

حل معادلات انتگرال فازی نوع دوم با استفاده از روش فضای هیلبرت هسته باز تولید

صدیقه فرزانه جوان^۱، سعید عباس‌بندی^۲، محمدعلی فریبرزوی عراقی^{۳*}

- (^۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد علوم تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
- (^۲) گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران
- (^۳) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۱۲/۲۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۶/۰۳

چکیده

در این مطالعه، یک رویکرد جدید مبتنی بر روش فضای هیلبرت هسته باز تولید برای تقریب جواب معادلات انتگرال فازی نوع دوم خطی پیشنهاد شده است. بدین منظور ابتدا با استفاده از مفهوم فرم پارامتری معادله انتگرال فازی به یک دستگاه معادلات انتگرال قطعی تبدیل می‌شود. سپس برای حل این دستگاه به روش هسته باز تولید مستقل از فرآیند متعامد سازی گرام-اشمیت استفاده می‌شود. همچنین دو الگوریتم عددی براساس به کارگیری فرآیند گرام-اشمیت و بدون استفاده از آن مطرح می‌شوند. صورت کلی جواب عددی براساس روش هسته باز تولید معرفی و قضیه همگرایی جواب روش پیشنهادی به جواب دقیق معادله انتگرال فازی مطرح و اثبات می‌گردد. در نهایت یک معادله انتگرال فازی نمونه با استفاده از هر دو الگوریتم پیشنهادی حل و نتایج به ازای نقاط و سطوح مختلف با یکدیگر مقایسه می‌شوند. با توجه به مشکلات به کارگیری فرآیند گرام-اشمیت نتایج حاصل از الگوریتم جدید رضایت بخش هستند.

واژه‌های کلیدی: فضای هیلبرت هسته باز تولید، معادلات انتگرال فازی نوع دوم، فرآیند گرام-اشمیت، اعداد فازی.

۱- مقدمه

یکی از مباحث مهم در ریاضیات فازی حل معادلات انتگرال فازی است که برای توصیف و تحلیل مسائل دنیای واقعی به عنوان ابزارهای مهم ریاضی شناخته شده‌اند [۱ و ۴ و ۶ و ۷ و ۸ و ۱۰ و ۱۳ و ۱۵ و ۱۹ و ۲۲ و ۲۵]. معادلات انتگرال فازی در زمینه‌های مختلف علمی و مهندسی کاربرد دارند که از آنها برای معرفی مقادیر پارامتر نامشخص در مدل‌سازی بسیاری از فرآیندهای فیزیکی در دنیای واقعی بهره برده می‌شود [۱۹ و ۲۵]. در بسیاری از این معادله‌ها، از آنجایی که معمولاً برخی از پارامترها به طور عدم قطعیت ارائه می‌شوند، لذا برای حل این معضل لازم است که یک مدل مناسب و یک الگوریتم پایدار ارائه شود. شایان ذکر است که بحث عدم اطمینان در مراحل مختلف مدل‌سازی در بسیاری از موارد از جمله خطاها و تقریبها در مقادیر برآورد، جمع آوری داده‌ها، اندازه گیری داده‌های اولیه، پارامترها و ساختار مدل و غیره مطرح می‌شود.

با این حال، از آنجایی که ارائه یک فرمول صریح برای حل معادلات انتگرال فازی بسیار پیچیده بوده، لذا برای رفع این پیچیدگی داده‌های نامشخص، نیاز به تقریب‌های قابل اعتماد است. معمولاً با استفاده از پارامتری کردن اعداد فازی، معادله انتگرال فازی می‌تواند به یک دستگاه معادلات انتگرالی قطعی تبدیل شود که معمولاً قابل حل است. در این خصوص، از روش تبدیل لاپلاس فازی [۲۱]، روش تبدیل دیفرانسیل فازی [۲۰]، روش تجزیه آدومیان [۲] و روش تفاضل محدود [۱۷] نیز استفاده شده است.

سایر تکنیک‌های عددی که برای معادلات انتگرال فازی مبتنی بر موجک‌های فازی [۵]، درون یابی‌های لاگرانژ [۶]، توابع مثلثی [۱۴] و روش چبیشف [۳] ایجاد شده‌اند، می‌توانند مطالعه شوند. غلامی و همکاران برای حل مسائل مقدار مرزی فازی، یک روش فضای هسته باز تولیدی فازی را

ارائه دادند [۱۱]. در سال ۲۰۱۹، ال-صمدی یک روش جهت حل معادلات انتگرال مرتبه دوم فازی در فضای هیلبرت پیشنهاد کرد [۲۳].

در این مقاله، هدف اصلی حل معادله انتگرال خطی فازی زیر با استفاده از روش‌های فضای هسته بازتولید فازی بدون به کار گیری فرایند متعامدسازی گرام اشمیت است.

$$f(x) + \int_a^{b(\text{or } x)} K(x, t) \tilde{u}(t) dt = \tilde{u}(x),$$

$$a \leq x, t \leq b, \quad (1)$$

که در آن a و b پارامترهای ثابت محدود هستند، f یک تابع با مقادیر فازی پیوسته است، $K(x, t)$ تابع هسته اختیاری با مقادیر حقیقی است، همچنین $\tilde{u} \in w_2^1[a, b]$ تابع مجهول فازی است که تعیین می‌شود و $w_2^1[a, b]$ مربوط به فضای هسته بازتولید است. شرایط کافی برای وجود یک جواب منحصر به فرد برای معادله (۱) در [۱ و ۲ و ۶] آورده شده است. به‌طور کلی، هیچ روشی وجود ندارد که به دلیل پیچیدگی پارامترهای نامشخص مربوط به این معادلات، یک جواب صریح و واضح برای معادله انتگرال ولترا یا فردهلم ارائه دهد. بنابراین، برای حل این معادلات به یک روش عددی کارآمد قابل اعتماد نیاز است. به همین منظور، با استفاده از فرم پارامتری اعداد فازی، معادلات انتگرال ولترا فازی به دستگاه معادلات انتگرالی تبدیل می‌شود، سپس این دستگاه با استفاده از روش فضای هیلبرت هسته بازتولید (RKHS) حل می‌گردد. با توجه به عدم پایداری روند گرام-اشمیت، می‌توان این مشکل را برطرف کرد. در [۸]، نویسندگان روشی را برای حذف این فرایند در حالت قطعی پیشنهاد می‌دهند. در این پژوهش، با تعمیم این روش برای حالت فازی یک جواب تقریبی برای معادله (۱) بدست می‌آید.

