/5	SEL	$q=$ -0/5	$q=$ 1/5	= -1/5	= 0/5	SEL	$q=$ 0/5	$q=$ 1/5
30	$(5,0^{29})$	Lindley	θ	Avg	0/5238	0/4812	0/5247	0/5141	0/5087	0/5217	0/4891	0/5243	0/5165	0/5443
				MSE	0/0074	0/0054	0/0053	0/0079	0/0072	0/0068	0/0046	0/0043	0/0051	0/0071
			λ	Avg	1/7652	1/8342	1/8423	1/6104	1/7103	1/7282	1/8724	1/8245	1/6821	1/9102
				MSE	0/2042	0/1724	0/1254	0/1412	0/1042	0/1024	0/1795	0/1024	0/1089	0/1287
		IS	θ	Avg	0/4632	0/4712	0/4733	0/4656	0/4312	0/4757	0/4801	0/4757	0/4752	0/4798
				MSE	0/0030	0/0021	0/0018	0/0019	0/0035	0/0021	0/0022	0/0023	0/0022	0/0023
			λ	Avg	1/7412	1/8625	1/8736	1/8452	1/7240	1/6925	1/6624	1/7015	1/6648	1/6898
				MSE	0/1601	0/1521	0/1654	0/1635	0/1102	0/1625	0/1648	0/1856	0/1624	0/1607
	$(0^{29},5)$	Lindley	θ	Avg	0/4835	0/3598	0/4762	0/4638	0/4925	0/4731	0/4355	0/5302	0/7958	0/7214
				MSE	0/0053	0/0021	0/0018	0/0038	0/0059	0/0038	0/0019	0/0020	0/0028	0/0052
			λ	Avg	1/2543	1/5234	1/5478	1/6234	1/7325	1/7123	1/8045	1/7248	1/6278	1/8027
				MSE	0/1726	0/1653	0/1057	0/1534	0/1095	0/1021	0/1542	0/1054	0/1435	0/1342
		IS	θ	Avg	0/3625	0/3685	0/3689	0/3612	0/3517	0/4421	0/4457	0/4432	0/4410	0/4421
				MSE	0/0018	0/0011	0/0010	0/0012	0/0021	0/0010	0/0011	0/0011	0/0010	0/0010
			λ	Avg	1/8142	1/7954	1/8965	1/8998	1/8954	1/8879	1/8154	1/8163	1/8215	1/8427
				MSE	0/1506	0/1523	0/1645	0/1585	0/1823	0/1739	0/1701	0/1502	0/1598	0/1602
	$(0^{14},5,0^{15})$	Lindley	θ	Avg	0/5036	0/4512	0/4985	0/4923	0/5098	0/4912	0/4562	0/5024	0/4965	0/6012
				MSE	0/0046	0/0032	0/0018	0/0036	0/0067	0/0034	0/0032	0/0024	0/0023	0/0016
			λ	Avg	1/6993	1/7421	1/7712	1/5811	1/7735	1/7421	1/8245	1/7833	1/6927	1/7938
				MSE	0/1745	0/1652	0/1232	0/1527	0/1138	0/1054	0/1653	0/1188	0/1639	0/1422
		IS	θ	Avg	0/4603	0/3511	0/4598	0/3642	0/3617	0/4624	0/4611	0/4631	0/4651	0/4628
				MSE	0/0017	0/0012	0/0013	0/0016	0/0021	0/0011	0/0012	0/0011	0/0012	0/0013
			λ	Avg	1/6924	1/7562	1/7312	1/7953	1/7689	1/7017	1/6587	1/7012	1/7121	1/7155
				MSE	0/1121	0/1062	0/1123	0/1023	0/1245	0/1089	0/1534	0/1165	0/1098	0/1103

جدول ۷: مقادیر میانگین و مقدار خطای میانگین درجه دو برای براوردگرهای بیز تحت پیشین‌های آگاهی بخش و ناآگاهی بخش

