

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال هفتم، شماره سی، خرداد و تیر ۱۴۰۰

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

# یک ساختار نرم-چندگانه روی جبرهای فوریه و فوریه اشتیل یس

مرضیه شمس یوسفی\*

گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۰۵/۱۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۶/۳۱

## چکیده

در این مقاله شرط تجزیه‌پذیری برای گروه‌های موضعاً فشرده را معرفی و یک ساختار نرم-چندگانه بر پایه جبرهای فوریه و فوریه اشتیل یس روی گروه‌های دارای شرط تجزیه‌پذیری ارایه می‌کنیم. نشان می‌دهیم گروه‌های فشرده در این شرط صدق می‌کنند. این ساختار، نتایج شناخته شده در حالت  $L^1$ -جبرهای روی گروه‌های فشرده و آبلی را تعمیم می‌بخشد. در انتها نگاشت‌های چندگانه-کراندار خاصی را روی جبرهای فوریه مطالعه می‌کنیم و برخی نتایج در این نظریه را بهبود می‌بخشیم.

**واژه‌های کلیدی:** فضاهای نرم-چندگانه، جبر فوریه، جبر فوریه اشتیل یس، تجزیه متعامد، خاصیت تجزیه‌پذیری گروه‌های موضعاً فشرده.

## ۱. مقدمه

نظریه نرم-چندگانه و فضاهای نرم-چندگانه مبحث تقریباً جدیدی در آنالیز تابعی است. این نظریه توسط دیلز و پولیاکف معرفی شد. این نظریه، شبیه اما متفاوت با نظریه فضاهای عملگری موجود است. با توجه به این که فضاهای عملگری ارتباط بین فضاهای نرم‌دار و  $L^2$ -فضاها را میسر می‌کنند، نظریه فضاهای نرم-چندگانه برای این طراحی شد که فضاهای نرم‌دار را به  $L_p$ -فضاها، برای  $p \in [1, \infty]$  و به طور خاص به  $L^1$ -فضاها مربوط کند.

تکنیک‌ها و ابزارهای موجود در این نظریه به شکل وسیعی در شناسایی انژکتیو بودن  $L^p(G)$  به عنوان  $L(G)$ -مدول برای یک گروه موضعاً فشرده به کار رفت، [۱] را ببینید. دیلز و همکارانش ثابت کردند که  $L^p(G)$  به عنوان  $L(G)$ -مدول چپ باناخ انژکتیو است اگر و تنها اگر  $G$  میانگین‌پذیر باشد. نویسندگان در خلال برهان‌ها، از مبحث نرم چندگانه بهره جستند و این نظریه را توسعه دادند. رامسدن در رساله دکتری خویش، ساختاری را که فضاهای نرم-چندگانه  $p$ -گونه خوانده می‌شود، برای  $1 \leq p \leq \infty$  معرفی کرد [۲ و ۳]. معرفی وی ساختار دیلز و پولیاکف را تعمیم می‌بخشد. از این نظریه برای تعریف جدیدی از میانگین‌پذیری که  $(1, p)$  میانگین‌پذیری گروه‌های موضعاً فشرده نامیده می‌شود، بهره گرفته شده است [۴].

نظریه نرم-چندگانه برای بررسی رفتارهای همانستگی مدول‌ها روی جبرهای گروهی مناسب است. افق هندسه فضاهای باناخ نوری در نظریه عملگرهای به طور مطلق جمعی پرتاب می‌کند و به نتایجی در مورد شبکه‌های باناخ و تجزیه فضاهای باناخ منجر می‌شود.

تکنیک تجزیه فضاهای باناخ مهم‌ترین ابزار این مقاله است.

دیلز و پولیاکف ساختار نرم-چندگانه  $L^1$ -فضاها را

ارایه دادند. [۴] را ببینید، که در بخش ۲.۱ به آن می‌پردازیم. ساختار نرم-چندگانه‌های متعددی روی  $L^1$ -فضاها موجود است. علاوه بر این، ایشان ثابت کردند که قضیه نمایش عام برای فضاهای نرم چندگانه موجود است، که نشان می‌دهد نرم چندگانه از نوع  $L^1$ ، ساختار جامع برای همه فضاهای نرم-چندگانه است.

در این مقاله به جبرهای گروهی  $L^1(G)$ ، جبرهای فوریه  $A(G)$  و فوریه اشتیل یس  $B(G)$  روی گروه موضعاً فشرده  $G$  می‌پردازیم. جبر فوریه  $A(G)$  برای گروه موضعاً فشرده  $G$  توسط ایمارد معرفی شده است [۵]. برای گروه موضعاً فشرده آبلی  $G$  تبدیل فوریه یکرختی طولپایی از  $L^1(G)$  به روی  $A(\widehat{G})$ ، که در آن  $\widehat{G}$  دوگان پونتریاگین  $G$  است، فراهم می‌کند. جبر گروهی دیگر، جبر فوریه اشتیل یس است که برای گروه موضعاً فشرده آبلی  $G$  تبدیل فوریه اشتیل یس آن را به صورت طولپا با  $M(\widehat{G})$ ، جبر اندازه‌های مختلط منظم بول روی  $\widehat{G}$ ، یکرخت می‌کند. در این مقاله، برای گروه‌های موضعا فشرده خاصی، ساختار نرم-چندگانه‌ای روی  $A(G)$  و  $B(G)$  معرفی می‌کنیم که در حالت گروه‌های آبلی بر ساختار نرم-چندگانه استاندارد  $L^1(\widehat{G})$  و  $M(\widehat{G})$  منطبق است. مقاله حاضر به صورت زیر سازمان یافته است. در بخش ۱ و زیربخش‌های آن مروری بر نظریه نرم چندگانه و برخی نتایج شناخته‌شده آن انجام خواهیم داد. در بخش ۲ شرط تجزیه‌پذیری گروه‌های موضعاً فشرده را معرفی می‌کنیم. نشان می‌دهیم اگر  $G$  دارای این خاصیت باشد، آن گاه  $B(G)$  و لذا  $A(G)$  دارای ساختار نرم چندگانه‌ای است که حالت آبلی را تعمیم می‌دهد. ثابت خواهیم کرد گروه‌های فشرده دارای این خاصیت هستند و در بخش ۳ نگاشت‌های چندگانه کراندار روی جبرهای فوریه به طور مختصر مطالعه خواهد شد.

### ۱.۱. فضاهای نرم-چندگانه

در این بخش به ارایه تعریف و برخی خواص کلی فضاهای نرم-چندگانه می‌پردازیم. در نمادگذاری و علائم از [۴] پیروی می‌کنیم.

**تعریف ۱.۱.** فرض می‌کنیم  $E$  یک فضای برداری باشد و  $n \in \mathbb{N}$ . منظور از  $E^n$  فضای برداری  $E \times \dots \times E$  است. برای جایگشت  $\sigma$  از  $n$  نماد  $(\sigma \in S_n)$  تعریف می‌کنیم

$$A_\sigma(x) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$$

برای  $\alpha = (\alpha_i) \in \mathbb{C}^n$  تعریف می‌کنیم

$$M_\alpha(x) = (\alpha_i x_i), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$$

مجموعه  $\{1, \dots, n\}$  را با  $\mathbb{N}_n$  نشان می‌دهیم.