ساختار این مقاله به شرح زیر می‌باشد. در بخش ۲ مفاهیم و پیش زمینه‌های لازم ارائه می‌شود. بخش ۳، فضای هیلبرت هسته بازتولیدی، در بخش ۴،

تعریف ۳.۲. اگر \tilde{u} و \tilde{v} اعداد فازی باشند به طوری که $[\tilde{u}]_\alpha = [\underline{u}(\alpha), \bar{u}(\alpha)]$ و $[\tilde{v}]_\alpha = [\underline{v}(\alpha), \bar{v}(\alpha)]$ باشند، در این صورت اعمال فازی بین آنها این گونه تعریف می‌شوند [۲۶]:

$$\begin{aligned} [\tilde{u} + \tilde{v}]_\alpha &= [\underline{u}(\alpha) + \underline{v}(\alpha), \bar{u}(\alpha) + \bar{v}(\alpha)], \\ [\tilde{u}]_\alpha &= [\underline{u}(\alpha), \bar{u}(\alpha)], \\ [\lambda \tilde{u}]_\alpha &= [\lambda \underline{u}(\alpha), \lambda \bar{u}(\alpha)], \quad \lambda \geq 0, \\ [\lambda \tilde{u}]_\alpha &= [\lambda \bar{u}(\alpha), \lambda \underline{u}(\alpha)], \quad \lambda < 0. \end{aligned}$$

تعریف ۴.۲. فرض کنید \tilde{F} تابعی باشد که توسط $\tilde{F}: V \rightarrow R_F$ تعریف شده است بطوریکه که V یک فضای بردار قطعی است. در این صورت \tilde{F} تابع با ارزش فازی در V نامیده می‌شود. برای هر $x \in V$ $\tilde{F}(x)$ یک عدد فازی است (از آنجا که $F(x) \in R_F$ ، دو عملکرد واقعی با ارزش $F(x)$ و $\bar{F}(x)$ را برای V می‌توان تعریف کرد. بنابراین، برای هر $\alpha \in [0, 1]$ اعداد قطعی، $\underline{F}(x, \alpha)$ و $\bar{F}(x, \alpha)$ محاسبه می‌شود [۱۵].

$$\begin{aligned} \underline{F}(x, \alpha) &= (\underline{F}(x))(\alpha), \\ \bar{F}(x, \alpha) &= (\bar{F}(x))(\alpha) \end{aligned} \quad (۲)$$

بنابراین، تابع ارزش فازی \tilde{F} تعریف شده در فضای بردار واقعی V می‌تواند یک خانواده از توابع با ارزش واقعی $\underline{F}(x, \alpha)$ و $\bar{F}(x, \alpha)$ را برای $\alpha \in [0, 1]$ ایجاد کند که در معادله (۵) ارائه شده‌اند. همچنین $\underline{F}(x, \alpha) \leq \bar{F}(x, \alpha)$ برای هر $\alpha \in [0, 1]$.

تعریف ۵.۲. تابع $\tilde{F}: V \subseteq R_F$ که $x \in V$ پیوسته است اگر $\underline{F}(x, \alpha)$ و $\bar{F}(x, \alpha)$ به ازای هر $x \in V$ و $\alpha \in [0, 1]$ دو تابع پیوسته باشند [۷].

تعریف ۶.۲. فرض کنید که $\tilde{F}: V \subseteq R_F$ انتگرال

معادله انتگرال فازی در فضای هسته باز تولید ارائه می‌شود و در آخر یک روش تقریبی و الگوریتم آن پیشنهاد می‌شود. اجرای روش در بخش ۵ و نتیجه گیری مقاله در بخش ۶ ارائه شده است.

۲- پیش زمینه‌ها

در این بخش، به طور خلاصه برخی از تعاریف و مجموعه‌های فازی مورد نیاز را به‌طور مختصر بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. [۱۰] عدد فازی \tilde{u} ، مجموعه فازی محدب و نرمال شده است که تابع عضویت آن در R قطعه‌ای پیوسته باشد. R_F مجموعه تمام اعداد فازی را نشان دهد، یعنی مجموعه نرمال، محدب، فازی، پیوسته قطعه‌ای، که به‌طور اجمالی مجموعه های فازی $\tilde{u}: R \rightarrow [0, 1]$ را پشتیبانی می‌کند.

$$0 < \alpha \leq 1 ;$$

$$[\tilde{u}]_\alpha = \{s \in R | \tilde{u}(s) \geq \alpha\}$$

مجموعه α -برش \tilde{u} را نشان می‌دهد. این مجموعه فشرده و غیر تهی برای هر $0 < \alpha \leq 1$ و $\tilde{u} \in R_F$ است. اگر $[\tilde{u}]_\alpha = [\underline{u}(\alpha), \bar{u}(\alpha)]$ به ترتیب \underline{u} و \bar{u} را به‌عنوان کران‌های پایینی و بالایی این مجموعه در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲.۲. فرم پارامتری اعداد فازی

فرم پارامتری یک عدد فازی با یک زوج مرتب از توابع به صورت $[u, \bar{u}]$ روی $I = [0, 1]$ معرفی می‌شود و شرایط زیر برای آن برقرار است [۱۶]:

(۱) $u: I \rightarrow R$ یک تابع صعودی کراندار و از چپ روی I پیوسته است.

(۲) $\bar{u}: I \rightarrow R$ یک تابع نزولی کراندار و از چپ روی بازه I پیوسته است.

$$(۳) \text{ برای } 0 \leq \alpha \leq 1. \underline{u}(1) \leq \bar{u}(1).$$

۳- فضای هیلبرت هسته باز تولید فازی

در ابتدا، از مفهوم هسته باز تولید برای ساختن فضای هیلبرت $w^m[a, b]$ استفاده می‌شود.

تعریف ۱.۳. تابع مطلق پیوسته فازی [۱۱] اگر $\tilde{u}(x)$ یک تابع فازی روی $I = [a, b]$ و $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ یک مجموعه‌ای از بازه‌های به صورت $(a_i, b_i) \subset I$ باشد. در صورتی که برای هر ε ، یک δ وجود داشته باشد بطوریکه برای $\sum_{k=1}^n d(\tilde{u}(b_k), \tilde{u}(a_k)) < \varepsilon$ و $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ آن‌گاه $\tilde{u}(x)$ یک تابع پیوسته مطلق فازی (FACF) روی I است.

تعریف ۲.۳. [۱۱] فضای فازی $w_2^1[a, b]$ بعنوان $\{ \tilde{u}'(x) \}$ یک تابع فازی است، $w_2^1[a, b]$ یک FACF بوده، و $\tilde{u}'(x) \in L^2[a, b]$ و $L^2[a, b]$ یک فضای فازی، $\tilde{u}(a) = 0$ و $\tilde{u}(b) = 0$ باشد. ضرب داخلی فازی در این فضا به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\langle \tilde{u}(x), \tilde{v}(x) \rangle_{w_2^1} = \tilde{u}(a)\tilde{v}(a) + \int_a^b \tilde{u}'(\tau)\tilde{v}'(\tau)d\tau; \tilde{u}, \tilde{v} \in w_2^1[a, b], \quad (۶)$$

به‌طوریکه $\langle \tilde{u}(x), \tilde{v}(x) \rangle_{w_2^1}$ یک ضرب داخلی فازی در فضای فازی $w_2^1[a, b]$ است. همچنین، نرم فازی در این فضا به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\tilde{u}(x)\|_{w_2^1} = \sqrt{\langle \tilde{u}(x), \tilde{u}(x) \rangle_{w_2^1}}.$$

در ادامه، فرض کنید که w_2^1 ضرب داخلی فازی در فضای فازی $w_2^1[a, b]$ باشد. همچنین $\|\cdot\|$ یک نرم فازی باشد.