					NIN prior					***IN prior***				
	T =5				***LINEX***			***GEL***		***LINEX***			***GEL***	
m	***R***	***method***			= -1/5	= 0/5	*SEL*	*q* = -0/5	*q* = 1/5	= -1/5	= 0/5	*SEL*	*q* = 0/5	***q*** = 1/5
25	$(10,0^{24})$	*Lindley*	θ	*Avg*	0/5001	0/5002	0/4967	0/4851	0/4768	0/4912	0/4598	0/4931	0/4834	0/5120
				MSE	0/0033	0/0023	0/0014	0/0022	0/0019	0/0033	0/0015	0/0017	0/0021	0/0023
			λ	*Avg*	1/7786	1/7935	1/8012	1/8965	1/6013	1/9134	1/8153	1/8143	1/7865	1/8834
				MSE	0/1814	0/1796	0/1569	0/1532	0/1357	0/1432	0/1536	0/1421	0/1521	0/1354
		IS	θ	*Avg*	0/4689	0/4698	0/4695	0/4687	0/4581	0/4632	0/4637	0/4689	0/4698	0/4638
				MSE	0/0013	0/0012	0/0012	0/0016	0/0015	0/0014	0/0012	0/0012	0/0012	0/0016
			λ	*Avg*	1/7842	1/9012	1/8721	1/8804	1/8851	1/7801	1/7843	1/8104	1/8042	1/7986
				MSE	0/0250	0/0201	0/0191	0/0145	0/0148	0/0153	0/0162	0/0152	0/0117	0/0122
	$(0^{24},10)$	*Lindley*	θ	*Avg*	0/4821	0/5214	0/4781	0/4781	0/5012	0/4853	0/4523	0/4352	0/4679	0/5031
				MSE	0/0021	0/0018	0/0016	0/0019	0/0021	0/0019	0/0018	0/0017	0/0015	0/0016
			λ	*Avg*	1/7014	1/8412	1/8437	1/6042	1/8079	1/8146	1/9012	1/7935	1/8223	1/8812
				MSE	0/2341	0/1732	0/1346	0/1698	0/1562	0/1432	0/1652	0/1323	0/1538	0/1453
		IS	θ	*Avg*	0/3648	0/3724	0/3766	0/3726	0/3852	0/4512	0/4624	0/4621	0/4558	0/4598
				MSE	0/0014	0/0012	0/0012	0/0013	0/0015	0/0012	0/0012	0/0011	0/0013	0/0012
			λ	*Avg*	1/8412	1/8324	1/8926	1/8564	1/8355	1/7012	1/6628	1/7549	1/7562	1/7068
				MSE	0/0702	0/0765	0/0954	0/0735	0/0827	0/0736	0/0712	0/0637	0/0704	0/0706
	$(0^{12},10,0^{12})$	*Lindley*		*Avg*	0/5012	0/5498	0/4938	0/5064	0/5081	0/4986	0/4726	0/4569	0/4902	0/5098
				MSE	0/0047	0/0042	0/0043	0/0041	0/0033	0/0037	0/0038	0/0031	0/0035	0/0036
				Avg	1/8436	1/7684	1/7635	1/5789	1/7765	1/7635	1/8536	1/7638	1/7653	1/8134
				MSE	0/1708	0/1726	0/1836	0/1513	0/1301	0/1265	0/1737	0/1245	0/1544	0/1352
		IS		*Avg*	0/4762	0/3798	0/3865	0/3988	0/4432	0/4735	0/4786	0/4711	0/4733	0/4766
				MSE	0/0017	0/0012	0/0013	0/0015	0/0014	0/0013	0/0012	0/0013	0/0012	0/0012
				Avg	2/0763	1/9564	1/8915	1/9523	1/8935	1/8829	1/9045	1/9246	1/9149	1/8201
				MSE	0/0112	0/0132	0/0213	0/0320	0/0311	0/0244	0/0298	0/0321	0/0297	0/0288

جدول ۸: مقادیر میانگین و مقدار خطای میانگین درجه دو برای براوردگرهای بیز تحت پیشین های آگاهی بخش و ناآگاهی بخش

