دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی، خرداد و تیر ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

ایده‌آل‌های حالت توسعه یافته در MV-جبرهای حالت

فرشته فروزش*[۱]، زهرا دهقانی پشترودی[۲]، طیبه واعظی زاده[۳]، مهدیه ابراهیم پور[۴]

(۱و۲) گروه ریاضی،دانشکده ریاضیات و محاسبات نرم، مجتمع آموزش عالی بم ، بم، ایران
(۳) گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران
(۴) گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۰۶/۱۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۲/۰۷

چکیده

در این مقاله، ابتدا مفهوم ایده‌آل حالت توسعه یافته از I وابسته به B در MV-جبرهای حالت را معرفی می‌کنیم و سپس به بررسی پاره‌ای از ویژگی‌های مربوط به آن‌ها می‌پردازیم. در ادامه، یک قضیه ساختاری از ایده‌آل‌های حالت توسعه یافته در MV-جبر حالت را بیان می‌کنیم. در پایان، ثابت می‌کنیم کلاس $S(B)$ مجموعه همه ایده‌آل‌های حالت توسعه یافته پایدار تحدید به $B \subseteq A$، در MV-جبرحالت (A, σ)، یک مشبکه و یک جبر هایتینگ است.

واژه‌های کلیدی: ایده‌آل حالت توسعه یافته، MV-جبر حالت، زنجیر حالت، پایدار.

*. عهده‌دار مکاتبات:
Email: frouzesh@bam.ac.ir

۱- مقدمه

محققان تحقیقات گسترده‌ای در زمینه MV- جبرها انجام دادند. آنها مفاهیمی مانند ایده‌آل‌ها را تعریف کردند و انواع ایده‌آل‌ها را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. در ادامه MV–جبر حالت و ایده‌آل حالت را تعریف کردند. در این مقاله، ابتدا پاره‌ای از مفاهیم اساسی و قضایای مربوطه، به اختصار آورده می‌شود. سپس، مفهوم ایده‌آل حالت توسعه یافته ایده‌ال I از MV–جبر A وابسته به زیرمجموعه B از A را معرفی می‌کنیم و یک شرط معادل برای ایده‌ال حالت توسعه یافته وابسته به B بیان و اثبات می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم کلاس $S(B)$ مجموعه همه ایده‌آل‌های حالت توسعه یافته پایدار تحدید به $B \subseteq A$، در MV–جبر A، یک مشبکه و یک جبر هایتینگ است.

۲- پیشینه تحقیق

اولین بار MV–جبرها، بوسیله چانگ[1] در سال ۱۹۵۸ معرفی شدند [2]. در واقع آن‌ها یک ساختار جبری از منطق بینهایت ارزشی لوکاسویچ هستند و نظریه آن‌ها بعد از سال ۱۹۸۶ توسعه داده شد [2]. نظریه ایده‌آل‌ها یک نقش اصلی در MV–جبرها بازی می‌کند و برای مشخص کردن MV–جبرها مفید است.

۴۰ سال بعد از بوجود آمدن MV–جبرها، حالت‌ها روی MV–جبرها بوسیله ماندیسی[2] مطرح شدند و در جهت اندازه میانگین ارزش درستی گزاره‌ها در منطق لوکاسویچ که تعمیم اندازه احتمال روی جبرهای بولی هستند مورد استفاده قرار گرفتند. [14]

در دهه آخر، نظریه حالت‌ها روی MV–جبرها و ساختارهای نسبی آن‌ها توسط بسیاری از محققان مانند: کهر[3] و ماندیسی [13]، کروپا[4] [12]، دورانسکیو راچانک[5] [16]، جورجسکیو[6] [10] و دیگران مورد مطالعه قرار گرفت. حالت‌ها روی MV–جبرها، توسط فلامینو[7] و مونتاگنا[8] عمیقاً مورد بررسی قرار گرفتند [8] و [9].کیونگو[9] مفهوم BL–جبر حالت را به عنوان تعمیمی از مفهوم یک MV–جبر حالت معرفی کرد [4]. همچنین، آن‌ها یک عمل یکتایی σ روی MV–جبرها تعریف کردند که خواص عادی حالت‌ها را حفظ می‌کند. مفهوم ایده ال‌های توسعه یافته در MV–جبرها و ویژگی‌های آنها توسط فروزش بررسی شده است [5].

۳- پیش‌نیازها

در این بخش، به معرفی برخی از تعاریف اولیه و قضایایی که در بخش‌های بعدی مورد نیاز است، می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳. [2] جبر $(A,\oplus,*,0)$ از نوع $(2,1,0)$ یک MV–جبر است، اگر در شرایط زیر صدق کند:

(1) $(A,\oplus,0)$ یک تکواره آبلی است،

(2) $(a^*)^* = a$،

(3) $0^* \oplus a = 0^*$،

(4) $(a^* \oplus b)^* \oplus b = (b^* \oplus a)^* \oplus a$.

ثابت ۱ و عمل‌های کمکی $\odot$ و $\wedge$ و $\vee$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$(1)\, a \odot b = (a^* \oplus b^*)^*$.

$(2)\, a \ominus b = a \odot b^*$.

---

1 C. C. Chang
2 D. Mundici

3 J. Kuhr
4 A. Kroupa
5 J. Rachunek
6 G. Georgescu
7 T. Flamino
8 F. Montagna
9 L. C. Ciungu

(3) $1^* = 0$.
(4) $a \wedge b = a \odot (a^* \oplus b) = b \odot (b^* \oplus a)$
$a \vee b = a \oplus (a^* \odot b) = b \oplus (a \odot b^*)$.

تعریف ۲,۳. [3] اگر $L = (L, \wedge, \vee, 0, 1)$ یک مشبکه کراندار باشد. یک عضو $a \in L$ را متمم‌دار گوییم، اگر یک $b \in L$ موجود باشد بطوریکه دو شرط $a \vee b = 1$ و $a \wedge b = 0$ را داشته باشد.
مجموعه همه‌ی عضوهای متمم‌دار L را با $B(L)$ نشان می‌دهیم.

لم ۳,۳. [3] در هر MV-جبر A، برای هر $x, y \in A$ شرایط زیر برقرارند:
(1) $x, y \le x \oplus y$ و
$x \le nx = x \oplus x \oplus \cdots \oplus x$.
(2) $x \le y$ اگر و تنها اگر $x \odot y^* = 0$.
(3) اگر $x \in B(A)$ آنگاه برای هر $y \in A$، $x \wedge y = x \odot y$.
(4) اگر $x \le y$ و $z \le t$ آنگاه $x \oplus z \le y \oplus t$.
(5) $x \wedge (x_1 \oplus \cdots \oplus x_n) \le (x \wedge x_1) \oplus \cdots \oplus (x \wedge x_n)$
(6) $nx \wedge my \le nm(x \wedge y)$.
(7) $(x \odot y^*) \wedge (y \odot x^*) = 0$.

جاییکه $B(A)$ مجموعه‌ی همه‌ی عناصر متمم‌دار $L(A)$ می‌باشد بطوریکه $L(A)$ مشبکه توزیع پذیر با ۰ و ۱ در A می‌باشد.

تعریف ۴,۳. [2] فرض کنید I یک زیر مجموعه غیر تهی از A باشد. I را یک ایده‌آل از A گوئیم اگر و تنها اگر در شرایط زیر صدق کند:
(1) $0 \in I$.
(2) اگر $x, y \in I$ آنگاه $x \oplus y \in I$.
(3) اگر $x \in I$ و $y \in A$ و $y \le x$ آنگاه $y \in I$

مجموعه تمام ایده‌آل‌های یک MV-جبر A را با $Id(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵,۳. [3] یک عضو $x \in A$ دارای مرتبه n است، اگر n کوچکترین عدد طبیعی (در صورت وجود) باشد به قسمی که $nx = 1$ و آن را به صورت $ord(x) = n$ نشان می‌دهیم. در این حالت گوییم x دارای مرتبه متناهی است و می‌نویسیم:
$ord(x) \le \infty$.