تعریف ۳.۳. [۱۱] H را با $f_1(x), f_2(x)$ به طوری که $f_1(x)$ و $f_2(x)$ متعلق به H باشند در نظر بگیرید. اگر یک تابع فازی وجود داشته باشد

پذیر بوده و با توجه به x اگر $\underline{F}(x, \alpha)$ و $\overline{F}(x, \alpha)$ دو تابع انتگرال پذیر لیگ به ازای $x \in R$ و برای هر $\alpha \in [0, 1]$ و $(\int \underline{F}(x, \alpha)dx, \int \overline{F}(x, \alpha)dx)$ باشند. برای $\alpha \in [0, 1]$ انتگرال تابع فازی \tilde{F} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int [\tilde{F}(x)]_\alpha dx = \left(\int \underline{F}(x, \alpha)dx, \int \overline{F}(x, \alpha)dx \right) \quad (۳)$$

با استفاده از تعریف ۲.۲، $\int \underline{F}(x, \alpha)dx$ و $\int \overline{F}(x, \alpha)dx$ به ترتیب شرط‌های ۱ و ۲ و شرط ۳ را ارائه می‌کنند.

تعریف ۷.۲. [۷] فرض کنید $\tilde{F}: V \subseteq R_F$ و $\tilde{G}: V \subseteq R_F$ دو تابع فازی باشند. فاصله بین \tilde{F} و \tilde{G} بصورت زیر تعریف شده است:

$$D_F(\tilde{F}, \tilde{G}) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} H([\tilde{F}(x)]_\alpha, [\tilde{G}(x)]_\alpha) = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \left\{ \sup_{z \in [\tilde{F}(x)]_\alpha} H(z, [\tilde{G}(x)]_\alpha), \sup_{y \in [\tilde{G}(x)]_\alpha} H([\tilde{F}(x)]_\alpha, y) \right\} \quad (۴)$$

که در آن H معیار شناخته شده هاسدورف در خانواده همه زیر مجموعه‌های غیر تهی R است.

برای راحتی علامت گذاری، به ازای $\tilde{F}: V \subseteq R_F$ $\|\tilde{F}(x)\|_F^2 = D_F(\tilde{F}(x), \tilde{F}(x)), \forall x$. (۵)

تعریف ۸.۲. [۷] فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow R_F$ یک تابع فازی باشد. در این حالت، f در $x_0 \in [a, b]$ پیوسته بوده اگر $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: D(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

به طوری که $|x - x_0| < \delta$ و $x \in [a, b]$ اگر f برای هر $x_0 \in [a, b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه f یک تابع پیوسته فازی در $[a, b]$ است.

$$= [u(x)]_\alpha \quad a \leq x, t \leq b \quad (7)$$

به طوری که $[f(x)]_\alpha = [f_\alpha(x), \bar{f}_\alpha(x)]$ و $[g(x, s, u(s))]_\alpha = [g_\alpha(x), \bar{g}_\alpha(x)]$ بنابراین

$$\begin{aligned} \underline{g}_\alpha(x, s, u(s)) &= \\ \begin{cases} K(x, s)\underline{u}_\alpha(s) & K(x, s) \geq 0 \\ K(x, s)\bar{u}_\alpha(s) & K(x, s) < 0 \end{cases} & (8) \\ \bar{g}_\alpha(x, s, u(s)) &= \\ \begin{cases} K(x, s)\bar{u}_\alpha(s) & K(x, s) \geq 0 \\ K(x, s)\underline{u}_\alpha(s) & K(x, s) < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین، با توجه به نتایج قبلی، معادله انتگرال فازی رابطه (۱) را می‌توان به شکل دستگاه معادلات انتگرال قطعی زیر تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} \underline{f}_\alpha(x) + \int_a^{b(OR\ x)} \underline{g}_\alpha(x, s, u(s)) ds &= \\ \underline{u}_\alpha(x) & (9) \\ \bar{f}_\alpha(x) + \int_a^{b(OR\ x)} \bar{g}_\alpha(x, s, u(s)) ds &= \\ \bar{u}_\alpha(x) \end{aligned}$$

فرض کنید $R_x: I \rightarrow R_x$ تابعی فازی پیوسته باشد. اگر \tilde{u} ، (۱) را برآورده سازد، می‌توانیم بگوییم \tilde{u} یک جواب فازی برای معادله انتگرال فازی (۱) است. به منظور نشان دادن جواب عددی برای مسئله مدل، در نظر می‌گیریم که $L: w_2^1[a, b] \rightarrow w_2^1[a, b]$ یک عملگر خطی محدود است به گونه‌ای که $Lx(t) = x(t)$ که بنابراین، دستگاه (۹) را می‌توان به شکل دستگاه زیر تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} Lu(t) &= F(x, \underline{f}(x), Tu(x), T\bar{u}(x)), \quad (10) \\ L\bar{u}(x) &= G(x, \bar{f}(x), T\underline{u}(x), T\bar{u}(x)) \end{aligned}$$

به طوری که

$$\begin{aligned} T\underline{u}(x) &= \int_a^{b(OR\ x)} K(x, s)\underline{u}(s) ds \quad (11) \\ T\bar{u}(x) &= \int_a^{b(OR\ x)} K(x, s)\bar{u}(s) ds \end{aligned}$$

و $\underline{u}(x)$ ، $\bar{u}(x)$ ، $\underline{f}(x)$ و $\bar{f}(x)$ عضو $w_2^1[a, b]$ هستند. فرض کنید $\psi_i(x) = L \Phi_i(t)$ به طوری

بطوریکه $R_y(x) \in H$ و $f_1(x)$ شرط $f_1(x), R_y(x) \in H = f_1(x)$ را برآورده کند، آن‌گاه $R_y(x)$ بعنوان هسته بازتولید فازی از H نامیده می‌شود. همچنین، هسته باز تولید فازی از H یک فضای هسته بازتولید فازی نیز نامیده می‌شود.

۱.۳. جواب‌های دقیق و تقریبی

تعریف ۴.۳. (عملگر مشترک هیلبرت فازی)

گیریم H_1 و H_2 فضاهای هیلبرت فازی هستند، و $L: H_1 \rightarrow H_2$ یک عملگر خطی محدود فازی است، در این صورت $L: H_2 \rightarrow H_1$ یک عملگر مشترک فازی هیلبرت بوده در حالی که برای هر $x_1 \in H_1$ و $x_2 \in H_2$ خواهیم داشت $Lx_1, x_2 \in H$ بطوریکه $x_1, Lx_2 \in H_i$ $i = 1, 2, \dots$ ضرب داخلی فازی است. معادله (۱) با استفاده از فرآیند گرام-اشمیت، یک جواب تقریبی می‌دهد [۲۳]. ما سعی می‌کنیم روشی را جایگزین فرآیند گرام کرده و نتیجه آن را با نتیجه تقریبی حاصل از فرآیند گرام-اشمیت مقایسه کنیم.

۴- معادله انتگرال فازی در فضای هسته

بازتولید

در این بخش، معادلات انتگرال فازی را با استفاده از مفهوم انتگرال ریمان بررسی می‌کنیم که در آن معادلات انتگرال فازی به دستگاه معادلات انتگرال قطعی تبدیل می‌شوند. اگر جواب یک تابع فازی باشد، می‌توان این کارها را انجام داد و در نتیجه انتگرال باید به‌عنوان انتگرال فازی در نظر گرفته شود. به منظور طراحی الگوریتم RKHS برای حل معادله (۱)، گیریم:

$$g(x, s, \tilde{u}(s)) = K(x, s)\tilde{u}(s)$$

با در نظر گرفتن فرم پارامتری برای هر دو طرف

معادله انتگرال فازی (۱) خواهیم داشت:

$$[f(x)]_\alpha + \int_a^{b(OR\ x)} [g(x, s, u(s))]_\alpha ds$$

به طوری که $i = 1, 2, \dots$ هر $\Phi_i(t) = R_t(s)|_{s=x_i}$ که عملگر مزدوج L و \mathcal{X}_i زیر مجموعه متراکم روی بازه $[a, b]$ هستند.