**تعریف ۱.۲.** فرض کنید  $(E, \|\cdot\|)$  یک فضای نرم‌دار باشد و  $n \in \mathbb{N}$ . یک نرم-چندگانه از مرتبه  $n$  روی  $\{E^k : k \in \mathbb{N}\}$  عبارت است از یک دنباله

$$(\|\cdot\|_k) = (\|\cdot\|_k : k \in \mathbb{N}_n)$$

به طوری که برای هر  $k \in \mathbb{N}_n$  روی  $E^k$  یک نرم باشد و برای هر  $x \in E$   $\|x\|_1 = \|x\|$  و شرایط (۱) تا (۴) ذیل روی هر  $k \in \mathbb{N}_n$  و  $n \geq 2$  برقرار باشد.

$$(۱) \quad \text{برای هر } x \in E^k \text{ و } \sigma \in S_k \text{ داریم}$$

$$(۲) \quad \text{برای اعداد مختلط } \alpha_k, \dots, \alpha_1 \text{ و } x \in E^k \text{ داریم}$$

$$\|M_\alpha(x)\|_k \leq \left( \max_{i \in \mathbb{N}_k} |\alpha_i| \right) \|x\|_k$$

$$(۳) \quad \text{برای هر } x_k, \dots, x_1 \text{ از } E \text{ داریم}$$

$$\|(x_1, \dots, x_{k-1}, 0)\|_k = \|(x_1, \dots, x_{k-1})\|_{k-1}$$

$$(۴) \quad \text{برای هر } x_k, \dots, x_1 \text{ از } E \text{ داریم}$$

$$\|(x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k)\|_k =$$

$$\|(x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1})\|_{k-1}$$

در این حالت، می‌گوییم  $(\|\cdot\|_k : k \in \mathbb{N}_n)$  یک فضای نرم-چندگانه از مرتبه  $n$  است. یک نرم چندگانه روی  $\{E^k : k \in \mathbb{N}\}$  یک دنباله  $(\|\cdot\|_k : k \in \mathbb{N})$  است، به طوری که برای هر  $(\|\cdot\|_k : k \in \mathbb{N}_n), n \in \mathbb{N}$  یک نرم-چندگانه از مرتبه  $n$  باشد. در این حالت می‌گوییم که  $(\|\cdot\|_n : n \in \mathbb{N})$  یک فضای نرم-چندگانه است.

فرض کنیم  $E$  و  $F$  فضاهای نرم-چندگانه و  $T: E \rightarrow F$  یک نگاشت خطی باشد. در این صورت

$$T^{(n)}: E^n \rightarrow F^n,$$

$$T^n(x_1, \dots, x_n) = (T(x_1), \dots, T(x_n))$$

$n$ -امین بسط  $T$  است.

**تعریف ۱.۳.** برای فضاهای نرم-چندگانه  $E$  و  $F$ ، نگاشت خطی  $T: E \rightarrow F$  چندگانه-کراندار خوانده می‌شود، هرگاه

$$\|T\|_{mb} := \sup_{n \geq 1} \|T^{(n)}\| < \infty.$$

اگر  $\|T\|_{mb} \leq 1$  می‌گوییم  $T$  چندگانه-انقباضی و اگر برای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $T^{(n)}$  طولپایی باشد، می‌گوییم  $T$  چندگانه-طولپایی است.

همچنین فضاهای نرم‌دار-چندگانه به وسیله یک نرم روی یک فضای ضرب تانسوری نیز شناسایی می‌شوند. از قضیه ذیل به طور مستقیم در این مقاله استفاده نمی‌کنیم، اما برای ذکر در اینجا به قدر کافی زیباست.

که در آن برای  $i = 1, \dots, k$ ،  $x_i \in E_i$  و  $p_i$  تصویر طبیعی از  $E$  به روی  $E_i$  است.

**تعریف ۱.۷.** فرض کنیم  $(E, \|\cdot\|)$  یک فضای نرم‌دار و  $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$  یک تجزیه جمع مستقیم از  $E$  باشد. در این صورت تجزیه را هریتی می‌نامیم، اگر برای هر  $i = 1, \dots, n$ ،  $|\eta_i| \leq 1$  و  $x_i \in E$  داشته باشیم

$$\|\eta_1 x_1 + \dots + \eta_k x_k\| \leq \|x_1 + \dots + x_k\|.$$

**تعریف ۱.۸.** فرض کنیم  $(E, \|\cdot\|)$  یک فضای نرم‌دار باشد. خانواده‌ی  $\mathfrak{R}$  از تجزیه‌های جمع مستقیم  $E$  را در نظر بگیرید. خانواده  $\mathfrak{R}$  بسته نامیده می‌شود، هرگاه شرایط ذیل برای هر  $n \in \mathbb{N}$  برقرار باشد:

- برای  $\sigma \in S_n$  و  $E_1 \oplus \dots \oplus E_k$  داشته باشیم،  $E_{\sigma(1)} \oplus \dots \oplus E_{\sigma(n)} \in \mathfrak{R}$

- برای  $n \geq 3$  و  $F = F_1 \oplus F_2$  داشته باشیم،  $E_1 \oplus \dots \oplus E_n \in \mathfrak{R}$  و  $F \oplus E_3 \oplus \dots \oplus E_n \in \mathfrak{R}$

- $\mathfrak{R}$  شامل تمامی تجزیه‌های بدیهی باشد. تجزیه‌ی بدیهی نامیده می‌شود، هرگاه برای یک  $E = E_j$ ،  $j \in \mathbb{N}_k$

خواننده علاقه‌مند می‌تواند اطلاعات کامل‌تری را در مورد مبحث تعامد در [۴] بیابد.

یک قضیه نمایش عام برای فضاهای نرم‌دار چندگانه موجود است. این قضیه نشان می‌دهد ساختار نرم چندگانه شبکه‌ای، که در [۲] تشریح شده است، دارای خاصیت جامع است.