تعریف ۶,۳. [15] یک جبر *هایتینگ*، یک مشبکه $(A, \wedge, \vee)$ *با ۰ می‌باشد به قسمی که برای هر* $a, b \in A$ عضو $a \to b \in A$ موجود باشد به قسمی که برای هر $x \in A$، $a \wedge x \le b$ اگر و تنها اگر $x \le a \to b$. در یک جبر هایتینگ A، برای هر $x \in A$، $x \odot x = x$، از اینرو
$x \odot y = x \wedge y = x \odot (x \to y)$

لم ۷,۳. [15] فرض کنید A یک جبر هایتینگ باشد. آنگاه برای هر $x, y, z \in A$ شرایط زیر برقرارند:
(1) $1 \to x = x,\ x \to x = 1$.
(2) $x \to (y \to z) = (x \odot y) \to z = y \to (x \to z)$.
(3) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$

تعریف ۸,۳. [5] فرض کنید I یک ایده‌آل از MV-جبر A و $B \subseteq A$ باشد. ایده‌آل توسعه یافته از I وابسته به B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$E_I(B) = \{x \in A \mid x \wedge b \in I, \forall b \in B\}$

اگر $a \in A$، $E_I(\{a\})$ را به صورت $E_I(a)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹,۳. [3] فرض کنید M و N دو MV-جبر باشند. $f: M \to N$ را یک همریختی MV-جبر گویند، اگر برای هر $x, y \in M$ شرایط زیر برقرار باشند:
(1) $f(0) = 0$،

(2) $f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y)$،
(3) $f(x^*) = (f(x))^*$.

تعریف ۱۰،۳. [8] یک MV-جبر حالت، یک جفت (A,σ) است بطوریکه A یک MV-جبر است و $\sigma: A \to A$ یک عمل یکتایی به روی A است که برای هر $x, y \in A$ در شرایط زیر صدق می‌کند:
(1) $\sigma(1) = 1$،
(2) $\sigma(x^*) = \sigma(x)^*$،
(3) $\sigma(x \oplus y) = \sigma(x) \oplus \sigma(y \ominus (x \odot y))$،
(4) $\sigma(\sigma(x) \oplus \sigma(y)) = \sigma(x) \oplus \sigma(y)$

لم ۱۱،۳. [8] در یک MV-جبر حالت (A,σ)، برای هر $x, y \in A$، ویژگی‌های زیر برقرار است:
(1) $\sigma(x \oplus y) \leq \sigma(x) \oplus \sigma(y)$
(2) $\sigma(\sigma(x)) = \sigma(x)$
(3) اگر $x \leq y$، آنگاه $\sigma(x) \leq \sigma(y)$
(4) $\sigma(\sigma(x) \odot \sigma(y)) = \sigma(x) \odot \sigma(y)$

تعریف ۱۲،۳. [8] یک ایده‌آل حالت از MV-جبر حالت (A,σ)، یک MV-ایده‌آل بسته تحت σ است. مجموعه‌ی ایده‌آل‌های حالت از (A,σ) را با $I_\sigma(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳،۳. [8] یک ایده‌آل حالت سره از (A,σ) یک ایده‌آل حالت ماکسیمال نامیده می‌شود اگر اکیداً مشمول هیچ ایده‌آل حالت سره‌ای از (A,σ) نباشد. مجموعه‌ی ایده‌آل‌های حالت ماکسیمال از (A,σ) را با $Ml_\sigma(A)$ نشان می‌دهیم.

لم ۱۴،۳. [7] فرض کنید (A,σ) یک MV-جبر حالت باشد و B یک مجموعه ناتهی از A باشد، آنگاه ایده‌آل حالت تولید شده توسط B را به این صورت نشان می‌دهیم:

$$(B]_\sigma = \{x \in A |\, x \leq n_1(b_1 \oplus \sigma(b_1)) \oplus \cdots \oplus n_k(b_k \oplus \sigma(b_k)), b_i \in B, n_i \geq 1, k \geq 1\}$$

$$(a]_\sigma = \{x \in A |\, x \leq n(a \oplus \sigma(a)), n \geq 1\}$$

تعریف ۱۵،۳. [7] یک ایده‌آل حالت سره P از (A,σ) یک ایده‌آل حالت اول نامیده می‌شود اگر برای $a, b \in A$ بطوریکه
$(a \oplus \sigma(a)) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \in P$ ،

نتیجه شود $a \in P$ یا $b \in P$.

قرارداد. مجموعه تمام ایده‌آل‌های حالت اول از (A,σ) را با $Spec_\sigma(A)$ نشان می‌دهیم.

نکته ۱۶،۳. [7] فرض کنید I و J ایده‌آل‌های حالت از (A,σ) باشند. قرار می‌دهیم
$I \wedge J = I \cap J$ و
$I \vee J = (I \cup J]_\sigma = \{x \in A |\, x \leq a \oplus c, \exists a \in I, c \in J\}$.

تعریف ۱۷،۳. [6] ایده‌آل حالت سره I از (A,σ) را ایده‌آل حالت سرسخت گویند، اگر $x, y \notin I$ نتیجه شود $\sigma(x) \odot \sigma(y)^* \in I$ و $\sigma(y) \odot \sigma(x)^* \in I$، برای هر $x, y \in A$.

قضیه ۱۸،۳. [6] فرض کنید I یک ایده‌آل حالت سرسخت از (A,σ) باشد. آنگاه I یک ایده‌آل حالت ماکسیمال از (A,σ) است.

تعریف ۱۹،۳. [6] ایده‌آل حالت I از (A,σ) را ایده‌آل حالت بولی گویند، اگر $(x \oplus \sigma(x)) \wedge (x^* \oplus \sigma(x^*)) \in I$.

قضیه ۲۰،۳. [6] فرض کنید I یک ایده‌آل حالت اول و بولی از (A,σ) باشد. آنگاه I یک ایده‌آل حالت سرسخت از (A,σ) است.

تعریف ۲۱،۳. [7] اگر I یک ایده‌آل حالت سره از (A,σ)باشد، دراین صورت اشتراک همه ایده‌آل‌های

حالت ماکسیمال از (A,σ) شامل I را رادیکال حالت I تعریف می‌کنند و آن را با $Rad_\sigma(I)$ نمایش می‌دهند.

قضیه ۲۲,۳. [7] فرض کنید (A,σ) یک MV-جبر حالت و $I \in I_\sigma(A)$ باشد. آنگاه

$$Rad_\sigma(I) = \{x \in A | \, n\sigma(x) \odot \sigma(x) \in I, \forall n \geq 1\}$$

تعریف ۲۳,۳. [7] فرض کنید I یک ایده‌آل حالت سره از (A,σ) باشد. در این صورت اگر $Rad_\sigma(I) = I$، آنگاه I را یک ایده‌آل حالت نیمه ماکسیمال از (A,σ) گویند.

تعریف ۲۴,۳۶. [1] فرض کنید (A,τ) و (B,σ) دو MV-جبر حالت باشند آنگاه $f: A \to B$ را یک MV-همریختی حالت گوییم اگر f همریختی MV-جبری باشد و برای هر $x \in A$، $f(\tau(x)) = \sigma(f(x))$.

لم ۲۵,۳. [7] فرض کنید (A,σ) یک MV-جبر حالت و $a, b \in A$ باشند. آنگاه شرایط زیر برقرارند:

(1) اگر $a \leq b$، آنگاه $(a]_\sigma \subseteq (b]_\sigma$،

(2) $(\sigma(a)]_\sigma \subseteq (a]_\sigma$،

(3) $(a \oplus \sigma(a)]_\sigma = (a]_\sigma$،

(4) $(a]_\sigma \cap (b]_\sigma = ((a \oplus \sigma(a)) \wedge (b \oplus \sigma(b))]_\sigma$،

(5) $(a]_\sigma \vee (b]_\sigma = (a \oplus b]_\sigma$.

گزاره ۲۶,۳. [7] اگر $I_1, I_2 \in I_\sigma(A)$، آنگاه

$$I_1 \hookrightarrow_\sigma I_2 = \{x \in A | I_1 \cap (x]_\sigma \subseteq I_2\}$$

یک ایده‌آل حالت از (A,σ) است.

گزاره ۲۷,۳. [7] فرض کنید (A,σ) یک MV-جبر حالت باشد. آنگاه $(I_\sigma(A), \cap, \vee, \hookrightarrow_\sigma, \{0\}, A)$ یک جبر هایتینگ است.