					NIN prior					***IN prior***				
	T =5				***LINEX***			***GEL***		***LINEX***			***GEL***	
m	***R***	***method***			= -1/5	= 0/5	*SEL*	*q* = -0/5	*q* = 1/5	= -1/5	= 0/5	*SEL*	*q* = 0/5	***q*** = 1/5
۳۰	$(5,0^{29})$	*Lindley*	θ	*Avg*	0/5011	0/5032	0/4911	0/4856	0/5108	0/4912	0/5018	0/4922	0/4822	0/5132
				MSE	0/0022	0/0018	0/0014	0/0032	0/0023	0/0033	0/0018	0/0018	0/0021	0/0021
			λ	*Avg*	1/7026	1/7834	1/8112	1/7964	1/7922	1/8694	1/8733	1/8055	1/7825	1/8735
				MSE	0/2514	0/2096	0/1619	0/1832	0/1547	0/1377	0/1185	0/1358	0/1811	0/1654
		IS	θ	*Avg*	0/4721	0/4657	0/4579	0/4638	0/4766	0/4745	0/4732	0/4729	0/4731	0/4759
				MSE	0/0014	0/0013	0/0012	0/0015	0/0016	0/0014	0/0013	0/0012	0/0013	0/0015
			λ	*Avg*	1/7742	1/8912	1/8844	1/8655	1/8721	1/7774	1/76583	1/8065	1/8122	1/7898
				MSE	0/1324	0/1265	0/1768	0/1835	0/1234	0/1768	0/1735	0/1236	0/1678	0/1735
	$(0^{29},5)$	*Lindley*	θ	*Avg*	0/4921	0/5315	0/4881	0/4881	0/4982	0/4953	0/5033	0/4952	0/4769	0/5099
				MSE	0/0022	0/0016	0/0016	0/0019	0/0021	0/0019	0/0017	0/0017	0/0016	0/0017
			λ	*Avg*	1/6814	1/7924	1/8027	1/6422	1/8579	1/8215	1/8056	1/8013	1/81143	1/8832
				MSE	0/2244	0/1932	0/1466	0/1782	0/1558	0/1225	0/1987	0/1413	0/1655	0/1523
		IS	θ	*Avg*	0/4658	0/4677	0/4623	0/4671	0/4741	0/4756	0/4701	0/4761	0/4711	0/4716
				MSE	0/0015	0/0012	0/0012	0/0015	0/0018	0/0012	0/0012	0/0012	0/0013	0/0013
			λ	*Avg*	1/7812	2/0143	1/7856	1/8944	1/8815	1/8710	1/8214	1/8091	1/8221	1/8098
				MSE	0/0802	0/07125	0/0934	0/0835	0/0897	0/0816	0/0795	0/0702	0/0733	0/0811
	$(0^{14},۵,0^{15})$	*Lindley*		*Avg*	0/4912	0/5211	0/4892	0/4864	0/5151	0/4955	0/5126	0/4979	0/4944	0/5099
				MSE	0/0034	0/0032	0/0033	0/0039	0/0031	0/0034	0/0036	0/0031	0/0033	0/0034
				Avg	1/6012	1/6789	1/7342	1/5938	1/7035	1/6935	1/7781	1/7344	1/7562	1/7212
				MSE	0/1845	0/1826	0/1753	0/1613	0/1501	0/1345	0/1611	0/14215	0/1414	0/1442
		IS		*Avg*	0/4612	0/4618	0/4625	0/4678	0/4722	0/4611	0/4722	0/4531	0/4633	0/4676
				MSE	0/0015	0/0010	0/0010	0/0013	0/0013	0/0012	0/0012	0/0011	0/0011	0/0010

Avg	1/7534	1/8214	1/8554	1/8597	1/8524	1/9412	1/8689	1/9042	1/8765	1/8543
MSE	0/1642	0/1621	0/1613	0/1611	0/1691	0/1765	0/1789	0/1602	0/1765	0/1802