**قضیه ۱.۹.** [قضیه ۳.۹ و ۶] فرض کنیم  $(E^n, \|\cdot\|_n): n \in \mathbb{N}$  یک فضای نرم‌دار چندگانه باشد. در این صورت فضای باناخ شبکه‌ای  $X$  و

**قضیه ۱.۴.** [قضیه ۶:۳.۴] فرض کنیم  $E$  یک فضای نرم‌دار باشد. در این صورت یک تناظر دوسویی بین خانواده نرم‌های چندگانه روی  $E$  و خانواده  $C_0$ -نرم‌های روی  $C_0 \otimes E$  برقرار است. فرض کنیم  $((E^n, \|\cdot\|_n): n \in \mathbb{N})$  یک فضای نرم‌دار چندگانه،  $k \in \mathbb{N}$  و  $\{E_1, \dots, E_k\}$  یک خانواده از زیرفضاهای بسته  $E$  باشد. در این صورت  $\{E_1, \dots, E_k\}$  یک خانواده متعامد در  $E$  نامیده می‌شود، هرگاه برای هر افراز  $S_1, \dots, S_j$  از  $\mathbb{N}_k$  از مجموعه‌های متناهی داشته باشیم

$$\|(x_1, \dots, x_k)\|_k = \|(y_1, \dots, y_k)\|_j$$

$$x_1 \in E_1, \dots, x_k \in E_k$$

که در آن برای  $i \in \mathbb{N}_j$ ،  $y_i = \sum_{r \in S_i} \{x_r\}$ ، مجموعه  $\{x_1, \dots, x_k\}$  از اعضای  $E$  متعامد نامیده می‌شود، هرگاه خانواده  $\{Cx_1, \dots, Cx_k\}$  از زیرفضاهای یک خانواده متعامد در  $E$  باشد.

**تعریف ۱.۵.** فرض کنیم  $((E^n, \|\cdot\|_n): n \in \mathbb{N})$  یک فضای نرم‌دار چندگانه،  $k \in \mathbb{N}$  و  $\{E_1, \dots, E_k\}$  یک خانواده از زیرفضاهای خطی بسته  $E$  باشند، به طوری که  $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$  یک تجزیه به صورت جمع مستقیم باشد. در این صورت تجزیه را یک تجزیه متعامد می‌نامیم، هرگاه  $\{E_1, \dots, E_k\}$  یک خانواده متعامد باشند.

**تعریف ۱.۶.** فرض کنیم  $((E^n, \|\cdot\|_n): n \in \mathbb{N})$  یک فضای نرم‌دار چندگانه و  $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$  یک تجزیه جمع مستقیم از  $E$  باشد. در این صورت تجزیه را کوچک می‌نامیم، هرگاه

$$\|p_1 x_1, \dots, p_k x_k\| \leq \|(x_1, \dots, x_k)\|_k,$$

### ۲.۱. ساختار نرم-چندگانه

فرض کنید  $(\Omega, \mu)$  یک فضای اندازه باشد. ساختار نرم-چندگانه شناخته شده‌ای برای  $L^1(\Omega)$  موجود است. در ادامه به آن اشاره می‌کنیم. برای زیرمجموعه اندازه‌پذیر  $X$  از  $\Omega$ ، نیم‌نرم  $r_X$  روی  $L^1(\Omega)$  را به صورت

$$r_X(f) = \int_X |f|$$

در نظر می‌گیریم. برای  $n \in \mathbb{N}$  و افراز  $X = \{X_1, \dots, X_n\}$  از زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر  $\Omega$  و  $f_i \in L^1(\Omega)$  به ازای  $i = 1, \dots, n$  قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} r_X((f_1, \dots, f_n)) &= r_{X_1}(f_1) + \dots + r_{X_n}(f_n) \\ &= \int_{X_1} |f_1| + \dots + \int_{X_n} |f_n| \end{aligned}$$

و در نهایت تعریف می‌کنیم

$$\|(f_1, \dots, f_n)\|_n = \sup_X r_X((f_1, \dots, f_n)),$$

که در آن سوپریمم روی همه افرازه‌های اندازه‌پذیر از  $X$  گرفته می‌شود. این تعریف ساختار نرم-چندگانه استاندارد  $L^1(\Omega)$  نامیده می‌شود.

حال برای  $(f_1, \dots, f_n)$  در  $A(G)^n$  اعضای  $g_1, \dots, g_n$  در  $L^1(\widehat{G})$  را به گونه‌ای می‌یابیم که برای  $i = 1, \dots, n$ ،  $f_i = \widehat{g}_i$ . در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\|(f_1, \dots, f_n)\|_n^{A(G)} := \|(g_1, \dots, g_n)\|_n.$$

با این تعریف  $A(G)$  نیز یک فضای نرم‌دار-چندگانه خواهد بود.

برای تعریف  $A(G)$  و  $B(G)$  درحالی‌که  $G$  یک گروه موضعاً فشرده دلخواه است، [۷] را ببینید.

یک نگاشت نشانند  $J: E \rightarrow X$  چنان موجود است که برای هر  $n \in \mathbb{N}$  داریم

$$\|(Jx_1, \dots, Jx_n)\|_n^L = \|(x_1, \dots, x_n)\|_n,$$

که در آن  $\|(\cdot)\|_n^L$  نمایشگر نرم-چندگانه مشبکه‌ای روی  $X$  است.

### ۲. جبر فوریه و نرم-چندگانه

فرض کنیم  $G$  یک گروه موضعاً فشرده باشد. جبرهای فوریه به نوعی صورت غیر جابجایی  $L^1$ -جبرها هستند. در این بخش به مطالعه جبرهای فوریه از منظرگاه فضاهای نرم‌دار-چندگانه علاقه‌مندیم، به نوعی که نتایج شناخته شده حالت آبلی را تعمیم بخشیم. فرض کنیم  $G$  یک گروه موضعاً فشرده آبلی و  $\widehat{G}$  دوگان پونتریاگین آن باشد. تبدیل گلفند روی  $L^1(\widehat{G})$  را در نظر بگیرید  $\widehat{\cdot}: L^1(\widehat{G}) \rightarrow C_0(G)$ ،  $f \rightarrow \widehat{f}(a) = \int \delta(\xi) \overline{\xi(a)} d\xi$ .

این نگاشت که تبدیل فوریه خوانده می‌شود، نگاشتی یک‌به‌یک و با برد چگال است. تصویر تبدیل فوریه را در نظر بگیرید

$$\{\widehat{f} : f \in L^1(\widehat{G})\}$$

تعریف کنید

$$\|\widehat{f}\| := \|f\|_{L^1(\widehat{G})}.$$

با این نرم تصویر تبدیل فوریه یک فضای باناخ است. بررسی این که این فضا با ضرب نقطه‌ای و نرم بالا یک جبر باناخ است، راحت است. این جبر باناخ، جبر فوریه نامیده و با  $A(G)$  نمایش داده می‌شود. به زودی تعریف  $A(G)$  برای گروه موضعاً فشرده غیرآبلی را نیز یادآوری خواهیم کرد.