تعریف ۲۸,۳. [6] MV-جبر حالت (A,σ) را زنجیر حالت گوییم، اگر برای هر $x, y \in A$، $\sigma(x) \leq \sigma(y)$ یا $\sigma(y) \leq \sigma(x)$.

۴- ایده‌آل‌های حالت توسعه یافته در MV-جبرهای حالت

در ادامه، فرض کنید A یک MV-جبر باشد.
در این بخش، به معرفی ایده‌آل حالت توسعه یافته I وابسته به زیرمجموعه B از A می‌پردازیم و برخی از ویژگی‌های آنرا را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

قضیه ۱,۴. فرض کنید I یک ایده‌آل حالت از MV-جبر حالت (A,σ) و $B \subseteq A$ باشد. آنگاه مجموعه

$$E_I^\sigma(B) = \{x \in A | \, (x \oplus \sigma(x)) \wedge (b \oplus \sigma(b)), \in I, \forall b \in B\}$$

یک ایده‌آل حالت از (A,σ) است به قسمی که $I \subseteq E_I^\sigma(B)$.

برهان. فرض کنید $x, y \in E_I^\sigma(B)$، لذا برای هر $b \in B$ نتیجه می‌شود

$(x \oplus \sigma(x)) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \in I$ و

$(y \oplus \sigma(y)) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \in I$.

آنگاه بنا به

لم ۱۱,۳ (۱) و لم ۳,۳ (۱) و (۵) و (۶)، داریم:

$$\begin{aligned}
&((x \oplus y) \oplus \sigma(x \oplus y)) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \leq \\
&(x \oplus y \oplus \sigma(x) \oplus \sigma(y)) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \\
&\leq \Big((x \oplus \sigma(x)) \oplus (y \oplus \sigma(y)) \oplus \\
&(x \oplus \sigma(x)) \oplus (y \oplus \sigma(y))\Big) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \\
&= 2((x \oplus \sigma(x)) \oplus (y \oplus \sigma(y))) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \\
&\leq 2(((x \oplus \sigma(x)) \oplus (y \oplus \sigma(y))) \wedge (b \oplus \sigma(b))) \\
&\leq 2\Big(\big((x \oplus \sigma(x)) \wedge (b \oplus \sigma(b))\big) \\
&\oplus \big((y \oplus \sigma(y)) \wedge (b \oplus \sigma(b))\big)\Big) \in I
\end{aligned}$$

در نتیجه $x \oplus y \in E_I^\sigma(B)$. اگر $y \in E_I^\sigma(B)$ و $x \leq y$، $x \in A$ آنگاه

$\left(x \oplus \sigma(x)\right) \wedge \left(b \oplus \sigma(b)\right) \leq \left(y \oplus \sigma(y)\right) \wedge \left(b \oplus \sigma(b)\right) \in I$

لذا $x \in E_I^\sigma(B)$ اکنون، فرض کنید $x \in E_I^\sigma(B)$. آنگاه بنا به لم ۱۱،۳ (۲) و لم ۳،۳ (۱) و (۶)، داریم:

$$\left(\sigma(x) \oplus \sigma(\sigma(x))\right) \wedge \left(b \oplus \sigma(b)\right) = 2\sigma(x) \wedge \left(b \oplus \sigma(b)\right) \leq 2(x \oplus \sigma(x)) \wedge \left(b \oplus \sigma(b)\right) \leq 2\left(\left(x \oplus \sigma(x)\right) \wedge \left(b \oplus \sigma(b)\right)\right) \in I, \forall b \in B.$$

در نتیجه $\sigma(x) \in E_I^\sigma(B)$. بنابراین $E_I^\sigma(B) \in I_\sigma(A)$. حال، اگر $x \in I$ آنگاه $x \oplus \sigma(x) \in I$، در نتیجه برای هر $b \in B$، $\left(x \oplus \sigma(x)\right) \wedge \left(b \oplus \sigma(b)\right) \in \mathrm{I}$، لذا $x \in E_I^\sigma(B)$.

بنابراین $I \subseteq E_I^\sigma(B)$.

تعریف ۲،۴. فرض کنید I یک ایده‌آل حالت از MV-جبر حالت(A, σ) باشد به قسمی که $B \subseteq A$. مجموعه $E_I^\sigma(B)$ را ایده‌آل حالت توسعه یافته از I وابسته به B گویند. اگر $a \in A$، $E_I^\sigma(\{a\})$ را به صورت $E_I^\sigma(a)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۳،۴. فرض کنید $A = \{0, a, b, c, d, 1\}$، جاییکه $0 < a, b < c < 1$ و $0 < b < d < 1$. عمل‌های $\odot$ و $\oplus$ و $*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$*$	0	a	b	c	d	1
	1	d	c	b	a	0

$\oplus$	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	a	c	c	1	1
b	b	c	d	1	d	1
c	c	c	1	1	1	1
d	d	1	d	1	d	1
1	1	1	1	1	1	1

$\odot$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	0	a
b	0	0	0	0	b	b
c	0	a	0	a	b	c
d	0	0	b	b	d	d
1	0	a	b	c	d	1

آنگاه $(A, \oplus, *, 0, 1)$ یک MV-جبر است[11]. نگاشت σ روی A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, b, d \\ 1 & x = 1, c, a \end{cases}$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که (A, σ) یک MV-جبر حالت و $I = \{0, b, d\}$ یک ایده‌آل حالت از (A, σ) می‌باشد و

$E_I^\sigma(\{a, c\}) = I.$

گزاره ۴،۴. فرض کنید (A, σ) یک MV-جبر حالت باشد، $I, J \in I_\sigma(A)$ و $B, C \subseteq A$. آنگاه شرایط زیر برقرارند:

(1) اگر $B \subseteq C$ آنگاه $E_I^\sigma(C) \subseteq E_I^\sigma(B)$.

(2) اگر $I \subseteq J$ آنگاه $E_I^\sigma(B) \subseteq E_J^\sigma(B)$.

(3) $E_I^\sigma(B) = A$ اگر و تنها اگر $B \subseteq I$.

(4) $B \subseteq E_I^\sigma(E_I^\sigma(B))$.

(5) اگر $I \subseteq J$ آنگاه $E_I^\sigma(J) \cap J = I$.

(6) $E_I^\sigma\left(E_I^\sigma(B)\right) \cap E_I^\sigma(B) = I$.

(7) اگر $1 \in B$ آنگاه $E_I^\sigma(B) = I$.

(8) $E_I^\sigma(B) = E_I^\sigma((B]_\sigma)$.

برهان. (۱)-(۷) مشابه قضیه ۷،۳، در مقاله [5] (۸) چون $B \subseteq (B]_\sigma$ لذا بنا به قسمت (۱) داریم $E_I^\sigma((B]_\sigma) \subseteq E_I^\sigma(B)$. اکنون فرض کنید $x \in E_I^\sigma(B)$. دراین صورت برای هر $b \in B$ داریم:

$(x \oplus \sigma(x)) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \in I$

و فرض کنید $y \in (B]_\sigma$. در نتیجه بنا به لم ۱۴،۳، $b_i \in B$ و $n_i \geq 1$ و $k \geq 1$ وجود دارند به‌قسمی که

$y \le n_1\big(b_1 \oplus \sigma(b_1)\big) \oplus \cdots \oplus n_k\big(b_k \oplus \sigma(b_k)\big) = \oplus_{1\le i\le k} n_i(b_i \oplus \sigma(b_i))$

آنگاه بنا به لم ۱۱,۳ (۱) و (۲) و لم ۳,۳ (۱) و (۵) و (۶) داریم:

$(x \oplus \sigma(x)) \wedge (y \oplus \sigma(y)) \le (x \oplus \sigma(x)) \wedge (\oplus_{1\le i\le k} n_i\big(b_i \oplus \sigma(b_i)\big) \oplus \big(\oplus_{1\le i\le k} 2n_i\sigma(b_i)\big))$
$\le ((x \oplus \sigma(x)) \wedge (\oplus_{1\le i\le k} n_i\big(b_i \oplus \sigma(b_i)\big))$
$\oplus ((x \oplus \sigma(x)) \wedge \big(\oplus_{1\le i\le k} 2n_i\sigma(b_i)\big))$
$\le \oplus_{1\le i\le k} n_i\Big(\big(x \oplus \sigma(x)\big) \wedge \big(b_i \oplus \sigma(b_i)\big)\Big)$
$\oplus (\oplus_{1\le i\le k} 2n_i\Big(\big(x \oplus \sigma(x)\big) \wedge \big(b_i \oplus \sigma(b_i)\big)\Big)) \in I$

لذا $x \in E_I^\sigma((B]_\sigma)$ بنابراین $E_I^\sigma(B) = E_I^\sigma((B]_\sigma)$.