از طرف دیگر، معادله (۱) همراه با خصوصیات تعریف شده در ۱.۲ و ۲.۲ نحوه سر و کار داشتن با جواب‌های عددی برای FIE را به ما نشان می‌دهد.

ما می‌توانیم IE فازی اصلی را به طور معادل به دستگاه قطعی IES تبدیل کنیم. در نتیجه، نیازی به بازنویسی روش‌های عددی برای IE قطعی در محیط فازی نیست، اما در عوض، می‌توانیم از روش‌های عددی مستقیم بر روی دستگاه معادلات انتگرال بدست آمده استفاده کنیم. فرآیند گرام-اشمیت معمولاً در این روش‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. غالب گوما و همکاران جواب تقریبی فرایند گرام را به صورت زیر معرفی کردند:

$$\underline{u}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F \left(\begin{matrix} x_k, \underline{f}(x_k), \\ T\underline{u}(x_k), T\bar{u}(x_k) \end{matrix} \right) \hat{\psi}_i(x)$$

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} G \left(\begin{matrix} x_k, \bar{f}(x_k), \\ T\underline{u}(x_k), T\bar{u}(x_k) \end{matrix} \right) \hat{\psi}_i(x)$$

هم‌چنین جواب‌های تقریبی از طریق رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$\underline{u}_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F \left(\begin{matrix} x_k, \underline{f}(x_k), T\underline{u}_{k-1}(x_k), \\ T\bar{u}_{k-1}(x_k) \end{matrix} \right) \hat{\psi}_i(x) \quad (16)$$

$$\bar{u}_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} G \left(\begin{matrix} x_k, \bar{f}(x_k), T\underline{u}_{k-1}(x_k), \\ T\bar{u}_{k-1}(x_k) \end{matrix} \right) \hat{\psi}_i(x)$$

به طوری که $\underline{u}_0(x)$ و $\bar{u}_0(x)$ عضو $w_2^1[a, b]$ هستند.

اثبات: (از قضیه ۲.۴) و فرایند (۱۶) بدیهی است که دنباله $\{\hat{\psi}_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دستگاه متعامد را در $w_2^1[a, b]$ شکل می‌دهد.

از آنجا که $\underline{u}(x), \bar{u}(x) \in w_2^1[a, b]$ جواب‌های دقیق برای دستگاه (۱۰) هستند، بنابراین $\underline{u}(x)$ می‌تواند به سری فوریه بر اساس توابع متعامد

$$\{\hat{\psi}_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ به صورت زیر گسترش یابد:}$$

$$\underline{u}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \underline{u}_i(x), \hat{\psi}_i(x) \quad w_2^1 \hat{\psi}_i(x) \quad (17)$$

و از آنجا که $w_2^1[a, b]$ فضای هیلبرت است، به این ترتیب سری (۱۷) همگرا در w_2^1 است. بنابراین $\underline{u}(x)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

قضیه ۱.۴. اگر $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ روی $[a, b]$ مطرح شود، آن‌گاه سیستم توابع متعامد $\{\hat{\psi}_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک سیستم کامل از $w_2^1[a, b]$ است و $L_s R_t(s)|_{s=x_i}$

برای اثبات این قضیه، مرجع [۹] را ببینید.

اگر برای حل معادله (۱)، از فرآیند گرام-اشمیت استفاده می‌کنیم که یک دنباله متعامد $\{\hat{\psi}_i\}_{i=1}^{\infty}$ از فضای $w_2^1[a, b]$ ایجاد می‌کند، به گونه‌ای که

$$\hat{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \hat{\psi}_k(x), \quad i = 1, 2, \dots \quad (12)$$

که در آن ضرایب متعامدسازی زیر هستند.

$$\beta_{11} = \frac{1}{\|\psi_1\|} \quad (13)$$

$$\beta_{ij} = \frac{-\sum_{k=j}^{i-1} c_{ik} \beta_{kj}}{\sqrt{\|\psi_i\|^2 - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}^2}} \quad (j < i) \quad (14)$$

$$\beta_{ii} = \frac{1}{\sqrt{\|\psi_i\|^2 - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}^2}} \quad (i > 1)$$

$$\begin{aligned} \underline{u}(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \underline{A}_i \hat{\psi}_i(x); \\ \underline{A}_i &= \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(x_k, \underline{f}(x_k), T\underline{u}_{k-1}(x_k), \\ & T\bar{u}_{k-1}(x_k)) \quad (۲۰) \\ \bar{u}(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \hat{\psi}_i(x); \\ \bar{A}_i &= \sum_{k=1}^i \beta_{ik} G(x_k, \bar{f}(x_k), T\underline{u}_{k-1}(x_k), \\ & T\bar{u}_{k-1}(x_k)) \end{aligned}$$

برای اثبات فوق، مرجع [۹] را ببینید.

قضیه ۴.۴. فرض کنید $\underline{u}(x), \bar{u}(x) \in W_2^1[a, b]$ که در (۱۵) ارائه شده‌اند جواب معادله (۱) و \underline{e}_n و \bar{e}_n به ترتیب، خطاهای جواب‌های تقریبی $\underline{u}_n(x)$ و $\bar{u}_n(x)$ طبق رابطه (۱۶) باشند. آن‌گاه خطاهای \underline{e}_n و \bar{e}_n بطور یکنواخت نزولی هستند.

اثبات: فرض کنیم $\underline{u}(x)$ و $\bar{u}(x)$ جواب معادله (۱۵) باشند. هم‌چنین $\underline{u}_n(x)$ و $\bar{u}_n(x)$ جواب معادله (۱۶) داده شده باشند. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \|\underline{e}_n\|_{W_2^1}^2 &= \|\underline{u}(x) - \underline{u}_n(x)\|_{W_2^1}^2 \\ &= \|\sum_{i=n+1}^{\infty} \underline{A}_i \hat{\psi}_i(x)\|_{W_2^1}^2 \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} (\underline{A}_i)^2 \quad (۲۱) \end{aligned}$$

هم‌چنین

$$\begin{aligned} \|\bar{e}_n\|_{W_2^1}^2 &= \|\bar{u}(x) - \bar{u}_n(x)\|_{W_2^1}^2 \\ &= \|\sum_{i=n+1}^{\infty} \bar{A}_i \hat{\psi}_i(x)\|_{W_2^1}^2 \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} (\bar{A}_i)^2 \quad (۲۲) \end{aligned}$$

واضح است $\|\underline{e}_n\|_{W_2^1}^2 \leq \|\bar{e}_n\|_{W_2^1}^2$. متعاقباً، خطای \underline{e}_n با در نظر گرفتن $\|\cdot\|_{W_2^1}$ ، به‌طور یکنواخت کاهش می‌یابد. بطور مشابه، خطای \bar{e}_n نیز با در نظر گرفتن $\|\cdot\|_{W_2^1}$ ، بطور یکنواخت کاهش می‌یابد. لذا اثبات کامل می‌شود. □