کامل‌سازی  $L^1(G)/N_{\Sigma_1}$  با این نرم را با  $C_{\Sigma_1}^*(G)$  نمایش می‌دهیم. برای  $\Sigma_1 = \Sigma_G$  این کامل‌سازی با  $C^*(G)$  نمایش داده می‌شود که  $C^*$ -جبر گروهی پر روی گروه موضعاً فشرده  $G$  نامیده می‌شود. بنا بر  $[7]$  فضای باناخ  $B_{\Sigma_1}(G)$  را دوگان  $C_{\Sigma_1}^*(G)$  تعریف می‌کنیم و برای  $u \in B_{\Sigma_1}(G)$  داریم

$$\|u\|_{B_{\Sigma_1}(G)} = \sup_{f \in L^1(G), \|f\|_{\Sigma_1} \leq 1} |f(x)u(x)dx|.$$

برای هر زیرمجموعه  $\Sigma_G \supseteq \Sigma_1$ ،  $\mathcal{N}'_{\Sigma_1}$  را اشتراک هسته همه نمایش‌های  $\pi$  در  $\Sigma_1$  در  $C^*(G)$  معرفی می‌کنیم. در این صورت بنا بر [گزاره ۱، ۱۵؛  $[7]$  \* -همریختی پوشای

$$\varphi : C^*(G) \rightarrow C_{\Sigma_1}^*(G), \quad f \mapsto \dot{f},$$

با هسته  $\mathcal{N}'_{\Sigma_1}$  موجود است.

حال فرض می‌کنیم  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$  اعضای یک افزاز از  $\Sigma_G$  باشد.  $C^*$ -جبرهای  $C_{\Sigma_1}^*(G), \dots$  و  $C_{\Sigma_n}^*(G)$  را در نظر بگیرید.

در این صورت بنا بر تساوی  $\mathcal{N}_{\Sigma_i \cap \Sigma_j} = \mathcal{N}_{\Sigma_i} \cap \mathcal{N}_{\Sigma_j}$  برای زیرمجموعه‌های  $\Sigma_i$  و  $\Sigma_j$  از  $\Sigma_G$ ، نگاشت نشان‌دهنده طبیعی زیر را داریم

$$C^*(G) \rightarrow c_0 - \bigoplus_{i=1}^n C_{\Sigma_i}^*(G).$$

زیرمجموعه‌های  $\varphi$  و  $\psi$  از  $\Sigma_G$  را هم‌تراز می‌نامیم هرگاه  $\mathcal{N}'_{\psi} = \mathcal{N}'_{\varphi}$ . در این صورت برای هر  $f \in L^1(G)$  داریم  $\|f\|_{\varphi} = \|f\|_{\psi}$  و  $C_{\varphi}^*(G)$  و  $C_{\psi}^*(G)$  با هم یکرخت هستند [7].

بنابر [۱، ۲۴؛ 7] برای هر  $\varphi \subseteq \Sigma_G$  زیرمجموعه

در ادامه در حالتی خاص ساختار نرم-چندگانه را برای جبرهای فوریه و فوریه-اشتیل‌یس در حالت کلی ارایه می‌کنیم.

فرض می‌کنیم  $G$  یک گروه موضعاً فشرده دلخواه باشد.  $\Sigma_G$  را مجموعه همه (کلاس‌های هم‌ارزی) نمایش‌های یکانی پیوسته از گروه  $G$  در نظر بگیرید. برای هر  $\pi \in \Sigma_G$ ،  $\mathcal{H}_{\pi}$  نمایشگر فضای هیلبرت متناظر  $\pi$  است. هر نمایش یکانی

$$\pi : G \rightarrow B(\mathcal{H}_{\pi})$$

یک نمایش ناتبه‌گون روی  $L^1(G)$  با تعریف

$$f \rightarrow \int f(x)\pi(x)dx,$$

القاء می‌کند. سمت راست انتگرال بوختر به معنای ضعیف است.

حال برای هر مجموعه  $\Sigma_G \supseteq \Sigma_1$  تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_{\Sigma_1} := \sup_{\pi \in \Sigma_1} \|\pi(f)\|$$

که در آن  $\|\pi(f)\|$  نمایشگر نرم عملگری  $\pi(f)$  در  $\beta(\mathcal{H}_{\pi})$  است. نگاشت  $f \rightarrow \|f\|_{\Sigma_1}$  یک نیم‌نرم

روی فضای برداری  $L^1(G)$  است. منظور از  $N_{\Sigma_1}$  همه توابع  $f$  در  $L^1(G)$  است به طوری که برای هر  $\pi \in \Sigma_1$  داشته باشیم  $\pi(f) = 0$ . حال برای هر

$$f \in L^1(G)/N_{\Sigma_1}$$

$$\|\dot{f}\| := \|f\|_{\Sigma_1} \quad f \in L^1(G)$$

که در آن  $\dot{f}$  نمایشگر کلاس  $f \in L^1(G)$  در  $L^1(G)/N_{\Sigma_1}$  است. از [7] می‌دانیم این نرم در شرط نرم  $C^*$  جبری صادق است.

بسته از تجزیه‌های هرمیتی  $E$  باشد. برای  $n \in \mathbb{N}$  و  $x_1, \dots, x_n \in E$  قرار می‌دهیم

$$\|x_1, \dots, x_n\|_n = \sup_{a \in A} \{ \|p_{1,\alpha}x_1 + \dots + p_{n,\alpha}x_n\|; n_a = n \}.$$

در این صورت  $((E^n, \|\cdot\|_n): n \in \mathbb{N})$  یک فضای نرم‌دار-چندگانه است و هر عضو  $K$  نسبت به این نرم-چندگانه یک تجزیه متعامد از  $E$  است. بنا بر قضیه بالا، اگر گروه موضعاً فشرده  $G$  دارای خاصیت تجزیه‌پذیری باشد، با تعریفی که پیش از این ارائه شد  $((B(G)^n, \|\cdot\|_n), n \in \mathbb{N})$  یک فضای نرم‌دار-چندگانه است و هر تجزیه معرفی‌شده نسبت به این نرم-چندگانه یک تجزیه متعامد از  $B(G)$  است. این ساختار نرم-چندگانه را ساختار استاندارد می‌نامیم. از آنجا که  $A(G)$  زیرفضای (ایده‌آل) بسته  $B(G)$  است. می‌توان این ساختار را بر  $A(G)$  نیز القاء نمود [۴].

با استدلال مشابهی اگر  $G$  دارای خاصیت تجزیه‌پذیری وابسته به  $\hat{G} \subseteq \varphi$  داشته باشد، آن گاه فضای باناخ  $B_\varphi(G)$  دارای ساختار نرم-چندگانه استاندارد خواهد بود.

**قضیه ۲.۳.** فرض کنیم  $G$  یک گروه موضعاً فشرده باشد. در این صورت  $G$  دارای خاصیت تجزیه‌پذیری است، اگر و تنها اگر برای هر  $\varphi \subseteq \hat{G}$ ، گروه  $G$  خاصیت تجزیه‌پذیری وابسته به  $\varphi$  داشته باشد.

**برهان:** کفایت واضح است. برای اثبات لزوم، فرض کنیم  $G$  دارای خاصیت تجزیه‌پذیری و  $\varphi \subseteq \hat{G}$  و  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$  اعضای یک افراز از  $\hat{G}$  باشد. بنا بر فرض

$$C^*(G) \cong c_0 - \bigoplus_{i=1}^n C_{\Sigma_i}^*(G).$$

بسته یکتایی از  $\hat{G}$  (نمایش‌های تحویل‌ناپذیر یکنانی از گروه  $(G)$  چنان موجود است که با هم‌تراز است و همچنین  $C^*(G) = C_{\hat{G}}^*(G)$ ).