قضیه ۵,۴. فرض کنید (A,σ) یک MV-جبر حالت و I یک ایده‌آل حالت سره از (A,σ) باشد. آنگاه شرایط زیر معادلند:

(1) $I \in Spec_\sigma(A)$،

(2) $E_I^\sigma(B) = A$ یا $E_I^\sigma(B) = I$ برای هر $B \subseteq A$،

(3) $E_I^\sigma(a) = I$ برای هر $a \in A\backslash I$.

برهان. $(1) \Longrightarrow (2)$ فرض کنید $E_I^\sigma(B) \ne I$ و $x \in E_I^\sigma(B)\backslash I$، بنابراین برای هر $b \in B$، $(x \oplus \sigma(x)) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \in I$. بنا به تعریف ۱۵,۳، $b \in I$ برای هر $b \in B$. پس $B \subseteq I$. آنگاه از گزاره ۴,۴ (۳) نتیجه می‌شود $E_I^\sigma(B) = A$.

$(2) \Longrightarrow (3)$ فرض کنید $a \in A\backslash I$. از گزاره ۴,۴ (۳) نتیجه می‌شود $E_I^\sigma(a) \ne A$، بنابراین بنا به قسمت (۲) داریم $E_I^\sigma(a) = I$.

$(3) \Longrightarrow (1)$ فرض کنید $a,b \in A$ بطوریکه $(a \oplus \sigma(a)) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \in I$ و $a \notin I$. آنگاه بنا به قسمت (۳) داریم $E_I^\sigma(a) = I$ و چون $(a \oplus \sigma(a)) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \in I$، داریم $b \in E_I^\sigma(a)$، یعنی $b \in I$. در نتیجه $I \in Spec_\sigma(A)$.

قضیه ۶,۴. فرض کنید (A,σ) یک MV-جبر حالت و I یک ایده‌آل حالت سره از (A,σ) باشد. آنگاه شرایط زیر معادلند:

(1) $I \in Ml_\sigma(A)$،

(2) $E_I^\sigma(B) \in Ml_\sigma(A)$ یا $E_I^\sigma(B) = A$ برای هر $B \subseteq A$.

برهان. $(1) \Longrightarrow (2)$ فرض کنید $E_I^\sigma(B) \ne A$. آنگاه $I \subseteq E_I^\sigma(B) \ne A$ و چون $I \in Ml_\sigma(A)$، در نتیجه

$E_I^\sigma(B) = I \in Ml_\sigma(A)$

$(2) \Longrightarrow (1)$ فرض کنید $B = \{1\}$. آنگاه بنا به گزاره ۴,۴ (۷) و فرض داریم
$I = E_I^\sigma(1) \in Ml_\sigma(A)$.

گزاره ۷,۴. فرض کنید (A,σ) یک MV-جبر حالت و $\{J_i\}_{i\in I}, J \in I_\sigma(A)$ ، $B, \{\mathrm{B_i}\}_{i\in I} \subseteq A$ باشد. آنگاه

(1) $E_J^\sigma(\cup_{i\in I} B_i) = \cap_{i\in I} E_J^\sigma(B_i)$.

(2) $E_{\cap_{i\in I} J_i}^\sigma(B) = \cap_{i\in I} E_{J_i}^\sigma(B)$.

لم ۸,۴. فرض کنید (A,σ) یک MV-جبر حالت و $I,J,K \in I_\sigma(A)$ باشد. آنگاه

(1) $E_I^\sigma(J) \cap J \subseteq I$.

(2) $J \cap K \subseteq I$ اگر و تنها اگر $K \subseteq E_I^\sigma(J)$.

برهان. (۱) فرض کنید $x \in E_I^\sigma(J) \cap J$. آنگاه $x \in J$ و $x \in E_I^\sigma(J)$ لذا برای هر $b \in J$ نتیجه می‌شود.

$(x \oplus \sigma(x)) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \in I$.

در نظر می‌گیریم $x = b$، داریم $(x \oplus \sigma(x)) \wedge (x \oplus \sigma(x)) \in I$. از اینرو $\leq x \oplus \sigma(x) \in I$. در نتیجه بنا به ویژگی ایده‌آل $x \in I$. بنابراین $E_I^\sigma(\mathrm{J}) \cap \mathrm{J} \subseteq \mathrm{I}$.

(۲) فرض کنید $J \cap K \subseteq I$ و $x \in K$ آنگاه برای هر $b \in J$، داریم $(b \oplus \sigma(b)) \in J$ و $(x \oplus \sigma(x)) \in K$. طبق ویژگی مینیمم داریم

$(x \oplus \sigma(x)) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \leq x \oplus \sigma(x),$
$b \oplus \sigma(b)$

و چون J و K ایده‌آل هستند. پس
$(x \oplus \sigma(x)) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \in J \cap K$.

آنگاه برای هر $b \in J$ نتیجه می‌شود.
$(x \oplus \sigma(x)) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \in I$.

از اینرو $x \in E_I^\sigma(J)$، یعنی $K \subseteq E_I^\sigma(J)$. اکنون، فرض کنید $K \subseteq E_I^\sigma(J)$. طبق قسمت (۱)، داریم
$J \cap K \subseteq J \cap E_I^\sigma(J) \subseteq I.$

تعریف ۹,۴. ایده‌آل حالت I پایدار تحدید به زیرمجموعه B از A نامیده می‌شود،اگر $I = E_I^\sigma(B)$.

لم ۱۰,۴. فرض کنید I یک ایده‌آل حالت از (A, σ) باشد. آنگاه $E_I^\sigma(B)$ کوچکترین ایده‌آل پایدار تحدید به زیرمجموعه B از A است بطوریکه $I \subseteq E_I^\sigma(B)$.

برهان. بنا به گزاره ۱,۴، داریم $E_I^\sigma(B) \subseteq E^\sigma_{E_I^\sigma(B)}(B)$. برعکس، فرض کنید $x \in E^\sigma_{E_I^\sigma(B)}(B)$. آنگاه برای هر $b \in B$، داریم
$(x \oplus \sigma(x)) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \in E_I^\sigma(B).$

از اینرو برای هر $b' \in B$، داریم:

$$(((x \oplus \sigma(x)) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \oplus \sigma((x \oplus \sigma(x)) \wedge (b \oplus \sigma(b))) \wedge (b' \oplus \sigma(b')) \in I$$

در نظر می‌گیریم $b' = b$ و برای هر $b \in B$ بنا به لم ۳,۳ (۱)، داریم:

$$\Big(\big((x \oplus \sigma(x)) \wedge (b \oplus \sigma(b))\big) \oplus \sigma\big((x \oplus \sigma(x)) \wedge (b \oplus \sigma(b))\big)\Big) \wedge (b' \oplus \sigma(b')) \geq \big((x \oplus \sigma(x)) \wedge (b \oplus \sigma(b))\big) \wedge (b \oplus \sigma(b)) = (x \oplus \sigma(x)) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \in I$$

در نتیجه $x \in E_I^\sigma(B)$ لذا $E^\sigma_{E_I^\sigma(B)}(B) \subseteq E_I^\sigma(B)$ و در نتیجه $E^\sigma_{E_I^\sigma(B)}(B) = E_I^\sigma(B)$. بنابراین $E_I^\sigma(B)$ پایدار تحدید به B است.

اکنون، فرض کنید J یک ایده‌آل پایدار تحدید به B باشد بطوریکه $I \subseteq J$. از گزاره ۴,۴ (۲) نتیجه می‌شود که $E_I^\sigma(B) \subseteq E_J^\sigma(B) = J$.

نکته. یاداوری می‌کنیم اگر I, J ایده‌ال‌های MV-جبر A باشند به قسمی که $I \wedge J := I \cap J, I \vee J := (I \cup J]$، آنگاه $(A, \wedge, \vee)$ مشبکه کامل توزیع پذیراست[15].

