



تحلیل حساسیت مساله حمل و نقل در محیط عدم قطعیت با پارامترهای خاکستری

فرید پورافقی^{۱*}، داود درویشی سلوکلائی^۲

^(۱) گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۲/۰۲/۰۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۲/۱۱

چکیده

در مسائل حمل و نقل معمولی، همیشه فرض بر این است که مقدار هر مبدا و میزان تقاضای هر مقصد یک عدد مشخص است. اما در شرایط خاص، مانند بلایای طبیعی، در زمان جنگ‌ها و... میزان عرضه هر مبدا و تقاضای هر مقصد به طور دقیق مشخص نیست و می‌تواند به صورت اعدادی غیرقطعی و نادقیق بیان شود. لذا پیدا کردن محدوده‌ای برای میزان عرضه هر منبع و میزان تقاضای هر مقصد که بتواند با فرض ثابت بودن متغیرهای مستقل دیگر، میزان تابع هدف را هم چنان ثابت باقی نگه دارد، اهمیت پیدا می‌کند. روش‌های متفاوتی برای حل مساله حمل و نقل با پارامترهای غیرقطعی ارائه شده است. زمانی که نتوان توابع عضویت را برای اعداد فازی استخراج نمود یا تعداد داده‌ها کم باشد، یک رویکرد مناسب برای مواجهه با داده‌های غیرقطعی و نادقیق استفاده از نظریه سیستم‌های خاکستری و اعداد خاکستری بازه‌ای می‌باشد که از کارایی خوبی در این موقعیت برخوردارند. از این رو در این مقاله با استفاده از مفاهیم مرکز و عرض اعداد خاکستری بازه‌ای، به ارائه الگوریتمی به منظور تحلیل حساسیت پارامترهای عرضه و تقاضای مساله حمل و نقل خاکستری پرداخته شده است. بدین ترتیب می‌توان محدوده‌هایی را برای میزان عرضه و تقاضای مساله حمل و نقل یافت که هرگونه تغییر در آن محدوده‌ها تاثیری بر مقدار بهینه مساله نخواهد گذاشت. برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی، مثال عددی نیز آورده شده است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل حساسیت، عدم قطعیت، اعداد خاکستری بازه‌ای، حمل و نقل خاکستری.

۱- مقدمه

مساله حمل و نقل شکل خاصی از برنامه‌ریزی خطی است که هدف آن مدیریت زنجیره تأمین برای کاهش هزینه‌ها و بهبود خدمات است.

[۱، ۴-۲]. امروزه مدل‌های حمل و نقل ابزار مهمی برای اطمینان از در دسترس بودن به موقع مواد اولیه و کالاهای نهایی هستند [۵-۷]. تحقیقات زیادی در مورد مساله حمل و نقل انجام شده است [۸، ۹]. مایتی و روی [۱۰] روشی برای بدست آوردن جواب مساله حمل و نقل چند هدفه ارائه دادند. در اقتصاد رقابتی جهانی امروز، مدل‌های حمل و نقل ابزاری قدرتمند برای یافتن راه‌های بهتر، برای تأمین نیازهای مشتری هستند. پارامترهای مساله حمل و نقل معمولی مقادیر دقیق هستند. اما در کاربردهای دنیای واقعی، به دلیل تغییر شرایط اقتصادی، تعیین میزان عرضه و تقاضا در مساله حمل و نقل دشوار است [۱۱-۱۳]. لذا برای تصمیم‌گیری صحیح به اطلاعات کافی نیاز داریم اما در عمل، کمتر سیستمی را می‌توان یافت که تمام اطلاعات آن دقیقاً شناخته شده باشد. رویکردهای مختلفی برای مقابله با مسایل در شرایط عدم قطعیت وجود دارد [۸].