با این حال، در اجرای این الگوریتم در کامپیوتر، $\{\hat{\psi}_i\}_{i=1}^{\infty}$ به دلیل گرد کردن خطاها، کاملاً متعامد

$$\begin{aligned} \underline{u}(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \underline{u}(x), \hat{\psi}_i(x) w_2^1 \hat{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \underline{u}(x), \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \hat{\psi}_k(x) w_2^1 \hat{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \underline{u}(x), \hat{\psi}_k(x) w_2^1 \hat{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \underline{u}(x), L Q_k(x) w_2^1 \hat{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} L\underline{u}(x), Q_k(x) w_2^1 \hat{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} L\underline{u}(x_k) \hat{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(x_k, \underline{f}(x_k), T\underline{u}_{k-1}(x_k), \\ & T\bar{u}_{k-1}(x_k)) \hat{\psi}_i(x), \quad (۱۸) \end{aligned}$$

و هم‌چنین $\bar{u}(x)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{u}(x), \hat{\psi}_i(x) w_2^1 \hat{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{u}(x), \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \hat{\psi}_k(x) w_2^1 \hat{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \bar{u}(x), \hat{\psi}_k(x) w_2^1 \hat{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \bar{u}(x), L Q_k(x) w_2^1 \hat{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} L\bar{u}(x), Q_k(x) w_2^1 \hat{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} L\bar{u}(x_k) \hat{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} G(x_k, \bar{f}(x_k), \\ & T\underline{u}_{k-1}(x_k), T\bar{u}_{k-1}(x_k)) \hat{\psi}_i(x). \quad (۱۹) \end{aligned}$$

جواب‌های تقریبی را می‌توان مستقیماً با در نظر گرفتن عبارات بسیار دقیق در نمایش سری برای جواب‌های دقیق $\underline{u}(x)$ و $\bar{u}(x)$ در (۱۵) بدست آورد. بنابراین، اثبات قضیه کامل است. □

قضیه ۴.۳. فرض کنید که $\|\underline{u}_n(x)\|_{W_2^1}$ و $\|\bar{u}_n(x)\|_{W_2^1}$ در (۱۶) محدود شوند. اگر $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ بر روی $[a, b]$ تعریف شود، و $F(x, \underline{f}(x), T\underline{u}(x), T\bar{u}(x))$ و $G(x, \bar{f}(x), T\underline{u}(x), T\bar{u}(x))$ عضو $W_2^1[a, b]$ بوده و برای هر یک از $\underline{u}_n(x), \bar{u}_n(x) \in W_2^1[a, b]$ جواب‌های تقریبی $\underline{u}_n(x)$ و $\bar{u}_n(x)$ در فرمول‌های تکراری (۱۶) به جواب‌های تحلیلی $\underline{u}(x)$ و $\bar{u}(x)$ در دستگاه (۱۰) همگرا می‌شوند و جواب‌های دقیق بصورت زیر بیان می‌شوند:

از آنجایی که $\hat{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(x)$ داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \underline{\Delta}_i \psi_i(x) &= \sum_{i=1}^n \underline{B}_i \hat{\psi}_i(x) = \\ \sum_{i=1}^n \underline{B}_i \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \hat{\psi}_k(x) &= \\ \sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n \underline{B}_i \beta_{ik} \hat{\psi}_k(x). & \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \bar{\Delta}_i \psi_i(x) &= \sum_{i=1}^n \bar{B}_i \hat{\psi}_i(x) = \\ \sum_{i=1}^n \bar{B}_i \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \hat{\psi}_k(x) &= \\ \sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n \bar{B}_i \beta_{ik} \hat{\psi}_k(x). \end{aligned}$$

می‌دانیم $\{\hat{\psi}_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\underline{\Delta}_i = \sum_{k=1}^n \underline{B}_i \beta_{ik}$ ، $\bar{\Delta}_i = \sum_{k=1}^n \bar{B}_i \beta_{ik}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) مستقل خطی هستند، لذا

$$\begin{cases} \underline{\Delta}_k = \beta^T \underline{B}_k, \\ \bar{\Delta}_k = \beta^T \bar{B}_k. \end{cases} \quad (27)$$

با توجه به تعریف عملگر L واضح است که

$$\begin{aligned} L\underline{u}_n(t) &= \underline{u}_n(t), \\ L\bar{u}_n(x) &= \bar{u}_n(x). \end{aligned} \quad (28)$$

برای هر $i = 1, \dots, n$ داریم:

$$\begin{aligned} L\underline{u}_n(x), \hat{\psi}_i &= \underline{u}_n(x), \hat{\psi}_i \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n \underline{B}_j L\hat{\psi}_j, \hat{\psi}_i &= \underline{u}_n(x), \hat{\psi}_i \end{aligned} \quad (29a)$$

$$\begin{aligned} L\bar{u}_n(x), \hat{\psi}_i &= \bar{u}_n(x), \hat{\psi}_i \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n \bar{B}_j L\hat{\psi}_j, \hat{\psi}_i &= \bar{u}_n(x), \hat{\psi}_i \end{aligned} \quad (29b)$$

دو طرف رابطه (29a) را ساده می‌کنیم. از سمت چپ رابطه (29a) داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \underline{B}_j L\hat{\psi}_j, \hat{\psi}_i &= \\ \sum_{j=1}^n \underline{B}_j \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \sum_{l=1}^j \beta_{jl} L\psi_l, \psi_k & \quad (30) \\ = \sum_{j=1}^n \underline{B}_j \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j \beta_{ik} L\psi_l, \psi_k \beta_{ij}^T & \\ = \sum_{j=1}^n \underline{B}_j (\beta \psi \beta^T)_{ij}, \end{aligned}$$

و از سمت راست رابطه (29a) و به کمک قضیه ۴.۱ داریم

$$\underline{u}_n(x), \hat{\psi}_i = \underline{B}_i = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \underline{u}_{k-1}(x_k),$$

و از رابطه (29a) و (30) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\beta \psi \beta^T \underline{B} = \beta \underline{u}. \quad (31)$$

نیست. به عبارت دیگر، فرآیند گرام-اشمیت از نظر عددی ناپایدار است و هزینه محاسباتی الگوریتم زیاد است. بنابراین، فرآیند زیر که تعمیمی از فرآیند گفته شده در مرجع [۸] است برای تقریب جواب انتگرال فازی نوع دوم به جای فرآیند گرام-اشمیت پیشنهاد شده است.