جدول ۹: براوردهای فاصله‌ای مجانبی ۹۵٪ و بازه‌های HPD

T	m	R		$Asymptotic\ confidence$	$HPD\ interval$	
					$NIN\ prior$	$IN\ prior$
3	25	$(10, 0^{24})$	θ	(0/0934,0/5211)	(0/2987.0/4625)	(0/2345,0/4735)
			λ	(1/3733, 2/2854)	(1/5021,2/7034)	(0/4120,1/7765)
			θ	(0/0722,0/3812	(0/2914,0/4621)	(0/2674,0/4835)
			λ	(1/3968,2/2834)	(1/2897,1/9867)	(1/1435,2/1023)
			θ	(0/0912,0/3725)	(0/2912,0/4635)	(0/2734,0/4731)
			λ	(1/3854,2/3851)	(1/2411,2/5136)	(1/0954,2/1435)
			θ	(0/901,0/3721)	(0/2641,0/4658)	(0/2365,0/4862)
			λ	(1/3846,2/2384)	(1/1534,1/8679)	(1/0342,1/9433)
			θ	(0/0910,0/3721)	(0/2014,0/3765)	(0/1735,0/3955)
			λ	(1/4122,2/9546)	(1/3524,2/2368)	(1/1435,2/3425)
			θ	(0/0902,0/3821)	(0/2014,0/3762)	(0/1486,0/3824)
			λ	(1/3924,2/3102)	(1/1862,2/0134)	(1/0123,2/1465)
			θ	(0/0934,0/3815)	(0/2045,0/8395)	(0/1534,0/8729)
			λ	(1/3822,2/3351)	(1/2865,2/1328)	(1/1533,2/3241)
			θ	(0/1011,0/3865)	(0/2045,0/3768)	(0/1635,0/3844)
			λ	(1/3751,2/3124)	(1/4768,2/3105)	(1/2746,2/5241)
			θ	(0/0845,0/3826)	(0/2014,0/3724)	(0/1634,0/3655)
			λ	(1/3861,2/3142)	(0/5014,1/2413)	(0/4211,1/2758)
			θ	(0/0901,0/3716)	(0/2103,0/3311)	(0/1632,0/3965)
			λ	(1/3957,2/3542)	(1/3756,2/1672)	(1/1471,1/9465)
			θ	(0/0912,0/3845)	(0/2031,0/3754)	(0/1834,0/3924)
			λ	(1/3745,2/2981)	(1/3826,2/3177)	(1/1734,2/4177)
			θ	(0/0911,0/3752)	(0/1924,0/3741)	(0/1633,0/3679)
			λ	(1/4012,2/3541)	(1/1435,2/1233)	(1/0112,2/2132)

فهرست منابع

1. Banerjee, A. and Kundu, D. (2008). Inference based on Type-II hybrid censored data from a Weibull distribution. IEEE Transactions on Reliability 57: 369-378.

2. Kundu, D. and Pradhan, B. (2009). Estimating the parameters of the generalized exponential distribution in presence of hybrid censoring. Communications in Statistics-Theory and Methods 38: 2030–2041.

3. Kundu, D. and Howlader, H. (2010). Bayesian inference and prediction of the inverse Weibull distribution for Type-II censored data. Computational Statistics and Data Analysis 54: 1547–1558.

4. Singh, S., Belaghi, R. A. and Asl, M. N. (2019). Estimation and prediction using classical and Bayesian approaches for Burr III model under progressive type-I hybrid censoring. International Journal of System Assurance and Management.

۵. فرنوش رحمان، حاجبی مهتاب، (۱۳۹۵). برآورد نیمه پارامتری کالاهای استراتژیک (قیمت نفت اوپک). پژوهش های نوین در ریاضی، دوره ۲، شماره ۸، ۷۸-۶۷.

6. Basu, A. P. and Klein, J. P. (1982). Some recent results in competing risks theory. Lecture Notes-Monograph Series, 2, 216–229.

7. Cancho, V. G., Louzada-Neto, F., and Barriga, G. D. (2011). The poisson-exponential lifetime distribution. Computational Statistics & Data Analysis 55(1): 677–686.