با توجه به انواع عدم قطعیت مشاهده شده در سیستم‌ها از نظر نوع و ویژگی، نظریه‌ها و روش‌های متفاوتی برای مقابله با مسایل در شرایط عدم قطعیت ارائه شده است [۸]. ریاضیات بازه‌ای، آمار و احتمال و نظریه مجموعه‌های فازی از جمله روش‌های مهم مطالعه سیستم‌های دارای عدم قطعیت می‌باشند، نظریه مجموعه‌های فازی مبتنی بر تعریف اعداد فازی است و اعداد فازی نیز به نوبه خود به تعریف توابع عضویت بستگی دارد که بر اساس تعداد خبرگان و سطح تجربه آنها است. آمار و احتمال نیز عدم قطعیتی است که از یک فرآیند کاملاً تصادفی ناشی می‌شود و به توزیع و توابع نمونه‌گیری بالا نیاز دارد. به عبارت دیگر، اگر تصمیم‌گیرنده نتواند با به دست آوردن داده‌های بیشتر، عدم قطعیت را کاهش دهد، با یک فرآیند کاملاً تصادفی با عدم قطعیت مواجه خواهد شد. اگر در مساله‌ای تعداد خبرگان و سطح تجربه کم باشد به نحوی که نتوان توابع عضویت را استخراج کرد، یعنی نمی‌توانیم از نظریه عدم قطعیت فازی یا نظریه عدم قطعیت تصادفی استفاده کنیم. برای مطالعه مسائلی که به دلیل داده‌های اندک و اطلاعات محدود، عدم دقت بالایی دارند، دنگ [۱۴] مفهوم تئوری سیستم خاکستری را معرفی کرد. نظریه سیستم‌های خاکستری برای مطالعه مسائلی با نمونه‌های کوچک و اطلاعات ضعیف مناسب است. نظریه سیستم‌های خاکستری به مطالعه موضوعاتی می‌پردازد که دارای محدوده و بازه مشخص و ماهیت غیر قطعی هستند. نظریه سیستم‌های خاکستری یکی از مهم‌ترین دستاوردهای علمی در زمینه چگونگی استفاده از اطلاعات نادقیق محسوب می‌شود. برای کاهش هزینه‌های جمع‌آوری اطلاعات و همچنین ساخت یک مدل واقعی، استفاده از مسایل حمل و نقل خاکستری مناسب‌تر است. مساله‌ی حمل و نقل خاکستری تعمیم مسئله برنامه‌ریزی خطی خاکستری و ابزاری مناسب برای حل عدم قطعیت ذاتی در مدل‌های مسائل دنیای واقعی است. روش‌های مختلفی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی خاکستری پیشنهاد شده است [۱۵-۱۹].

اعداد خاکستری واحد اصلی سیستم‌های خاکستری برای ساخت مدل‌های خاکستری می‌باشند. در حقیقت، عدد خاکستری بازه‌ای عددی غیرقطعی است که مقدار ممکن خود را از یک بازه اتخاذ می‌کند [۱۹]. اعداد خاکستری مشابه با اعداد فازی هستند اما تفاوت اساسی بین اعداد خاکستری با اعداد فازی در آن است که در اعداد خاکستری مقدار دقیق عدد نامشخص است اما بازه‌ای که مقدار آن عدد را در بر می‌گیرد معلوم است یا به تعبیر دیگر مقدار دقیق کران چپ و راست عدد معین و معلوم است. در حالی که در یک عدد فازی ضمن این که عدد به صورت یک بازه تعریف می‌شود، اما مقدار دقیق بال چپ و راست عدد معلوم نیست و از یک تابع عضویت تبعیت می‌کند. همین تفاوت بین عدد خاکستری و عدد فازی موجب می‌شود که محاسبات با اعداد خاکستری از سادگی بیشتری نسبت