نتیجه ۱۱,۴. بنا به لم ۱۰,۴، داریم $E_I^\sigma(B)$ یک ایده‌آل حالت پایدار تحدید به B است. از اینرو هر ایده‌آل حالت پایدار تحدید به B در $S(B)$ قرار دارد، جاییکه $S(B) = \{E_I^\sigma(B) | \, I \in I_\sigma(A)\}$. برای تمام عضوهای $E_I^\sigma(B), E_J^\sigma(B) \in \mathrm{S(B)}$، عمل‌های $\sqcap$ و $\sqcup$ را به صورت $E_I^\sigma(B) \sqcap E_J^\sigma(B) = E^\sigma_{I \wedge J}(B)$ و $E_I^\sigma(B) \sqcup E_J^\sigma(B) = E^\sigma_{I \vee J}(B)$ تعریف می‌کنیم. جاییکه $E^\sigma_{I \wedge J}(B)$ (یا $(E^\sigma_{I \vee J}(B)$ اینفیمم (سوپریمم) از $\{E_I^\sigma(B), E_J^\sigma(B)\}$ در $\mathrm{S(B)}$ می‌باشد. نشان می‌دهیم که $E^\sigma_{I \vee J}(B)$ سوپریمم از

$E_J^{\sigma}(B)$ و $E_I^{\sigma}(B)$ در S(B) است. بنا به گزاره ۴,۴ (۲)، داریم $E_I^{\sigma}(B), E_J^{\sigma}(B) \subseteq E_{I\vee J}^{\sigma}(B)$. برای هر ایده‌آل حالت پایدار تحدید به B مانند $E_K^{\sigma}(B)$، بطوریکه $E_I^{\sigma}(B), E_J^{\sigma}(B) \subseteq E_K^{\sigma}(B)$، ثابت می‌کنیم:

$$E_{I\vee J}^{\sigma}(B) \subseteq E_K^{\sigma}(B) .$$

فرض کنید $x \in E_{I\vee J}^{\sigma}(B)$ آنگاه برای هر $b \in B$، داریم $\left(x \oplus \sigma(x)\right) \wedge \left(b \oplus \sigma(b)\right) \in I \vee \mathrm{J}$. لذا $a \in I \subseteq E_I^{\sigma}(B)$ و $c \in J \subseteq E_J^{\sigma}(B)$ وجود دارند بطوریکه $\left(x \oplus \sigma(x)\right) \wedge \left(b \oplus \sigma(b)\right) \leq a \oplus \mathrm{c}$، در نتیجه برای هر $b \in B$ داریم:

$$\left(x \oplus \sigma(x)\right) \wedge \left(b \oplus \sigma(b)\right) \in E_I^{\sigma}(B) \vee E_J^{\sigma}(B) \subseteq E_K^{\sigma}(B) .$$

لذا بنا به لم ۱۰,۴، $x \in E_{E_K^{\sigma}(B)}^{\sigma}(B) = E_K^{\sigma}(B)$. یعنی $E_{I\vee J}^{\sigma}(B)$ سوپریممی از $\{E_I^{\sigma}(B), E_J^{\sigma}(B)\}$ در S(B) است.

همچنین بنا به نکته قبل چون $(A,\wedge,\vee)$ مشبکه کامل توزیع پذیراست، لذا داریم:

$$\begin{aligned}
&E_I^{\sigma}(B) \sqcap \left(E_J^{\sigma}(B) \sqcup E_K^{\sigma}(B)\right) = \\
&E_I^{\sigma}(B) \sqcap \left(E_{J\vee K}^{\sigma}(B)\right) = \\
&= E_{I\wedge(J\vee K)}^{\sigma}(B) \\
&= E_{(I\wedge J)\vee(I\wedge K)}^{\sigma}(B) \\
&= E_{I\wedge J}^{\sigma}(B) \sqcup E_{I\wedge K}^{\sigma}(B) \\
&= (E_I^{\sigma}(B) \sqcap E_J^{\sigma}(B)) \sqcup (E_I^{\sigma}(B) \sqcap E_K^{\sigma}(B).
\end{aligned}$$

بنابراین $(S(B),\sqcap,\sqcup)$ یک مشبکه توزیع‌پذیر است.

نتیجه ۱۲,۴. اگر $I \in I_{\sigma}(A)$ و $B \subseteq A$، آنگاه شرایط زیر برقرارند:

(1) $E_I^{\sigma}(I) = E_I^{\sigma}(0) = A.$

(2) $E_I^{\sigma}(B) = E_I^{\sigma}(E_I^{\sigma}(E_I^{\sigma}(B))).$

برهان.

(۱) بنا به گزاره ۴,۴ (۳) و چون $I \subseteq I$ نتیجه می‌شود $E_I^{\sigma}(I) = A$. همچنین چون $\{0\} \subseteq I$، همانند قبل $E_I^{\sigma}(0) = A$.

(۲) بنا به گزاره ۴,۴ (۴)، داریم $B \subseteq E_I^{\sigma}(E_I^{\sigma}(B))$ و بنا به گزاره ۴,۴ (۱)، نتیجه می‌شود

$$E_I^{\sigma}(E_I^{\sigma}(E_I^{\sigma}(B))) \subseteq E_I^{\sigma}(B).$$

حال نشان می‌دهیم

$$E_I^{\sigma}(B) \subseteq E_I^{\sigma}(E_I^{\sigma}(E_I^{\sigma}(B))) .$$

فرض کنید $x \in E_I^{\sigma}(B)$. آنگاه برای هر $b \in B$ داریم:

$$(x \oplus \sigma(x)) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \in I .$$

بنا به گزاره ۴,۴ (۴) چون $B \subseteq E_I^{\sigma}(E_I^{\sigma}(\mathrm{B}))$، لذا $(x \oplus \sigma(x)) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \in I$

برای هر $b \in E_I^{\sigma}(E_I^{\sigma}(B))$. در نتیجه $x \in E_I^{\sigma}(E_I^{\sigma}(E_I^{\sigma}(B)))$.

بنابراین $E_I^{\sigma}(B) = E_I^{\sigma}(E_I^{\sigma}(E_I^{\sigma}(B)))$.

قضیه ۱۳,۴. فرض کنید I یک ایده‌آل حالت سره از (A,σ) باشد و B زیرمجموعه A، آنگاه $E_I^{\sigma}(B) \cap B \subseteq I$.

برهان. فرض کنید $x \in E_I^{\sigma}(B) \cap B$، آنگاه $x \in E_I^{\sigma}(B)$ و $x \in B$، لذا برای هر $b \in B$، داریم:

$$\left(x \oplus \sigma(x)\right) \wedge \left(b \oplus \sigma(b)\right) \in I.$$

برای $b = x \in B$ نتیجه می‌شود

$$x \oplus \sigma(x) = \left(x \oplus \sigma(x)\right) \wedge \left(x \oplus \sigma(x)\right) \in I$$

بنا به لم ۳٫۳ (۱)، داریم $x \le x \oplus \sigma(x)$ و بنا به ویژگی ایده‌آل داریم $x \in I$. بنابراین $E_I^{\sigma}(B) \cap B \subseteq I$.

نتیجه ۱۴٫۴. $E_{\{0\}}^{\sigma}(B) \cap B = \{0\}$.

گزاره ۱۵٫۴. فرض کنید (A,τ) و (B,σ) دو MV-جبر حالت و $f: A \to B$ یک MV-همریختی حالت باشد بطوریکه $f(A') = B'$، جاییکه A' و B' به ترتیب زیرمجموعه‌های A B هستند.
آنگاه شرایط زیر برقرارند:

(۱) اگر I یک ایده‌آل حالت پایدار تحدید به B' باشد، آنگاه $f^{-1}(I)$ یک ایده‌آل حالت پایدار تحدید به A' است.

(۲) اگر f پوشا باشد، I یک ایده‌آل حالت پایدار تحدید به A' و $Ker(f) \subseteq I$ باشد، آنگاه $f(I)$ یک ایده‌آل حالت پایدارتحدید به B' است.