**تعریف ۲.۱.** الف) گوییم گروه  $G$  خاصیت تجزیه‌پذیری دارد هرگاه برای هر افراز دلخواه  $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\}$  از  $\hat{G}$  داشته باشیم

$$C^*(G) \cong c_0 - \bigoplus_{i=1}^n C_{\Sigma_i}^*(G).$$

ب) گوییم گروه  $G$  خاصیت تجزیه‌پذیری وابسته به  $\hat{G} \subseteq \varphi$  دارد هرگاه برای هر افراز دلخواه  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  از  $\varphi$  داشته باشیم

$$C_\varphi^*(G) \cong c_0 - \bigoplus_{i=1}^n C_{\varphi_i}^*(G).$$

در این حالت فرض می‌کنیم  $u_1, \dots, u_n$  در  $B(G)$  و  $p_i$  تصویر پوشای  $B(G)$  به روی  $B_{\Sigma_i}(G)$  برای  $i = 1, \dots, n$  باشد.

تعریف می‌کنیم

$$\|(u_1, \dots, u_n)\|_n = \sup \|p_1 u_1 + \dots + p_n u_n\|_{B(G)},$$

که در آن سوپریمم روی همه افرازهای بسته از  $\hat{G}$  صورت می‌گیرد.

بررسی این که این تجزیه جمع مستقیم از  $B(G)$  هرمیتی است، آسان است. قضیه ذیل نشان می‌دهد این خانواده از نرم‌ها یک ساختار نرم-چندگانه روی  $B(G)$  تعریف می‌کند.

**قضیه ۲.۲.** [قضیه ۴.۷ : ۴] فرض کنیم

$$(E; \|\cdot\|) \text{ یک فضای نرم‌دار و } K = \{ \{E_{1,\alpha}, \dots, E_{n,\alpha}\} : \alpha \in A \}$$

صورت بنا بر [۵]،  $\mu_1, \dots, \mu_n$  در  $M(\hat{G})$  چنان موجودند که برای  $i \in \mathbb{N}_n$  داریم  $u_i = \hat{\mu}_i$ . حال داریم

$$\begin{aligned} r_{X_1, \dots, X_n}(u_1, \dots, u_n) &= \\ \sup_{f \in L^1(G), \|f|_{X_1}\| \leq 1} |\int p_1(u_1)f| + \dots + \\ \sup_{f \in L^1(G), \|f|_{X_n}\| \leq 1} |\int p_n(u_n)f| &= \\ \sup_{f \in L^1(G), \|f|_{X_1}\| \leq 1} \left| \int \hat{f} d\mu_{p_1(u_1)} \right| + \dots + \\ \sup_{f \in L^1(G), \|f|_{X_n}\| \leq 1} \left| \int \hat{f} d\mu_{p_n(u_n)} \right| &= \\ \left\| \mu_{p_1(u_1)}|_{X_1} \right\|_{\mu(x_1)} + \dots + \\ \left\| \mu_{p_n(u_n)}|_{X_n} \right\|_{\mu(x_n)} \end{aligned}$$

بنابراین یک طولپایی-چندگانه بین این دو ساختار در این حالت وجود دارد. همچنین در این حالت به دلیل گسسته بودن  $\hat{G}$  از اندازه‌پذیری افزاها که در تعریف ساختار نرم-چندگانه دارای اهمیت است، مطمئن هستیم.

**قضیه ۲.۵.** گروه‌های فشرده خاصیت تجزیه‌پذیری دارند.

**برهان:** فرض کنیم  $G$  یک گروه فشرده باشد در این صورت همه نمایش‌های تحویل‌ناپذیر  $G$  از بعد متناهی هستند. فرض کنیم  $\pi \in \hat{G}$  از بعد  $n_\pi$  باشد. در این صورت  $\pi(G)$  و  $\pi(L^1(G))$  دارای بستار عملگری ضعیف یکسان در  $M_{n_\pi}$  هستند. همچنین بنا بر قضیه پیتروایل بسط خطی  $\pi(G)$  با  $M_{n_\pi}$  یکسان است. دلیل این حقیقت را در ذیل ارائه می‌کنیم.

برای نمایش یکانی  $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$  از گروه موضوعاً فشرده  $G$  و  $u, v \in \mathcal{H}_\pi$  تابع  $\Phi_{u,v}(x) = \langle \pi(x)u, v \rangle$  تابع  $\pi$  خوانده می‌شود. فضای خطی تولیدشده توسط توابع اعضای ماتریسی نمایش  $\pi$  را با  $\mathcal{E}_\pi$  نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم  $\mathcal{E} = \bigcup_{[\pi] \in \hat{G}} \mathcal{E}_\pi$ . بنا بر قضیه پیتروایل

حال با اعمال خارج قسمت بر طرفین خواهیم داشت

$$\begin{aligned} C_\varphi^*(G) &\cong_{\text{iso}} \frac{C_0 - \bigoplus_{i=1}^n C_{\Sigma_i}^*(G)}{\mathcal{N}'_\varphi} \cong_{\text{iso}} \frac{C_0 - \bigoplus_{i=1}^n C_{\Sigma_i \cap \varphi}^*(G)}{\mathcal{N}'_{\Sigma_i \cap \varphi}} \\ &\cong_{\text{iso}} C_0 - \bigoplus_{i=1}^n C_{\Sigma_i \cap \varphi}^*(G) \end{aligned}$$

و برهان کامل می‌شود.

**قضیه ۲.۴.** فرض کنیم  $G$  یک گروه موضوعاً فشرده و  $H$  یک زیرگروه نرمال و بسته آن باشد. اگر  $B(G)$  دارای ساختار نرم-چندگانه استاندارد باشد، آن گاه  $B(G/H)$  نیز چنین است.

برهان. همریختی طبیعی پیوسته و پوشای  $\sigma : G \rightarrow G/H$  را در نظر بگیرید. در این صورت بنا بر [نتیجه ۳ و ۲۶ و ۲؛ ۷]، برای هر  $\varphi \subseteq \widehat{G/H}$  نگاشت  $u \rightarrow u \circ \sigma$  یک یکرختی طولپا از  $B_\varphi(G/H)$  به  $B_{\varphi \circ \sigma}(G)$  القاء می‌کند، که در آن  $\varphi \circ \sigma$  مجموعه همه  $\pi \circ \sigma$ ها به ازای  $\pi \in \varphi$  است. حال بنا بر قضیه ۲.۳ برهان کامل است.