این موضوع قضیه بعدی است که در آن از نمادهای زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} \beta_n &= \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & & 0 \\ & & \dots & \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix} \\ \psi_n &= \begin{bmatrix} \psi_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & & 0 \\ & & \dots & \\ \psi_{n1} & \psi_{n2} & \dots & \psi_{nn} \end{bmatrix} \quad (23) \\ \tilde{u} &= \begin{bmatrix} \tilde{u}_0(x_1) \\ \tilde{u}_1(x_2) \\ \dots \\ \tilde{u}_{n-1}(x_n) \end{bmatrix} \\ \tilde{B} &= \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \dots \\ \tilde{B}_n \end{bmatrix} \\ \tilde{\Delta} &= \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}_1 \\ \tilde{\Delta}_2 \\ \dots \\ \tilde{\Delta}_n \end{bmatrix} \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

قضیه ۴.۴. فرض کنیم $\varphi_{ij} = [\psi^{-1}]_{ij}$. جواب تقریبی رابطه‌های (۱۸) و (۱۹) به ترتیب به صورت زیر نیز قابل نمایش است:

$$\begin{aligned} \underline{u}_n(x) &= \sum_{i=1}^n \underline{\Delta}_i \psi_i(x); \\ \underline{\Delta}_i &= \sum_{k=1}^i \varphi_{ik} \underline{u}_{k-1}(x_k) \quad (24) \\ \bar{u}_n(x) &= \sum_{i=1}^n \bar{\Delta}_i \psi_i(x). \\ \bar{\Delta}_i &= \sum_{k=1}^i \varphi_{ik} \bar{u}_{k-1}(x_k) \end{aligned}$$

اثبات: با در نظر گرفتن $\tilde{B} = (\underline{B}, \bar{B})$ فرض کنیم

$$\begin{aligned} \underline{u}_n(x) &= \sum_{i=1}^n \underline{\Delta}_i \psi_i(x) = \sum_{i=1}^n \underline{B}_i \hat{\psi}_i(x). \quad (25) \\ \bar{u}_n(x) &= \sum_{i=1}^n \bar{\Delta}_i \psi_i(x) = \sum_{i=1}^n \bar{B}_i \hat{\psi}_i(x). \end{aligned}$$

بازتولیدی مورد استفاده بود، تغییر یافته و ناپایداری عددی و حجم محاسبات مربوط به آن از الگوریتم کاهش یافته است. به علاوه با استفاده از ایده $\tilde{u}_0(x_1) = \tilde{u}(x_1)$ در اولین گام روش بازگشتی به الگوریتم ۴.۲ خواهیم رسید.

الگوریتم ۴-۱- روش RKHS (با به کارگیری روش گرام-اشمیت)

ورودی. نقاطی مفروض در بازه $[0,1]$ ، عدد $R_x(s)$ ، عملگر L و توابع G, F, a ، مقادیر m و b .

خروجی. جواب تقریبی $\underline{u}_n(x)$ و $\bar{u}_n(x)$.

گام اول. برای $a \leq x$ و $s \leq b$ اگر $s \leq x$ قرار دهید $R_x(s) = 1 + s$

در غیر اینصورت محاسبه کنید $R_x(s) = 1 + x$

برای $i = 1, 2, \dots, n$ مراحل زیر را انجام دهید:

قرار دهید $x_i = \frac{i-1}{n-1}$ و $\psi_i(x) = L_s R_x(s)|_{s=x_i}$ و $i = 1, 2, \dots, n$ گام دوم. برای $i = 1, 2, \dots, n$ و $j = 1, 2, \dots, i$

مراحل زیر را انجام دهید:

قرار دهید $\beta_{11} = \frac{1}{\|\psi_1\|}$ اگر $i \neq j$ آن گاه قرار دهید:

$$\beta_{ij} = \frac{-1}{\sqrt{\|\psi_i\|^2 - \sum_{k=1}^{i-1} \psi_i \hat{\psi}_k \beta_{kj}}} \sum_{k=1}^{i-1} \psi_i \hat{\psi}_k \beta_{kj}.$$

در غیر اینصورت قرار دهید.

$$\beta_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\|\psi_i\|^2 - \sum_{k=1}^{i-1} \psi_i \hat{\psi}_k \beta_{kj}}}$$

گام سوم. برای $i = 1, 2, \dots, m$ مراحل زیر را انجام دهید:

$$\hat{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(x)$$

گام چهارم. برای $i = 1, 2, \dots, n$ مراحل زیر را انجام دهید:

$$\underline{u}_0(x_1) = 0 \text{ و } \underline{u}_0(x_1) = 0$$

قرار دهید

با جایگذاری در رابطه (۲۶) داریم $\beta \psi \underline{\Lambda} = \beta \underline{u}_n$ بنابراین

$$\psi \underline{\Lambda} = \underline{u}_n \quad (۳۲)$$

همچنین دو طرف رابطه (29b) را ساده می‌کنیم. از سمت چپ رابطه (29b) داریم

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \bar{B}_j L \hat{\psi}_j, \hat{\psi}_i &= \\ \sum_{j=1}^n \bar{B}_j \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \sum_{l=1}^j \beta_{jl} L \psi_l, \psi_k & \quad (۳۳) \\ = \sum_{j=1}^n \bar{B}_j \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j \beta_{ik} L \psi_l, \psi_k \beta_{lj}^T & \\ = \sum_{j=1}^n \bar{B}_j (\beta \psi \beta^T)_{ij}, & \end{aligned}$$

و از سمت راست رابطه (29b) و به کمک قضیه ۴.۱ داریم

$$\bar{u}_n(x), \bar{\psi}_i = \bar{B}_i = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \bar{u}_{k-1}(x_k),$$

و از رابطه (29b) و (۳۳) رابطه زیر به دست می‌آید $\beta \psi \beta^T \bar{B} = \beta \bar{u}$.

با جایگذاری در رابطه (۲۷) داریم $\beta \psi \bar{\Lambda} = \beta \bar{u}_n$ بنابراین

$$\psi \bar{\Lambda} = \bar{u}_n \quad (۳۵)$$

لذا جواب تقریبی رابطه (۱) به فرم (۲۴) نیز خواهد بود. □

الگوریتم روش پیشنهادی

در الگوریتم اصلاح شده برای روش فضای هیلبرت هسته باز تولیدی، از روش تکراری برای تقریب عملگر معادله انتگرال فازی استفاده می‌شود. همچنین برای حذف فرآیند متعامد سازی گرام-اشمیت از روش پیشنهادی جوان و همکاران [۹] استفاده شده است تا اثر خطای محاسبه متعامد سازی از میان برداشته شود. از این طریق، استفاده از روش متعامدسازی گوما و همکاران [۹] تعامد سازی آنطور که در تکنیک کلاسیک فضای هسته

گام ششم. $\underline{u}_n(x)$ و $\bar{u}_n(x)$ را چاپ کنید.

۵- نتایج عددی

در این بخش از روش RKHS برای حل معادله انتگرال فازی استفاده شده است. به منظور مقایسه، روش به طور سیستماتیک با روش استفاده شده در [۹] مقایسه می‌شود. نتایج حاصل از این روش نشان می‌دهد که جواب به دست آمده یک تقریب مناسب برای جواب دقیق است. قابلیت اطمینان روش و افزایش دقت باعث می‌شود که روش کاربرد بیشتری داشته باشد. در فرایند محاسبه، تمام محاسبات نمادین و عددی با استفاده از بسته نرم افزاری متلب انجام می‌شود.