برهان. (۱) فرض کنید I یک ایده‌آل حالت پایدار تحدید به B' باشد. آنگاه $I = E_I^{\sigma}(B')$، کافی است نشان دهیم

$$f^{-1}(I) = f^{-1}\big(E_I^{\sigma}(B')\big) = E_{f^{-1}(I)}^{\tau}(A').$$

$$\begin{aligned}
&x \in E_{f^{-1}(I)}^{\tau}(A') \Leftrightarrow \big(x \oplus \tau(x)\big) \wedge \\
&\big(a \oplus \tau(a)\big) \in f^{-1}(I), \forall a \in A' \\
&\Leftrightarrow f\Big(\big(x \oplus \tau(x)\big) \wedge \big(a \oplus \tau(a)\big)\Big) \in I, \forall a \in A' \\
&\Leftrightarrow \Big(f(x) \oplus f\big(\tau(x)\big)\Big) \wedge \Big(f(a) \oplus \\
&f\big(\tau(a)\big)\Big) \in I, \forall a \in A' \\
&\Leftrightarrow \Big(f(x) \oplus \sigma\big(f(x)\big)\Big) \wedge \Big(f(a) \oplus \\
&\sigma\big(f(a)\big)\Big) \in I, \forall a \in A' \\
&\Leftrightarrow \Big(f(x) \oplus \sigma\big(f(x)\big)\Big) \wedge \big(f(b) \oplus \sigma(b)\big) \in \\
&I, \forall b \in B' \\
&\Leftrightarrow f(x) \in E_I^{\sigma}(B') \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}\big(E_I^{\sigma}(B')\big).
\end{aligned}$$

(۲) فرض کنید I یک ایده‌آل حالت پایدار تحدید به A' باشد. بوضوح، $f(I)$ یک ایده‌آل حالت از B است. کافی است نشان دهیم که

$$E_{f(I)}^{\sigma}(B') = f\big(E_I^{\tau}(A')\big) = f(I).$$

فرض کنید $x \in f(E_I^{\tau}(A'))$. آنگاه $t \in E_I^{\tau}(A')$ وجود دارد به قسمی که $x = f(t)$. لذا برای هر $a \in A'$ داریم

$$\big(t \oplus \tau(t)\big) \wedge \big(a \oplus \tau(a)\big) \in I.$$

از اینرو برای هر $b = f(a) \in B'$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\big(x \oplus \sigma(x)\big) \wedge \big(b \oplus \sigma(b)\big) = \Big(f(t) \oplus \\
&\sigma\big(f(t)\big)\Big) \wedge \Big(f(a) \oplus \sigma\big(f(a)\big)\Big) \\
&= \big(f(t) \oplus f(\tau(t)\big) \wedge \Big(f(a) \oplus f\big(\tau(a)\big)\Big) \\
&= f\big(t \oplus \tau(t)\big) \wedge f\big(a \oplus \tau(a)\big) \\
&= f\Big(\big(t \oplus \tau(t)\big) \wedge \big(a \oplus \tau(a)\big)\Big) \in f(I).
\end{aligned}$$

در نتیجه $x \in E_{f(I)}^{\sigma}(B')$. برعکس، فرض کنید $x \in E_{f(I)}^{\sigma}(B')$، چون f پوشاست، $s \in A$ وجود دارد به قسمی که $f(s) = x$. لذا داریم:

$$\begin{aligned}
&x \in E_{f(I)}^{\sigma}(B') \Leftrightarrow \big(x \oplus \sigma(x)\big) \wedge \\
&\big(b \oplus \sigma(b)\big) \in f(I), \forall b \in B' \\
&\Leftrightarrow \big(f(s) \oplus f(\tau(s)\big) \wedge \Big(f(a') \oplus \\
&f\big(\tau(a')\big)\Big) \in f(I), a' \in A' \\
&\Leftrightarrow f\Big(\big(s \oplus \tau(s)\big) \wedge \big(a' \oplus \tau(a')\big)\Big) = \\
&f(t), \exists t \in I, \forall a' \in A' \\
&\Leftrightarrow \Big(\big(s \oplus \tau(s)\big) \wedge \big(a' \oplus \tau(a')\big)\Big) \odot t^* \in \\
&Ker(f) \subseteq I, t \in I, \forall a' \in A' \\
&\Leftrightarrow \big(s \oplus \tau(s)\big) \wedge \big(a' \oplus \tau(a')\big) \\
&\le t \vee \Big(\big(s \oplus \tau(s)\big) \wedge \big(a' \oplus \tau(a')\big)\Big) \\
&= t \oplus (t^* \odot (\big(s \oplus \tau(s)\big) \wedge \big(a' \oplus \\
&\tau(a')\big)) \in I, \forall a' \in A' \\
&\Leftrightarrow \big(s \oplus \tau(s)\big) \wedge \big(a' \oplus \tau(a')\big) \in I, \forall a' \in A' \\
&\Leftrightarrow s \in E_I^{\tau}(A'), \\
&\Leftrightarrow x \in f\big(E_I^{\tau}(A')\big).
\end{aligned}$$

بنابراین $f(I)$ یک ایده‌آل حالت پایدار تحدید به B' است.

نتیجه ۱۶٫۴. فرض کنید (A,τ) و (D,σ) دو MV-جبر حالت و $f: A \to D$ یک MV-همریختی

حالت پوشا باشد. آنگاه $E^{\tau}_{Ker(f)}(B) = f^{-1}(E^{\sigma}_{\{0\}}(C))$ برای $B \subseteq A$ بطوریکه $C \subseteq D$ بطوریکه $f(B) = C$.

گزاره ۱۷,۴. اگر I یک ایده‌آل حالت اول و $E^{\sigma}_{I}(B)$ ایده‌آل حالت سره از (A, σ) باشد، آنگاه I پایدار تحدید به B است.

برهان. فرض کنید I پایدار تحدید به B نباشد. آنگاه $E^{\sigma}_{I}(B) \neq I$ و بنا به قضیه ۱,۴، $x \in E^{\sigma}_{I}(B)$ وجود دارد به قسمی که $x \notin I$. از اینرو برای هر $b \in B$، داریم $\left(x \oplus \sigma(x)\right) \wedge \left(b \oplus \sigma(b)\right) \in I$ چون I ایده‌آل حالت اول است لذا $b \in I$. در نتیجه $B \subseteq I$. بنا به گزاره ۴,۴ (۳)، نتیجه می‌شود $E^{\sigma}_{I}(B) = A$. این یک تناقض است. بنابراین $E^{\sigma}_{I}(B) = I$.

قضیه ۱۸,۴. فرض کنید I یک ایده‌آل حالت ماکسیمال و $E^{\sigma}_{I}(B)$ یک ایده‌آل حالت سره از (A, σ) باشد، آنگاه $E^{\sigma}_{I}(B)$ یک ایده‌آل حالت ماکسیمال و I پایدار تحدید به B است.

برهان. بنا به قضیه ۴,۱، نتیجه می‌شود $I \subseteq E^{\sigma}_{I}(B)$. چون I یک ایده‌آل حالت ماکسیمال و $E^{\sigma}_{I}(B)$ یک ایده‌آل حالت سره از (A, σ) است، لذا نتیجه می‌شود $I = E^{\sigma}_{I}(B)$.

قضیه ۱۹,۴. فرض کنید I یک ایده‌آل حالت سرسخت و $E^{\sigma}_{I}(B)$ یک ایده‌آل حالت سره از (A, σ) باشد، آنگاه $E^{\sigma}_{I}(B)$ یک ایده‌آل حالت سرسخت و I پایدار تحدید به B است.

برهان. بنا به قضیه ۱,۴ چون $I \subseteq E^{\sigma}_{I}(B)$ و بنا به تعریف ۱۷,۳، واضح است $E^{\sigma}_{I}(B)$ یک ایده‌آل حالت سرسخت است. فرض کنید I یک ایده‌آل حالت سرسخت از (A, σ) باشد. آنگاه بنا به قضیه ۱۸,۳، I یک ایده‌آل حالت ماکسیمال از (A, σ) است. در نتیجه بنا به قضیه ۱۸,۴، I پایدار تحدید به B است.

مثال زیر نشان می‌دهد هر ایده‌آل حالت پایدار از (A, σ) ممکن است یک ایده‌آل حالت سرسخت از (A, σ) نباشد.