به اعداد فازی برخورداری باشد، زیرا تعیین تابع عضویت برای کران چپ و راست یک عدد فازی خود همراه با پیچیدگی‌ها و عملیات محاسباتی است. مایتی و روی [۲۰] روی یک مساله حمل و نقل چند هدفه با هزینه غیرخطی مطالعه کردند. آنی کریستی و کالپانا [۲۱] جواب‌های مساله حمل و نقل فازی چند هدفه را با استفاده از توابع عضویت غیر خطی بدست آوردند. یولا و جاوا [۲۲] روشی را برای حل مسئله حمل و نقل چند هدفه با استفاده از برنامه‌ریزی فازی پیشنهاد کردند. بسیاری از محققان [۲۳-۳۴] روش‌های مختلفی را برای حل مسئله حمل و نقل در شرایط عدم قطعیت ارائه داده‌اند. پورافقی و همکاران [۳۵، ۳۶] روش‌هایی را برای حل مسئله حمل و نقل خاکستری پیشنهاد کردند. ناصری و همکاران [۲۹] روش مستقیمی برای حل مساله تخصیص خاکستری براساس حساب خاکستری پیشنهاد کردند. اشکالی که در این مسایل می‌تواند رخ دهد این است که بعد از بدست آوردن جواب بهینه مساله حمل و نقل، ممکن است به دلایل مختلف از جمله بلایای طبیعی یا وقوع جنگ‌ها و غیره، میزان عرضه هر منبع و میزان تقاضای هر مقصد دستخوش تغییرات شود، لذا برای بدست آوردن جواب بهینه، مساله باید دوباره حل شود. بنابراین برای جلوگیری از حل مجدد آن، بدلیل ایجاد تغییر در پارامترهای مدل بدلیل شرایط غیر منتظره، نیاز به تحلیل حساسیت مساله حمل و نقل خاکستری و پیدا کردن محدوده‌هایی برای ثابت ماندن جواب بهینه احساس می‌شود. بنابراین در این مقاله با استفاده از مفاهیم مرکز و عرض اعداد خاکستری بازه‌ای، سعی شده تا یک محدوده برای پارامترهای عرضه و تقاضا پیدا شوند که هر تغییری در آن محدوده بر جواب بهینه تأثیر نمی‌گذارد، در حالی که، هر تغییری در خارج از دامنه آنها بر جواب اساسی بهینه تأثیر می‌گذارد. به طور کلی، اطلاعات مربوط به تجزیه و تحلیل حساسیت در یک مسئله حمل و نقل معمولاً مهمتر از خود جواب بهینه است. در ابعاد بالا با توجه به پیچیدگی محاسبات حل مسایل با تغییر در داده‌های مساله کار بسیار سنگینی خواهد بود از این رو لازم است از تحلیل حساسیت به خصوص در محیط خاکستری استفاده گردد. تجزیه و تحلیل حساسیت پارامترهای عرضه و تقاضا در یک مسئله حمل و نقل با استفاده از روش پیشنهادی می‌تواند به تصمیم‌گیرندگان کمک کند تا بدانند در چه دامنه‌ای از تغییر منابع در بازار می‌توانند خطوط تولید نصب شده را فعال نگه دارند و فقط با تغییر سطح تولید آنها با داشتن پارامترهای نادقیق مشکلات توزیع را کنترل کنند. در این روش برای بدست آوردن جواب بهینه مدل از روش نقطه صفر استفاده می‌کنیم که جایگزین روش حداقل هزینه و روش MODI برای بدست آوردن جواب بهینه شده است [۲۴]. یک مثال برای روشن شدن ایده‌ی روش عرض و مرکز ارائه شده است. روش پیشنهادی اطلاعات مفیدی را فراهم کرده که به تصمیم‌گیرندگان کمک می‌کند تا آنها بتوانند انواع مختلفی از مشکلات لجستیکی با پارامترهای غیر دقیق را کنترل کنند.