مثال. معادله انتگرال ولترای فازی را به صورت زیر در نظر بگیرید [۹]:

$$\tilde{u}(x) = [\alpha, 2 - \alpha]x + \int_0^x e^{x-s} u(s) ds, \quad (36)$$

به طوری که $0 \leq x \leq 1$. جواب دقیق این معادله برابر است با

$$\tilde{u}(x) = \left[\left(\frac{\alpha}{4} \right) (e^{2x} + 2x - 1), \left(\frac{2-\alpha}{4} \right) (e^{2x} + 2x - 1) \right], \quad \alpha \in [0, 1].$$

الف) محاسبه جواب تقریبی با استفاده از الگوریتم ۴-۱:

در این حالت دستگاه معادلات انتگرال قطعی را در نظر می‌گیریم که تابع هسته $K(x, s) = e^{x-s}$ برای $0 \leq x \leq 1$ مثبت است. بنابراین، با در نظر گرفتن فرم پارامتری (۳۶)، می‌توان نوشت

$$\underline{u}(x) = \alpha x + \int_0^x e^{x-s} \underline{u}(s) ds, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (37)$$

$$\bar{u}(x) = (2 - \alpha)x + \int_0^x e^{x-s} \bar{u}(s) ds, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

دنباله نقاط x_i ها را به صورت $x_i = \frac{i-1}{n-1}$ ، $i = 1, 2, 3, \dots, n$ تعریف می‌کنیم و در آن مقدار

$$\underline{A}_i = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(x_k, \underline{f}(x_k), T\underline{u}_{k-1}(x_k), T\bar{u}_{k-1}(x_k))$$

قرار دهید

$$\bar{A}_i = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} G \left(x_k, \bar{f}(x_k), T\underline{u}_{k-1}(x_k), T\bar{u}_{k-1}(x_k) \right)$$

محاسبه کنید $\underline{u}_n(x_i) = \sum_{i=1}^n \underline{A}_i \hat{\psi}_i(x_i)$ و $\bar{u}_n(x_i) = \sum_{i=1}^n \bar{A}_i \hat{\psi}_i(x_i)$ خروجی جواب‌های تقریبی $\underline{u}_n(x_i)$ و $\bar{u}_n(x_i)$ است و سپس متوقف شوید.

الگوریتم ۲-۴- روش پیشنهادی RKHS (بدون به کارگیری روش گرام-اشمیت)

ورودی. نقاطی مفروض درباره $[0, 1]$ ، عدد $R_x(s)$ ، عملگر L و توابع F, G ، مقادیر a, b و m خروجی. جواب تقریبی $\underline{u}_n(x)$ و $\bar{u}_n(x)$.

گام اول. برای $a \leq x$ و $b \leq s$

اگر $s \leq x$ قرار دهید $R_x(s) = 1 + s$

در غیر اینصورت محاسبه کنید $R_x(s) = 1 + x$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ مراحل زیر را انجام دهید.

قرار دهید $x_i = \frac{i-1}{n-1}$ و $\psi_i(x) = L_s R_x(s)|_{s=x_i}$ گام دوم. قرار دهید $\underline{u}_0(x_1) = \underline{u}(x_1)$ و $\bar{u}_0(x_1) = \bar{u}(x_1)$

برای $i = 1, 2, \dots, m$ مراحل زیر را انجام دهید:

$$\varphi_{ij} = [\psi^{-1}]_{ij}$$

گام سوم. قرار دهید

$$\bar{\Lambda}_n = \sum_{k=1}^n \varphi_{nk} \underline{u}_{k-1}(x_k) \quad \text{و} \quad \underline{\Lambda}_n = \sum_{k=1}^n \varphi_{nk} \bar{u}_{k-1}(x_k)$$

گام چهارم. محاسبه کنید

$$\bar{u}_n(x) = \sum_{i=1}^n \bar{\Lambda}_i \psi_i(x) \quad \text{و} \quad \underline{u}_n(x) = \sum_{i=1}^n \underline{\Lambda}_i \psi_i(x)$$

گام پنجم. اگر $n < m$ آن‌گاه قرار دهید

$n = n + 1$ و به گام سوم بروید.

در غیر اینصورت، توقف کنید.

فرآیند گرام-اشمیت) حل می‌کنیم که نتایج بدست آمده از این روش را می‌توان در جدول‌های شماره ۳ و ۴ مشاهده کرد. همان‌طور که مشاهده می‌شود برای معادله (۳۶) جواب تقریبی بدست آمده با استفاده از الگوریتم ۴-۲ در بیشتر نقاط نسبت به الگوریتم ۴-۱ دارای خطای کمتر و در نتیجه دقت بهتری است. نمودار $\bar{u}(x)$ بدست آمده با استفاده از الگوریتم ۴-۲ در شکل ۱ قابل مشاهده است.

$n = 101$ را در نظر می‌گیریم. خطای مطلق $e_j = |u(x_i) - \underline{u}_n(x_i)|$ در جدول شماره ۱ و خطای مطلق $\bar{e}_i = |\bar{u}(x_i) - \bar{u}_n(x_i)|$ در جدول شماره ۲ قابل مشاهده است.

(ب) محاسبه جواب تقریبی با استفاده از الگوریتم ۴-۲:

معادله (۳۶) را با روش پیشنهادی (یعنی بدون

جدول ۱. خطاهای مطلق جواب تقریبی $\underline{u}(x)$ برای معادله (۳۶) در α و x مختلف با استفاده از الگوریتم ۴-۱.

x_i	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 1$
0.25	3.17558×10^{-7}	6.35116×10^{-7}	9.52673×10^{-7}	1.27023×10^{-6}
0.5	6.97419×10^{-7}	1.39484×10^{-6}	2.09226×10^{-6}	2.78968×10^{-6}
0.75	8.61564×10^{-7}	1.72313×10^{-7}	2.58469×10^{-6}	3.44626×10^{-6}
1	4.44089×10^{-15}	8.88178×10^{-16}	8.43769×10^{-15}	1.77636×10^{-15}

جدول ۲. خطاهای مطلق جواب تقریبی $\bar{u}(x)$ برای معادله (۳۶) در α و x مختلف با استفاده از الگوریتم ۴-۱.

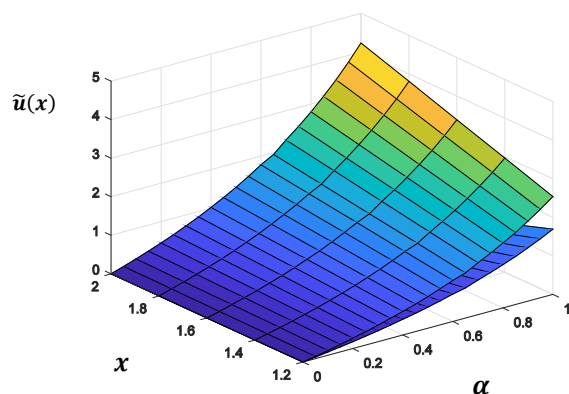
x_i	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 1$
0.25	2.22290×10^{-6}	1.90535×10^{-6}	1.58779×10^{-6}	1.27023×10^{-6}
0.5	4.88193×10^{-6}	4.18452×10^{-6}	3.4871×10^{-6}	2.78968×10^{-6}
0.75	6.03095×10^{-6}	5.16939×10^{-6}	4.30782×10^{-6}	3.44626×10^{-6}
1	7.10543×10^{-15}	1.68754×10^{-14}	1.28786×10^{-14}	1.77636×10^{-15}

جدول ۳. خطاهای مطلق جواب تقریبی $\underline{u}(x)$ برای معادله (۳۶) در α و x مختلف با استفاده از الگوریتم ۴-۲.

x_i	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 1$
0.25	1.896×10^{-8}	7.58×10^{-8}	1.707×10^{-7}	3.3034×10^{-7}
0.5	2.350×10^{-8}	9.40×10^{-8}	2.115×10^{-7}	3.761×10^{-7}
0.75	2.514×10^{-8}	1.006×10^{-7}	2.263×10^{-7}	4.022×10^{-7}
1	0.1378×10^{-8}	5.51×10^{-8}	1.240×10^{-7}	2.204×10^{-7}