بررسی این که همه گروه‌های آبلی فشرده دارای خاصیت تجزیه‌پذیری هستند، آسان است؛ زیرا بنا بر [۶] برای گروه فشرده و آبلی  $G$  با گروه دوگان پونتریاگین گسسته  $\hat{G}$  و  $\varphi \subseteq \hat{G}$  داریم

$$C_\varphi^*(G) \cong_{\text{iso}} C_0(\bar{\varphi}) \cong_{\text{iso}} C_0(\varphi).$$

مایلیم ساختار معرفی‌شده در بالا برای  $A(G)$  را در حالت گروه آبلی برای  $L^1$ -جبرهای متناظر بررسی کنیم. فرض کنیم  $G$  یک گروه فشرده و آبلی و  $u_1, \dots, u_n$  در  $B(G)$  باشند و فرض کنیم  $\{X_1, \dots, X_n\}$  یک افزاز از  $\hat{G}$  باشد. در این



یکریختی آخر به این دلیل است که ضریب تأثیری در نرم  $c_0$  ندارد. حال برای هر افزایش دلخواه  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  از  $\widehat{G}$  داریم

$$C^*(G) \underset{iso}{\cong} \bigoplus_{\pi \in \widehat{G}} M_{n_\pi} \underset{iso}{\cong} C^*_{\mathcal{A}}(G) \oplus \dots \oplus C^*_{\varphi_n}(G).$$

**مثال ۲.۶.** فرض کنیم  $G$  یک گروه موضعاً فشرده و دارای خاصیت تجزیه‌پذیری و  $H$  یک زیرگروه بسته و نرمال آن باشد به نحوی که  $G/H$  یک گروه فشرده باشد (به عنوان مثال گروه‌های مرکزی از این دسته اند). با در نظر گرفتن هم‌ریختی طبیعی پوشای  $\sigma: G \rightarrow G/H$  و با استفاده از [نتیجه ۳ و ۲، ۲۶ و ۷]، برای هر  $\varphi \subseteq \Sigma_{G/H}$  نگاشت  $u \rightarrow u \circ \sigma$  یکریختی طولپای از  $B_\varphi(G/H)$  به  $B_{\varphi \circ \sigma}(G)$  را القاء می‌کند.

حال فرض کنیم  $\{\Sigma_n, \dots, \Sigma_1\}$  یک افزایش از  $G/H$  باشد، در این صورت

$$\begin{aligned} B_{\widehat{G/H} \circ \sigma}(G) &\cong B(G/H) \\ &\cong \ell^1 - \bigoplus_{i=1}^{\widehat{\infty}} B_{\Sigma_i}(G/H) \\ &\cong \ell^1 - \bigoplus_{i=1} B_{\Sigma_{i \circ \sigma}}(G) \end{aligned}$$

در این حالت  $G$  دارای خاصیت تجزیه‌پذیری وابسته به  $\widehat{G/H} \circ \sigma$  است و بنابراین  $B_{\widehat{G/H} \circ \sigma}(G)$  دارای ساختار نرم-چندگانه است.

**قضیه ۲.۷.** فرض کنیم  $G$  دارای خاصیت تجزیه‌پذیری و  $x_1, \dots, x_n$  اعضای  $A(G)$  باشد. همچنین فرض کنیم  $(\|\cdot\|_n, n \in \mathbb{N})$  و  $(\|\cdot\|_n^{\max}, n \in \mathbb{N})$  به ترتیب نمایشگر نرم-چندگانه استاندارد و ماکسیمم بر پایه  $A(G)$  باشند.

وایل، [قضیه ۵، ۱۲؛ ۷]، می‌دانیم اگر  $G$  فشرده باشد، آن گاه  $\mathcal{E}$  یک  $*$ -زیرجبر  $C(G)$  است که برای  $1 \leq p < \infty$  در  $L^p(G)$  چگال است. همچنین در این حالت بنا بر قضیه تعامدی شور [قضیه ۵، ۸؛ ۵]، برای هر دو نمایش غیر هم‌ارز  $\pi$  و  $\pi'$  در  $\widehat{G}$  با ضرب داخلی القائی از  $L^2(G)$ ،  $\mathcal{E}_{\pi'}$  و  $\mathcal{E}_\pi$  متعامد هستند.

می‌دانیم  $\|\pi(\mathcal{E})\| = \overline{\pi(L^1(G))} = \overline{C_\pi^*(G)}$  که در آن بستار در نرم فضای عملگری متناظر نمایش  $\pi$ ،  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$  گرفته می‌شود. چون  $\pi$  تحویل‌ناپذیر است پس جابجا گر آن ضریب ثابتی از عملگر همانی است و لذا جابجاگر دوم آن  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$  است. اما  $\pi$  از بعد متناهی است، لذا بردش با توپولوژی عملگری ضعیف و لذا با توپولوژی نرم بسته است. بنابراین داریم:

$$C_\pi^*(G) \underset{iso}{\cong} \pi(L^1(G)) \underset{iso}{\cong} M_{n_\pi}.$$

همچنین اگر  $\pi_1$  و ... و  $\pi_n$  نمایش‌های یکانی دلخواه باشند، آن گاه برای  $\pi = \pi_1 \oplus \dots \oplus \pi_n$  داریم  $\mathcal{E}_\pi = \sum_{j=1}^n \mathcal{E}_{\pi_j}$  و مجموع بالا لزوماً مستقیم نیست. بنابراین در این حالت مشابه استدلال بالا، اگر عدد تکرار نمایش تحویل‌ناپذیر  $\pi_0$  برابر با  $k_{\pi_0}$  باشد، آن گاه  $C_{\pi_0}^*(G)$  با  $k_{\pi_0} M_{n_{\pi_0}}$  یکریخت خواهد بود که در آن منظور از  $k_{\pi_0} M_{n_{\pi_0}}$  عبارت است از همه ماتریس‌های به فرم  $T \oplus \dots \oplus T$  برای  $T \in M_{n_{\pi_0}}$ . حال فرض کنیم  $\varphi \subset \widehat{G}$  در این صورت

$$\begin{aligned} C_\varphi^*(G) &\underset{iso}{\cong} \bigoplus_{\pi \in \varphi} \pi(L^1(G)) \\ &\underset{iso}{\cong} \bigoplus_{\pi \in \varphi} k_\pi \pi(L^1(G)) \\ &\underset{iso}{\cong} \bigoplus_{\pi \in \varphi} M_{n_\pi}. \end{aligned}$$

در این صورت

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_n = \sup \|(p_1(x_1), \dots, p_n(x_n))\|_n^{\max}$$

که در آن  $p_i$  ها نمایشگر تصویر طبیعی از  $B(G)$  به روی مؤلفه  $i$ -م در جمع مستقیم متناظر با افزایهای  $\widehat{G}$  هستند و سوپریمم‌گیری روی همه تجزیه‌های ممکن از  $B(G)$  گرفته می‌شود.