مثال ۲۰,۴. فرض کنید $A = \{0, a, b, 1\}$، جاییکه $0 < a, b < 1$. عمل‌های $\odot$، $\oplus$ و $*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\odot$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

$\oplus$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

$*$	0	a	b	1
	1	b	a	0

آنگاه $(A, \oplus, *, 0, 1)$ یک MV-جبر است [15]. اکنون نگاشت σ روی A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ b & x = a \\ a & x = b \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که (A, σ) یک MV-جبر حالت و $I = \{0\}$ یک ایده‌آل حالت پایدار از (A, σ) می‌باشد چون $b = b \odot b = \sigma(a) \odot \sigma(b)^{*} \notin I$ و $a = a \odot a = \sigma(b) \odot \sigma(a)^{*} \notin I$، از اینرو I ایده‌آل حالت سر سخت از (A, σ) نمی‌باشد.

قضیه ۲۱,۴. فرض کنید I یک ایده‌آل حالت اول و بولی، $E_I^\sigma(B)$ یک ایده‌آل حالت سره از (A,σ) باشد، آنگاه $E_I^\sigma(B)$ یک ایده‌آل حالت بولی و I پایدار تحدید به B است.

برهان. چون I یک ایده‌آل حالت بولی است و $I \subseteq E_I^\sigma(B)$، بنا به تعریف ۱۹,۲، داریم $E_I^\sigma(B)$ یک ایده‌آل حالت بولی است. فرض کنید I یک ایده‌آل حالت اول و بولی از (A,σ) باشد. آنگاه بنا به قضیه ۲۰,۳، I یک ایده‌آل حالت سرسخت از (A,σ) است. در نتیجه بنا به قضیه ۱۹,۴، I پایدار تحدید به B است.

نتیجه ۲۲,۴. $x^* \in E_I^\sigma(B)$ اگر و تنها اگر I یک ایده‌آل حالت بولی از (A,σ) باشد.

مثال زیر نشان می‌دهد هر ایده‌آل حالت پایدار از (A,σ) ممکن است یک ایده‌آل حالت بولی از (A,σ) نباشد.

مثال ۲۳,۴. در مثال ۳,۳، به راحتی می‌توان ثابت کرد که $I=\{0\}$ یک ایده‌آل حالت پایدار تحدید به $B=\{b,c,d\}$ است اما I ایده‌آل حالت بولی از (A,σ) نیست چون

$$\big(c \oplus \sigma(c)\big) \wedge \big(b \oplus \sigma(b)\big) = b \notin I.$$

قضیه ۲۴,۴. فرض کنید I یک ایده‌آل حالت نیمه ماکسیمال از (A,σ) باشد، آنگاه $E_I^\sigma(B)$ یک ایده‌آل حالت نیمه ماکسیمال است.

برهان. چون I یک ایده‌آل حالت نیمه ماکسیمال است و $I \subseteq E_I^\sigma(B)$، بنا به تعریف ۲۳,۳، داریم $E_I^\sigma(B)$ یک ایده‌آل حالت نیمه ماکسیمال است.

مثال زیر نشان می‌دهد هر ایده‌آل حالت نیمه ماکسیمال از (A,σ) ممکن است یک ایده‌آل حالت پایدار از (A,σ) نباشد.

مثال ۲۵,۴. در مثال ۲۰,۴، نگاشت σ روی A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & x = 1, a \\ 0 & x = 0, b \end{cases}$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که (A,σ) یک MV-جبر حالت و $I=\{0,b\}$ یک ایده‌آل حالت از (A,σ) و $Rad_\sigma(I)=I$ است. از اینرو I یک ایده‌آل حالت نیمه ماکسیمال از (A,σ) است امّا I پایدار تحدید به $B=\{a\}$ نیست چون برای $a \in B$ داریم:

$$\big(1 \oplus \sigma(1)\big) \wedge \big(a \oplus \sigma(a)\big) = 1 \wedge 1 = 1 \notin I$$

قضیه ۲۶,۴. فرض کنید $B \subseteq C$ و I یک ایده‌آل حالت پایدار تحدید به B باشد. آنگاه I یک ایده‌آل حالت پایدار تحدید به C است.

برهان. چون I یک ایده‌آل حالت پایدار تحدید به B است، داریم $I = E_I^\sigma(B)$. در نتیجه بنا به قضیه ۱,۴ و گزاره ۴,۴ (۱)، داریم

$$I \subseteq E_I^\sigma(C) \subseteq E_I^\sigma(B) = I\ .$$

لذا نتیجه می‌شود I یک ایده‌آل حالت پایدار تحدید به C است.

لم ۲۷,۴. فرض کنید I یک ایده‌آل حالت و B زیر مجموعه‌ای از A باشد. آنگاه در جبر هایتینگ $(I_\sigma(A), \cap, \vee, \hookrightarrow_\sigma, \{0\}, A)$، داریم

$$E_I^\sigma(B) = (B]_\sigma \hookrightarrow_\sigma I.$$

برهان. نشان می‌دهیم برای ایده‌آل حالت I و زیر مجموعه B از A، $E_I^\sigma(B) = (B]_\sigma \hookrightarrow_\sigma I$. فرض کنید $x \in E_I^\sigma(B)$. ثابت می‌کنیم

$$x \in (B]_\sigma \hookrightarrow_\sigma I\ .$$

لذا کافی است ثابت کنیم $[B]_\sigma \cap [x]_\sigma \subseteq I$. فرض کنید $t \in [B]_\sigma \cap [x]_\sigma$، آنگاه بنا به لم ۱۴،۳، $b_i \in B$ و $n_i \geq 1$ و $k \geq 1$ و $n \geq 1$ وجود دارند به قسمی که

$$t \leq n_1\big(b_1 \oplus \sigma(b_1)\big) \oplus \cdots \oplus n_k\big(b_k \oplus \sigma(b_k)\big)$$ و
$$t \leq n\big(x \oplus \sigma(x)\big).$$

بنا به لم ۳،۳ (۵)، داریم:

$$t = t \wedge t \leq \Big(n_1\big(b_1 \oplus \sigma(b_1)\big) \oplus \cdots \oplus n_k\big(b_k \oplus \sigma(b_k)\big)\Big) \wedge n\big(x \oplus \sigma(x)\big)$$
$$\leq (n\big(x \oplus \sigma(x)\big) \wedge n_1\big(b_1 \oplus \sigma(b_1)\big)) \oplus \cdots \oplus (n\big(x \oplus \sigma(x)\big) \wedge n_k\big(b_k \oplus \sigma(b_k)\big))$$

چون $x \in E_I^\sigma(B) \in I_\sigma(A)$، لذا بنا به ویژگی ایده‌آل و لم ۳،۳ (۶)، داریم:

$$n\big(x \oplus \sigma(x)\big) \wedge n_i\big(b_i \oplus \sigma(b_i)\big) \leq nn_i((x \oplus \sigma(x)\big) \wedge \big(b_i \oplus \sigma(b_i)\big)) \in I$$

لذا

$$n\big(x \oplus \sigma(x)\big) \wedge n_i\big(b_i \oplus \sigma(b_i)\big) \in I, \quad (1 \leq i \leq k).$$

در نتیجه $t \in I$. لذا $[B]_\sigma \cap [x]_\sigma \subseteq I$ و داریم $E_I^\sigma(B) \subseteq [B]_\sigma \hookrightarrow_\sigma I$. برعکس، فرض کنید $x \in [B]_\sigma \hookrightarrow_\sigma I$. از اینرو بنا به لم ۲۵،۳ (۴)، برای هر $b \in B$ داریم:

$$\Big(\big(b \oplus \sigma(b)\big) \wedge \big(x \oplus \sigma(x)\big)\Big]_\sigma = (b]_\sigma \cap (x]_\sigma \subseteq (B]_\sigma \cap (x]_\sigma \subseteq I.$$

در نتیجه برای هر $b \in B$ داریم

$$\big(b \oplus \sigma(b)\big) \wedge \big(x \oplus \sigma(x)\big) \in I$$ و
$$x \in E_I^\sigma(B).$$

لذا $[B]_\sigma \cap [x]_\sigma \subseteq E_I^\sigma(B)$. بنابراین در جبر هایتینگ $I_\sigma(A)$ داریم $E_I^\sigma(B) = [B]_\sigma \hookrightarrow_\sigma I$.