این مقاله شامل شش بخش می‌باشد. در بخش دوم نظریه خاکستری، تعاریف و مفاهیم آورده شده است. در بخش سوم، مساله حمل و نقل خاکستری، تعاریف و قضایای مورد استفاده در مقاله بیان شده است. در بخش چهارم، الگوریتم پیشنهادی برای تحلیل حساسیت مساله حمل و نقل ارائه شده است. برای نشان دادن کارایی الگوریتم پیشنهادی مثالی در بخش پنجم حل شده است. در نهایت، بخش ششم شامل نتیجه‌گیری از مقاله می‌باشد.

۲. نظریه سیستم‌های خاکستری

تعاریف و مفاهیم لازم برای مطالعه و تجزیه و تحلیل سیستم‌های خاکستری در این بخش ارائه شده است. به دلیل پیچیدگی‌ها و نقصان اطلاعات، طی دهه‌های اخیر، روش‌های مختلفی مانند نظریه مجموعه فازی، نظریه مجموعه راف و غیره برای مطالعه سیستم‌های غیر قطعی توسعه داده شده است. در کنار روش‌های فوق، نظریه سیستم‌های خاکستری یکی از مهمترین دستاوردهای علمی در زمینه چگونگی استفاده از اطلاعات نادقیق محسوب می‌شود که توسط پروفیسور جولانگ دنگ [۱۴] ارائه شد. این نظریه، روشی جدید برای مطالعه مسائلی است که به

دلیل داده‌های اندک و اطلاعات محدود، عدم دقت بالایی دارند. نظریه سیستم‌های خاکستری به مطالعه نمونه‌های کوچک و سیستم‌های دارای اطلاعات ضعیف می‌پردازد، سیستم‌هایی که قسمتی از اطلاعات مربوط به آنها مشخص و قسمتی نامشخص است. مباحث مورد مطالعه توسط این سیستم دارای دامنه و فاصله مشخص و ماهیتی نامشخص هستند. دنگ سیستم‌های دارای اطلاعات کاملاً شناخته شده را سیستم‌های سفید، سیستم‌های متشکل از اطلاعات کاملاً ناشناخته را سیستم‌های سیاه، و سیستم‌هایی که تا حدودی اطلاعات شناخته شده و تا حدودی اطلاعات ناشناخته دارند را سیستم‌های خاکستری نامگذاری کرد. به همین خاطر، نتایج این مطالعات، از سوی وی، نظریه سیستم‌های خاکستری نامیده شده است [۱۴]. در این فصل به معرفی و مرور مبانی و مفاهیم بنیادی نظریه سیستم‌های خاکستری که در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته، می‌پردازیم.

در این بخش، در مورد برخی از تعاریف و مفاهیم مورد نیاز برای مطالعه و تحلیل سیستم خاکستری، بحث خواهیم کرد.

اعداد خاکستری به عنوان واحد اصلی سیستم خاکستری برای ساخت مدل خاکستری بوده و نقش مهمی در نظریه سیستم خاکستری دارند.

تعریف ۱.۲: عدد خاکستری بازه‌ای را با نماد $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ نشان می‌دهیم که در آن $\underline{x}$ و $\bar{x}$ کران پایین و کران بالای آن می‌باشند.

تعریف ۲.۲: مرکز عدد خاکستری $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ را با نماد $(\otimes_c x)$ و عرض (شعاع) آنرا با نماد $(\otimes_w x)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\otimes_c x = \frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}, \quad \otimes_w x = \frac{\bar{x} - \underline{x}}{2}. \quad (1)$$

تذکر ۱.۲: برای هر عدد خاکستری $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ روابط زیر را خواهیم داشت.

$$\underline{x} = \otimes_c x - \otimes_w x, \quad \bar{x} = \otimes_c x + \otimes_w x \quad (2)$$