جدول ۴. خطاهای مطلق جواب تقریبی $\bar{u}(x)$ برای معادله (۳۶) در α و x مختلف با استفاده از الگوریتم ۴-۲.

x_i	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 1$
0.25	9.29×10^{-7}	6.826×10^{-7}	4.740×10^{-7}	3.3034×10^{-7}
0.5	1.152×10^{-6}	8.461×10^{-7}	5.876×10^{-7}	3.761×10^{-7}
0.75	1.232×10^{-6}	9.050×10^{-7}	6.285×10^{-7}	4.022×10^{-7}
1	6.75×10^{-7}	4.959×10^{-7}	3.444×10^{-7}	2.204×10^{-7}



شکل ۱. جواب تقریبی $\tilde{u}(x)$ به ازای $n = 10$ با استفاده از الگوریتم ۴-۲.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، تعمیم روش فضای هیلبرت هسته بازتولیدی معرفی و برای حل یک کلاس از معادلات انتگرال فازی نوع دوم استفاده شده است. مدل ارائه شده در اینجا مبتنی بر تئوری هسته باز تولید فازی است. در این روش از فرآیند متعامد سازی استفاده نمی‌شود. با این حال، دقت الگوریتم بدون فرآیند گرام-اشمیت در اکثر نقاط بهتر از الگوریتم با استفاده از فرآیند گرام-اشمیت است. نتایج عددی به دست آمده تأیید می‌کند که کاندیدای مناسبی برای حل معادله انتگرال فازی است.

- [8] S. Farzaneh Javan, S. Abbasbandy, and M. Fariborzi Araghi, Application of Reproducing Kernel Hilbert Space Method for Solving a Class of Nonlinear Integral Equations, *Mathematical Problems in Engineering*, (2017), 1-11.
- [9] G. Gumah, K. Moaddy, M. Al-Smadi, and I. Hashim, Solutions to Uncertain Volterra Integral Equations by Fitted Reproducing Kernel Hilbert Space Method, *Journal of Function Spaces* (2016), 1-12.
- [10] M. Ghanbari, "Numerical solution of fuzzy linear Volterra integral equations of the second kind by Homotopy analysis method," *International Journal Industrial Mathematics*, vol. 2, pp. 73–87, (2010).
- [11] N. Gholami, T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, N. Karamikabir., Fuzzy reproducing kernel space method for solving fuzzy boundary value problems, *Mathematical Sciences*, (2019) 1-7.
- [12] J. Hamaydi, N. Qatanani, Computational Methods for Solving Linear Fuzzy Volterra Integral Equation, *J. Appl. Math.* 2017 (2017), Article ID 2417195, 12 pages.
- [13] F. Mirzaee, M. Paripour, M. Komak yari, Numerical solution of Fredholm fuzzy integral equations of the second kind via direct method using Triangular function. *J Hyper* (2012); 1(2):46–60.
- [14] F. Mirzaee, M.K. Yari, E. Hadadiyan, Numerical solution of two-dimensional fuzzy Fredholm integral equations of the second kind using triangular functions, *Beni-Suef Univ. J. Basic Appl. Sci.* 4 (2015) 109–118.
- [15] A. Molabahrami, A. Shidfar, A.
- [1] S. Abbasbandy and T. Allahviranloo, "The Adomian decomposition method applied to the fuzzy system of Fredholm integral equations of the second kind," *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, vol.14,no.1,(2006) pp. 101–110.
- [2] E. Babolian, H. Sadeghi Goghary, S. Abbasbandy, Numerical solution of linear Fredholm fuzzy integral equations of the second kind by Adomian method, *Applied Mathematics and Computation*, 161(3) (2005) 733–744.
- [3] M. Barkhordari Ahmadi, M. Khezerloo, Fuzzy bivariate Chebyshev method for solving fuzzy Volterra-Fredholm integral equations, *Internat. J. Industrial Math.* 3(2) (2011) 67–77.
- [4] M. Cui, Y. Lin, *Nonlinear Numerical Analysis in the Reproducing Kernel Space*, Nova Science, New York, NY, USA, (2009).
- [5] R. Ezzati, S.M. Sadatrasoul., On numerical solution of two-dimensional nonlinear Urysohn fuzzy integral equations based on fuzzy Haar wavelets, *Fuzzy Sets Syst.* 309 (2017) 145–164.
- [6] M.A. Fariborzi Araghi, N. Parandin, Numerical solution of fuzzy Fredholm integral equations by the Lagrange interpolation based on the extension principle, *Soft Comput.* 15 (2011)2449–2456.
- [7] M. Friedman, M. Ma, A. Kandel, Numerical solution of fuzzy differential and integral equations, *Fuzzy Sets Syst.* 106 (1999) 35–48.

- Modelling 37 (2013) 1016–1027.
- [21] S. Salahshour, M. Khezerloo, S. Hajighasemi, M. Khorasany, Solving fuzzy integral equations of the second kind by fuzzy Laplace transform method, *Internat. J. Industrial Math.* 4(2012) 21–9.
- [22] S. Salahshour, M. Khezerloo, S. Hajighasemi, and M. Khorasany, “Solving fuzzy integral equations of the second kind by fuzzy Laplace transform method,” *International Journal Industrial Mathematics*, vol. 1, pp. 21–29, (2012).
- [23] M. Al-Smadi, *Reliable Numerical Algorithm for Handling Fuzzy Integral Equations of Second Kind in Hilbert Spaces*, Published by Faculty of Sciences and Mathematics, University of Nis, Serbia 33:2 (2019), 583–597.
- [24] M. Sugeno, *Theory of fuzzy integrals and its application*, Ph.D. Dissertation, Tokyo Institute of Technology, (1974).
- [25] S. Ziari, A.M. Bica, New error estimate in the iterative numerical method for nonlinear fuzzy Hammerstein-Fredholm integral equations, *Fuzzy Sets Syst.* 295 (2016) 136–152.
- [26] H. J. Zimmermann., *Fuzzy set theory and its applications*, Kluwer Academic, Boston, (1991)
- Ghyasi., An analytical method for solving linear Fredholm fuzzy integral equations of the second kind, *Computers and Mathematics with Applications* 61 (2011) 2754–2761.
- [16] M. Najariyan, M. H. Farahi, Optimal control of fuzzy linear controlled system with fuzzy initial conditions, *Iranian Journal of Fuzzy Systems* (2013) 10: 3, 21-35.
- [17] N. Parandin, M.A. Fariborzi Araghi, The numerical solution of linear fuzzy Fredholm integral equations of the second kind by using finite and divided differences methods, *Soft Comput.* 15 (2010) 729–741.
- [18] J. Y. Park and H. K. Han, “Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy Volterra integral equations,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 105, no. 3, pp. 481–488, 1999.
- [19] S.M. Sadatrasoul, R. Ezzati, Numerical solution of two-dimensional nonlinear Hammerstein fuzzy integral equations based on optimal fuzzy quadrature formula, *J. Comput. Appl. Math.* 292 (2016) 430–446.
- [20] S. Salahshour, T. Allahviranloo, Application of fuzzy differential transform method for solving fuzzy Volterra integral equations, *Appl. Math.*