برهان: بنا بر [قضیه ۳.۳۳ و ۲۴] برای  $x_k, \dots, x_1$  در  $A(G)$  می‌دانیم

$$\|(x_1, \dots, x_k)\|_k^{\max} = \sup \{ |\sum_{j=1}^k \langle x_j, \lambda_j \rangle|, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in VN(G), \mu_{1,k}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \leq 1 \}$$

که در آن

$$\mu_{1,n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^n \langle x, \lambda_j \rangle \right|, x \in A(G)_{[1]} \right\}.$$

حال فرض کنیم  $p_n, \dots, p_1$  تصاویر معرفی‌شده در صورت قضیه و  $\lambda_n, \dots, \lambda_1$  در  $VN(G)$  باشند به طوری که  $\mu_{1,n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \leq 1$  به وضوح در این حالت برای  $i = 1, \dots, n$ ،  $\|\lambda_i\| \leq 1$  داریم.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n \langle p_j x_j, \lambda_j \rangle \right| &\leq \sum_{j=1}^n |\langle p_j x_j, \lambda_j \rangle| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \|p_j x_j\| \|\lambda_j\| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \|p_j x_j\| \\ &= \|p_1 x_1 + \dots + p_n x_n\|_{B(G)} \\ &\leq \|(x_1, \dots, x_n)\|_n. \end{aligned}$$

لذا

$$\sup \|(p_1 x_1, \dots, p_n x_n)\|_n^{\max} \leq \|(x_1, \dots, x_n)\|_n$$

که در آن سوپریمم روی همه تجزیه‌های ممکن از  $B(G)$  اخذ می‌شود. با کمک [قضیه ۷.۴ و ۲] و محاسبه کوچکی می‌توان نشان داد که هر تجزیه

متعامد نسبت به ساختار نرم-چندگانه  $B(G)$ ، نسبت به ساختار نرم-چندگانه ماکسیمم کوچک است. بنابراین داریم

$$\|(p_1 x_1, \dots, p_n x_n)\|_{B(G)} \leq \|(p_1(x_1), \dots, p_n(x_n))\|_n^{\max} \leq \|(x_1, \dots, x_n)\|_n$$

و بنا بر تعریف ساختار نرم-چندگانه استاندارد و  $B(G)$  تساوی حاصل می‌شود.

### ۳. نگاشت‌های چندگانه-کراندار روی جبرهای فوریه

بنا بر [نتیجه ۶، ۳۴ و ۲] برای گروه‌های موضعاً فشرده و آبلی  $G$  و  $H$  داریم

$$\mu(L^1(G), L^1(H)) \cong B_r(L^1(G), L^1(H)),$$

که در آن  $B_r(L^1(G), L^1(H))$ ، شبکه باناخ شامل همه نگاشت‌های خطی منظم از  $L^1(G)$  بر  $L^1(H)$  است. برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد شبکه‌های باناخ و نگاشت‌های منظم،  $[8]$  را ببینید. در رابطه بالا،  $L^1$ -جبرهای باناخ با ساختار نرم چندگانه استاندارد شبکه‌ای در نظر گرفته شده‌اند. در این بخش، قصد داریم رابطه بالا را در حالت نآبلی مورد مطالعه قرار دهیم. همان گونه که قبلاً هم ذکر کردیم، تعمیم طبیعی  $L^1$ -جبرها در حالت نآبلی، جبرهای فوریه هستند. می‌دانیم جبرهای فوریه شبکه باناخ نیستند، مگر در حالتی که گروه زمینه آن‌ها آبلی باشد؛ زیرا اگر  $A(G)$  شبکه باشد، در این صورت دوگان آن نیز چنین است. در حالی که بنا بر قضیه شناخته‌شده‌ای در  $[9]$   $C^*$ -

جبرهای باناخ شبکه هستند اگر و تنها اگر جابجایی باشند، بنابراین در این حالت  $VN(G)$  باید جابجایی باشد. برای هر  $g \in G$ ، همریختی  $VN(G) \rightarrow \mathbb{C}$  را  $\lambda_g : A(G) \rightarrow \mathbb{C}$  در نظر بگیرید که به  $f \rightarrow f(g)$  متعلق است. بنابراین برای  $VN(G)$  جابجایی باید

داشته باشیم

$$\lambda_{g_1} \lambda_{g_2} = \lambda_{g_1 g_2} = \lambda_{g_2} \lambda_{g_1}, \quad g_1, g_2 \in G.$$

از آنجا که  $A(G)$  نقاط  $g$  را جدا می‌کند، باید داشته باشیم  $g_1 g_2 = g_2 g_1$  و بنابراین  $G$  آبلی است.

در ادامه، تا اندازه‌های به مقوله فضاهای عملگری نیازمندیم که این نظریه در اواسط سال‌های ۷۰ میلادی، پس از مثال‌های استینسبرگ و آرویسون معرفی و در کنگره ریاضی سال ۱۹۸۸ به وسیله افراس ارایه شد.

هر فضای عملگری را می‌توان به عنوان زیرفضای نرم-بسته  $B(H)$ ،  $C^*$ -جبر نگاشت‌های خطی و کراندار، روی یک فضای هیلبرت  $H$  دانست [قضیه ۲.۳۵؛ ۳].

برای فضاهای هیلبرت  $H_1$  و  $H_2$  فرض کنیم،  $E_i \subseteq B(H_i)$ ،  $i = 1, 2$ ، فضاهای عملگری باشند. نگاشت خطی  $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$ ، کاملاً مثبت خوانده می‌شود هرگاه

$$\varphi^{(n)}: \mathcal{M}_n(E_1) \rightarrow \mathcal{M}_n(E_2), \quad \varphi^{(n)}([x_{ij}]) = [\varphi(x_{ij})]$$

برای هر  $n \in \mathbb{N}$ ، مثبت باشد؛ به این معنی که اعضای مثبت را به مثبت می‌نگارد و در آن در ترتیب القایی از  $C^*$ -جبر  $B(H_i)$ ،  $i = 1, 2$  مورد نظر است.

منابع و مراجع زیادی برای فضاهای عملگری موجود است؛ خواننده را به [10] ارجاع می‌دهیم.

**قضیه ۳.۱.** فرض کنیم  $H$  و  $G$  گروه‌های موضعاً فشرده و دارای خاصیت تجزیه‌پذیری باشند و فرض کنید  $\varphi: A(G) \rightarrow A(H)$  هم‌ریختی کاملاً مثبت (و کاملاً کراندار) و یک به یک باشد. اگر  $G$  میانگین‌پذیر باشد، آن گاه  $\varphi^{-1}$  انقباضی است و اگر علاوه بر این  $\varphi$  پوشا نیز باشد، آن گاه  $\varphi$

چندگانه-طولپایی است.