8 .Epstein, B. (1954) .Estimation truncated life-tests in the exponential case. Ann. Math. Stat. 25(3), 555–564.

9. Childs, A., Chandrasekhar, B., Balakrishnan, N., Kundu, D. (2003) Estimation exact likelihood inference based on type-I and type-II hybrid censored samples from the exponential distribution. Ann. Inst. Stat. Math. 55(2), 319–330

10. Draper, N., Guttman, T. (1987) Estimation Bayesian analysis of hybrid life-test with exponential failure times. Ann. Inst. Stat. Math. 39, 219–255 .

11. Gupta, R.D., Kundu, D. (1998). Estimation Hybrid censoring schemes with exponential failure distribution. Commun. Stat. Theory Methods 27(12), 3065–3083 .

12. Jeong, H.S., Park, J.I., Yum, B.J. (1996) Development of (r; T) hybrid sampling plans for exponential lifetime distributions. J. Appl. Stat. 23, 601–607

13. Fairbanks, K., Madasan, R., Dykstra, R. (1982) .Estimation confdence interval for an exponential parameter from hybrid life-tes. J. Am. Stat. Assoc. 77, 137–140 .

14. Kundu, D., Joarder, A. (2006) Analysis of type-II progressively hybrid censored data. Comput. Stat. Data Anal. 50(10), 2509–2528

15. Dempster, A. P., Laird, N. M. and Rubin, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (methodological): 1–38.

16. Pradhan, B. and Kundu, D. (2009). On progressively censored generalized exponential distribution. Test 18(3): 497–515.

17. Diebolt, J., Celeux, G. (1993) .Asymptotic properties of a stochastic EM algorithm for estimating mixing proportions. Stoch. Models 9(4), 599–613 .

18. Tregouet, D.A., Escolano, S., Tiret, L., Mallet, A., Golmard, J.L. (2004) .A new algorithm for haplotype-based association analysis: the stochastic-EM algorithm. Ann. Hum. Genet. 68(2), 165–177 .

19. Arabi Belaghi, R., Valizadeh Gamchi, F., Bevrani, H., Gurunlu Alma, O. 2016 Estimation on Burr type III by progressive censoring using the EM and SEM algorithms. In: 13th Iranian Statistical Conference, Shahid Bahonar University of Kerman, Iran 24–26.

20. Louzada-Neto, F., Cancho, V. G. and Barriga, G. D. (2011). The poisson-exponential distribution: a bayesian approach. Journal of Applied Statistics 38(6): 1239–1248.

21. Singh, S. K., Singh, U. and Kumar, M. (2016). Bayesian estimation for poisson-exponential model under progressive type-ii censoring data with binomial removal and its application to ovarian cancer data. Communications in Statistics-Simulation and Computation 45(9): 3457–3475.

22. Lindley, D. V. (1980). Approximate bayesian methods. Trabajos de Estadi' stica y de Investigacio'n Operativa 31(1): 223–245.

23. Chen, M.-H. and Shao, Q.-M. (1999). Monte carlo estimation of bayesian credible and hpd intervals. Journal of Computational and Graphical Statistics 8(1): 69–92.

24. Singh, S. and Tripathi, Y. M. (2016). Bayesian estimation and prediction for a hybrid censored lognormal distribution. IEEE Transactions on Reliability 65(2): 782–795.

25. Pepi, J. W. (1994). Failsafe design of an all bk-7 glass aircraft window, SPIE Proc pp. 431-443.

26. Kumar, M., Kumar, S., Singh, S. and Singh, U. (2016). Reliability estimation for PoissonExponential model under progressive type-II censoring data with binomial removal data. Statistica 76(1): 3-26.

27. Jahanshahlooa, Gh-R. Zahedi-Sereshtb, M. (2015). Utilizing Monte Carlo Method for Ranking Extreme Efficient Units in Data Envelopment Analysis. Journal of New Researches in Mathematics 1(1):23-40.