تعریف ۳.۲: فرض کنید $\otimes x_1 \in [\underline{x}_1, \bar{x}_1]$ و $\otimes x_2 \in [\underline{x}_2, \bar{x}_2]$ دو عدد خاکستری باشند. می‌توان مفاهیم مربوط به روابط بین اعداد خاکستری را برای اعداد خاکستری بازه‌ای به صورت زیر بیان نمود [۳۷]:

$$\begin{aligned} \otimes x_1 + \otimes x_2 &= [\underline{x}_1 + \underline{x}_2, \bar{x}_1 + \bar{x}_2] \\ \otimes x_1 - \otimes x_2 &= \otimes x_1 + (-\otimes x_2) = [\underline{x}_1 - \bar{x}_2, \bar{x}_1 - \underline{x}_2] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\otimes x_1 \times \otimes x_2 = [\min\{\underline{x}_1 \underline{x}_2, \underline{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 \underline{x}_2, \bar{x}_1 \bar{x}_2\}, \max\{\underline{x}_1 \underline{x}_2, \underline{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 \underline{x}_2, \bar{x}_1 \bar{x}_2\}]$$

$$\frac{\otimes x_1}{\otimes x_2} = \otimes x_1 \times \otimes x_2^{-1} = \left[\min\left\{\frac{\underline{x}_1}{\underline{x}_2}, \frac{\underline{x}_1}{\bar{x}_2}, \frac{\bar{x}_1}{\underline{x}_2}, \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}\right\}, \max\left\{\frac{\underline{x}_1}{\underline{x}_2}, \frac{\underline{x}_1}{\bar{x}_2}, \frac{\bar{x}_1}{\underline{x}_2}, \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}\right\} \right] \quad 0 \notin [\underline{x}_2, \bar{x}_2]$$

$$k \cdot \otimes x \in \begin{cases} [k\underline{x}, k\bar{x}] & k > 0 \\ [k\bar{x}, k\underline{x}] & k < 0 \end{cases}$$

۳. مساله حمل و نقل خاکستری

یکی از متداول‌ترین مسائل در برنامه‌ریزی خطی، مساله حمل و نقل است. در مسایل حمل و نقل معمولی، مقادیر عرضه‌ی مبداها، تقاضای مقاصد و هزینه حمل کالاها به صورت یک عدد حقیقی در نظر گرفته می‌شوند [۳۸]. در دنیای واقعی به خاطر عدم آگاهی کامل و دقیق در مورد میزان عرضه‌ی مبداها و میزان تقاضای مقاصد، یا اطلاعات کم و ناقص در برآورد هزینه‌ها، این فرض لزوماً درست نخواهد بود. در این شرایط ممکن است میزان عرضه، میزان تقاضا و هزینه حمل و نقل نامعلوم یا مبهم باشد. در این موارد برای ساخت یک مدل واقعی، استفاده از مسایل حمل

و نقل با پارامتر نامشخص مناسب‌تر است. عدم دقت در پارامترها به معنای کامل نبودن اطلاعات این پارامترها است. با این حال، حتی با اطلاعات ناقص، مدل مورد استفاده به طور معمول قادر به تعیین مقدار خاکستری برای پارامترها است. بنابراین، استفاده از مسائل حمل و نقل خاکستری برای مدل سازی و حل مسائل دنیای واقعی مناسب‌تر است [۱]. وقتی تابلوی مساله حمل و نقل شامل اعداد خاکستری باشد، مساله حمل و نقل خاکستری ایجاد می‌شود. مساله حمل و نقل خاکستری در جدول ۱ نشان داده شده است.

جدول ۱: ماتریس مساله حمل و نقل خاکستری

عرضه	n	...	j	...	۱	مقصد مبدا
$\otimes S_1$	$\otimes c_{1n}$	...	$\otimes c_{1j}$	...	$\otimes c_{11}$	۱
$\otimes S_2$	$\otimes c_{2n}$	...	$\otimes c_{2j}$	...	$\otimes c_{21}$	۲
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\otimes S_i$	$\otimes c_{in}$	...	$\otimes c_{ij}$	...	$\otimes c_{i1}$	i
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\otimes S_m$	$\otimes c_{mn}$	...	$\otimes c_{mj}$	...	$\otimes c_{m1}$	m
	$\otimes d_n$	...	$\otimes d_j$	...	$\otimes d_1$	تقاضا