**برهان.** بنا بر [نتیجه ۳.۱۱؛ ۱۱]، هم‌ریختی پیوسته  $\alpha: H \rightarrow G$  چنان موجود است که  $\phi = \phi_\alpha$ ؛ به این معنی که برای هر  $u \in A(G)$ ،  $\phi_\alpha(u) = u \circ \alpha$ . از آنجایی که جبر فوریه نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا می‌کند، از یک به یک بودن  $\Phi$  به راحتی نتیجه می‌شود که  $\alpha$  دارای برد چگال است. حال اگر  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$  و  $\Sigma_n$  افزاری برای  $\hat{G}$  و برای  $i = 1, \dots, n$ ،  $p_i$  تصویر طبیعی از  $B(G)$  به روی  $B_{\Sigma_i}(G)$  باشد، بنا بر [قضیه ۲.۲؛ 6] به راحتی نتیجه می‌شود که  $\Sigma_1 \circ \alpha, \dots, \Sigma_n \circ \alpha$  زیرمجموعه‌های  $\hat{H}$  و با توجه به چگال بودن برد  $\alpha$ ، افزاز نیز هستند. همچنین اگر  $P_i(u_i) \in B_{\Sigma_i}(G)$ ، آن گاه  $P_i(u_i) \circ \alpha \in B_{\Sigma_i}(H)$ ،  $i = 1, \dots, n$ . این نشان می‌دهد که اگر  $v \in A(G)$  و  $v = v_1 + \dots + v_n$  برای  $v_i \in B_{\Sigma_i}(G)$ ، آن گاه  $v \circ \alpha = v_1 \circ \alpha + \dots + v_n \circ \alpha$  تجزیه  $v \circ \alpha$  در  $B(H)$  (و  $A(H)$ ) به مؤلفه‌هایی در  $B_{\Sigma_i \circ \alpha}(H)$  برای  $i \in \{1, \dots, n\}$  است.

حال بنا بر توضیحات بالا به ازای هر  $i = 1, \dots, n$  داریم  $P_i(u_i) \circ \alpha = P_i(u_i \circ \alpha)$  و

$$\begin{aligned} r_{\Sigma_1 \circ \alpha, \dots, \Sigma_n \circ \alpha}(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)) &= \\ \|P_1 \varphi(u_1)\|_{B_{\Sigma_1 \circ \alpha}(H)} + \dots + & \\ \|P_n \varphi(u_n)\|_{B_{\Sigma_n \circ \alpha}(H)} &= \\ \|P_1(u_1 \circ \alpha)\|_{B_{\Sigma_1 \circ \alpha}(H)} + \dots + & \\ \|P_n(u_n \circ \alpha)\|_{B_{\Sigma_n \circ \alpha}(H)} &= \\ \|P_1(u_1) \circ \alpha\|_{B_{\Sigma_1 \circ \alpha}(H)} + \dots + & \\ \|P_n(u_n) \circ \alpha\|_{B_{\Sigma_n \circ \alpha}(H)} &= \\ \|P_1(u_1)\|_{B_{\Sigma_1}(G)} + \dots + & \\ \|P_n(u_n)\|_{B_{\Sigma_n}(G)}. & \end{aligned}$$

تساوی آخر بنا بر [قضیه ۲.۲؛ ۶] برقرار است و بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} r_{\Sigma_1 \circ \alpha, \dots, \Sigma_n \circ \alpha}(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)) &= \\ r_{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n}(u_1, \dots, u_n), & \end{aligned}$$

تجزیه به کاملاً مثبت‌ها در مورد جبر فوریه لزوماً  
برقرار نیست.

که نتیجه می‌دهد

$$\|(u_1, \dots, u_n)\|_n \leq \|(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n))\|.$$

حال فرض می‌کنیم  $\Phi$  پوشا باشد و  $x, y \in H$  و  $x \neq y$ . بنابر [قضیه ۲.۱۵؛ ۱۳]،  $g \in A(H)$  چنان موجود است که  $g(x) = 1$  و  $g(y) = 0$ . بنابراین  $f \in A(G)$  چنان داریم که  $f \circ \alpha(x) = 1$ ،  $f \circ \alpha(y) = 0$ ،

و این نشان می‌دهد که  $\alpha(y) \neq \alpha(x)$ . بنابراین  $\alpha$  یک به یک است. بنابراین هر نمایش یکانی تحویل‌ناپذیر  $H$  را می‌توان به یک چنین نمایشی به  $G$  گسترش داد و لذا سوپریمم‌گیری از رابطه (۱) طولیایی را نتیجه می‌دهد.

**تذکر ۳.۲.** جالب است بدانیم که نگاشت‌های چندگانه کراندار روی جبرهای فوریه موجودند که کاملاً کراندار نیستند. فرض کنیم  $G$  یک گروه موضعاً فشرده باشد. در این صورت نگاشت

$$v : A(G) \rightarrow A(G)$$

$$f \rightarrow \check{f}(x) = f(x^{-1})$$

کاملاً کراندار است اگر و تنها اگر  $G$  زیرگروه آبلی با اندیس متناهی داشته باشد [12]. اما بررسی این که این نگاشت چندگانه-کراندار است آسان است.

از [6] می‌دانیم هر نگاشت کاملاً کراندار  $T : A(G) \rightarrow A(H)$  به روی گروه میانگین‌پذیر  $G$  را می‌توان به صورت  $T = T_1 - T_2 + i(T_3 - T_4)$  نوشت که در آن برای  $i = 1, \dots, 4$  کاملاً مثبت هستند. این توضیحات نشان می‌دهد نتیجه‌ای که در مورد گروه‌های آبلی و  $L^1$ -جبرها برقرار است، با جایگزینی نگاشت‌های منظم با نگاشت‌های قابل

## فهرست منابع

- [11] Ilie M., Spronk N., Completely Bounded Homomorphisms of the Fourier Algebras, *J. Funct. Anal.*, 213 (2004) , 88-110.
- [12] Forrest B. E., Runde V., Amenability and weak amenability of the Fourier algebra, *Math. Z.*, 250 (2005) , 731-744.
- [13] Ulger A., Some results about the spectrum of commutative Banach algebras under the weak topology and application, *Monatsh. Math.*, 121 (1996), 353-379.
- [1] Dales H. G., Daws M., Pham H. L., Ramsden P., Multi-norms and the injectivity of  $L_p(G)$  , *J. Lond. Math. Soc.*, 86 (2012) , 779-809.
- [2] Ramsden P., Homological properties of semigroup algebras, *J. Funct. Anal.* 258 (2010), 3988–4009.
- [3] Ramsden P., Multi-norms and modules over group algebras, [arXiv:0909.4854](https://arxiv.org/abs/0909.4854) [math.FA].
- [4] Dales H. G., Polyakov M., Multi-normed spaces, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* 488 (2012) ,1-165.
- [5] Haagerup U., Injectivity and decomposition of completely bounded maps, Unpublished notes.
- [6] Eymard P., L'algebra de Fourier dun groupe localment compact, *Bull. Soc. Math. France*, 92,(1964), 181-236.
- [7] Folland J. B., *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press, 1995.
- [8] Schaefer H. H., *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [9] Sherman S., Order in operator algebras, *Amer. J. Math.*, 73 (1951), 227-232.
- [10] Effros E. G., Ruan Z. J., *Operator Spaces*, London Math. Soc. Monogr., Clarendon Press, Oxford, 2000.