لم ۲۸،۳. یک MV-جبر حالت (A,σ) زنجیر حالت است اگر و تنها اگر برای $x, y \in A$،

$$\big(x \oplus \sigma(x)\big) \wedge \big(y \oplus \sigma(y)\big) = 0$$

آنگاه $\sigma(x) = 0$ یا $\sigma(y) = 0$.

برهان. فرض کنید (A,σ)یک MV-زنجیر حالت و $\big(x \oplus \sigma(x)\big) \wedge \big(y \oplus \sigma(y)\big) = 0$، برای $x, y \in A$. بنا به تعریف MV-زنجیر حالت داریم $\sigma(x) \leq \sigma(y)$ یا $\sigma(y) \leq \sigma(x)$. در نتیجه $\sigma(x) = 0$ یا $\sigma(y) = 0$. برعکس، برای هر $x, y \in A$، نشان می‌دهیم $\sigma(x) \leq \sigma(y)$ یا $\sigma(y) \leq \sigma(x)$.

در نظر می‌گیریم $a = \sigma(x) \odot \sigma(y)^*$ و $b = \sigma(y) \odot \sigma(x)^*$. بنا به لم ۱۱،۳ (۴)، داریم $\sigma(b) = b$ و $\sigma(a) = a$، همچنین بنا به لم ۳،۳ (۶) و (۷)، داریم:

$$\big(a \oplus \sigma(a)\big) \wedge \big(b \oplus \sigma(b)\big) = 2a \wedge 2b \leq 4(a \wedge b) = 0$$

در نتیجه

$$\big(a \oplus \sigma(a)\big) \wedge \big(b \oplus \sigma(b)\big) = 0,$$

بنا به فرض، داریم $a = \sigma(a) = 0$ یا $b = \sigma(b) = 0$. در نتیجه $\sigma(x) \odot \sigma(y)^* = 0$ یا $\sigma(y) \odot \sigma(x)^* = 0$.
لذا بنا به لم ۳،۳ (۲)، نتیجه می‌شود $\sigma(x) \leq \sigma(y)$ یا $\sigma(y) \leq \sigma(x)$. بنابراین (A,σ) یک MV-زنجیر حالت است.

قضیه ۲۹،۴. $(S(B), \sqcap, \sqcup, E_{\{0\}}^\sigma(B), A)$ یک جبر هایتینگ است.

برهان. برای هر $E_I^\sigma(B), E_J^\sigma(B), E_K^\sigma(B) \in S(B)$، کافی است نشان دهیم:

$(1) E_I^\sigma(B) \hookrightarrow_\sigma E_J^\sigma(B) \in S(B)$
$(2) E_I^\sigma(B) \sqcap E_J^\sigma(B) \subseteq E_K^\sigma(B) \Leftrightarrow$
$E_I^\sigma(B) \subseteq E_J^\sigma(B) \hookrightarrow_\sigma E_K^\sigma(B)$

بنا به گزاره ۲۷,۳ و لم‌های ۲۷,۴ و ۷,۳ (۲)، داریم:

$$\begin{aligned}
&E_I^\sigma(B) \hookrightarrow_\sigma E_J^\sigma(B) = \\
&((B]_\sigma \hookrightarrow_\sigma I) \hookrightarrow_\sigma ((B]_\sigma \hookrightarrow_\sigma J) = \\
&(B]_\sigma \hookrightarrow_\sigma \big(((B]_\sigma \hookrightarrow_\sigma I) \hookrightarrow_\sigma J\big) \\
&= \big((B]_\sigma \odot ((B]_\sigma \hookrightarrow_\sigma I)\big) \hookrightarrow_\sigma J \\
&= ((B]_\sigma \wedge I) \hookrightarrow_\sigma J \\
&= ((B]_\sigma \odot I) \hookrightarrow_\sigma J \\
&= (B]_\sigma \hookrightarrow_\sigma (I \hookrightarrow_\sigma J) \in S(B).
\end{aligned}$$

بنا به گزاره ۲۷,۳ و لم‌های ۲۷,۴ و ۷,۳ (۳) و (۱)، داریم:

$$\begin{aligned}
&E_I^\sigma(B) \sqcap E_J^\sigma(B) \subseteq E_K^\sigma(B) \\
&\Leftrightarrow E_{I\wedge J}^\sigma(B) \subseteq E_K^\sigma(B) \\
&\Leftrightarrow (B]_\sigma \hookrightarrow_\sigma (I \wedge J) \subseteq (B]_\sigma \hookrightarrow_\sigma K \\
&\Leftrightarrow (B]_\sigma \wedge \big((B]_\sigma \hookrightarrow_\sigma (I \wedge J)\big) \subseteq K \\
&\Leftrightarrow (B]_\sigma \wedge I \wedge J \subseteq K \\
&\Leftrightarrow (B]_\sigma \wedge I \subseteq J \hookrightarrow_\sigma K \\
&\Leftrightarrow (B]_\sigma \hookrightarrow_\sigma ((B]_\sigma \wedge I) \subseteq \\
&(B]_\sigma \hookrightarrow_\sigma (J \hookrightarrow_\sigma K) \\
&\Leftrightarrow ((B]_\sigma \hookrightarrow_\sigma (B]_\sigma) \wedge ((B]_\sigma \hookrightarrow_\sigma I) \subseteq \\
&(B]_\sigma \hookrightarrow_\sigma (J \hookrightarrow_\sigma K) \\
&\Leftrightarrow (B]_\sigma \hookrightarrow_\sigma I \subseteq (B]_\sigma \hookrightarrow_\sigma (J \hookrightarrow_\sigma K) \\
&\Leftrightarrow E_I^\sigma(B) \subseteq E_J^\sigma(B) \hookrightarrow_\sigma E_K^\sigma(B)
\end{aligned}$$

بنابراین $S(B)$ مجموعه همه ایده‌آل‌های حالت پایدار تحدید به B، جبر هایتینگ است.

فهرست منابع

[1] محمد سالار بارده، ایده‌ال‌های سرسخت n-لایه در MV-جبرها، پایان نامه ارشد دانشگاه شهید باهنر کرمان، (۱۳۹۵).

[2] C. C. Chang, Algebraic analysis of many valued logic, *Trans. Amer. Math. Soc.,* (1958), 467-490.

[3] R. Cignoli, I. M. L. D'Ottaviano, D. Mundici, *Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning*, Kluwer Academic, Dordrecht, (2000).

[4] L. C. Ciungu, A. Dvurecenskij, M. Hycko, State BL-algebras, Soft Comput., 15 (2011), 619-634.

[5] F. Forouzesh, Extended ideals in MV-algebras, Submitted.

[6] F.Forouzesh, A. Darijani, Some classes of state ideals in state MV-algebras, Eurasian Mathematical journal, 10 (2019), 37-48.

[7] F. Forouzesh, State radical of state ideals in state MV-algebras, Submitted.

[8] T. Flaminio, F. Montagna, An algebraic approach to states on MV-algebras. In: Novak V (ed) Fuzzy Logic 2, proceedings of the 5th EUSFLAT conference, September 1114, Ostrava, Vol II (2007), pp 201-206.

[9] T. Flaminio, F. Montagna, MV-algebras with internal states and probabilistic fuzzy logic. Int J Approx Reason, 50 (2009), 138-152.

[10] G. Georgescu, Bosbach states on fuzzy structures. Soft Comput, 8 (2004), 217-230.

[11] A. Iorgulescu, Algebras of logic as BCK-algebras, Academy of economic studies Bucharest, Romania, (2008).

[12] A. Kroupa, Every state on semisimpleMV-algebra is integral. Fuzzy Sets Syst, 157 (2006), 2771-2782.

[13] J. Kuhr, D. Mundici, De Fineti theorem and Borel states in $[0,1]$-valued algebraic logic. Int J Approx Reason, 46 (1986), 15-63.

[14] D. Mundici, Averaging the truth value in Lukasiewicz sentential logic. Studia Logica, 55 (1995), 113-127.

[15] D. Piciu. Algebras of fuzzy logic, Ed. Universitaria Craiova (2007).

[16] J. Rachunek, D. Salounova, State operators on MV-algebras, Soft Comput, 15 (2011), 327-334.