مدل ریاضی مساله حمل و نقل خاکستری به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize } \otimes Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \otimes c_{ij} \otimes x_{ij} \\
 & \text{subject to } \sum_{j=1}^n \otimes x_{ij} = \otimes a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^m \otimes x_{ij} = \otimes b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 & \otimes x_{ij} \geq \otimes 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{۴}$$

در اینجا فرض بر این است که $\otimes Z$ مینیمم مقدار تابع هدف بوده، $\otimes c_{ij}$ ها برای هر $i = 1, 2, \dots, m$ و $j = 1, 2, \dots, n$ ضرایب هزینه خاکستری تابع هدف، $\otimes S_i$ برای هر $i = 1, 2, \dots, m$ میزان عرضه‌ی خاکستری مبدأ i ام و $\otimes d_j$ برای هر $j = 1, 2, \dots, n$ میزان تقاضای خاکستری مقصد j می‌باشد. همچنین داریم:

$$\otimes c_{ij} > \otimes 0 \quad \text{و} \quad \otimes d_j > \otimes 0, \quad \otimes S_i > \otimes 0$$

بنابراین؛

$$\begin{aligned}
 \text{Minimize } \otimes Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \otimes [\underline{c}_{ij}, \bar{c}_{ij}] \times \otimes [\underline{x}_{ij}, \bar{x}_{ij}] \\
 \text{subject to } \sum_{j=1}^n \otimes [\underline{x}_{ij}, \bar{x}_{ij}] &= \otimes [\underline{a}_i, \bar{a}_i], \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 \sum_{i=1}^m \otimes [\underline{x}_{ij}, \bar{x}_{ij}] &= \otimes [\underline{b}_j, \bar{b}_j], \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 \underline{x}_{ij} &\geq 0, \quad \bar{x}_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن، $\underline{c}_{ij}$ ، $\bar{c}_{ij}$ ، $\underline{s}_i$ ، $\bar{s}_i$ ، $\underline{d}_j$ ، $\bar{d}_j$ برای هر $i = 1, 2, \dots, m$ و $j = 1, 2, \dots, n$ اعداد حقیقی مثبت می‌باشند.

تعریف ۳-۱: عدد خاکستری $\otimes [\underline{x}_{ij}, \bar{x}_{ij}]$ برای هر $i = 1, 2, \dots, m$ و $j = 1, 2, \dots, n$ جواب موجه مساله حمل و نقل خاکستری نامیده می‌شود هرگاه در معادلات (۲.۳) صدق کند.

تعریف ۳-۲: جواب موجه $\otimes [\underline{x}_{ij}, \bar{x}_{ij}]$ برای هر $i = 1, 2, \dots, m$ و $j = 1, 2, \dots, n$ ، یک جواب بهینه برای مساله حمل و نقل خاکستری خواهد بود هرگاه برای هر جواب موجه دیگری مانند $\otimes [\underline{y}_{ij}, \bar{y}_{ij}]$ برای هر $i = 1, 2, \dots, m$ و $j = 1, 2, \dots, n$ رابطه زیر را داشته باشیم؛

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [\underline{c}_{ij}, \bar{c}_{ij}] \times [\underline{x}_{ij}, \bar{x}_{ij}] \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [\underline{c}_{ij}, \bar{c}_{ij}] \times [\underline{y}_{ij}, \bar{y}_{ij}] \quad (6)$$

تعریف ۳-۳: هر جواب موجه مساله حمل و نقل خاکستری با m مبدا و n مقصد یک جواب اساسی خاکستری نامیده می‌شود اگر و تنها اگر:

۱. مجموع مقادیر تخصیص داده شده در هر سطر با مقدار عرضه‌ی آن برابر باشد.
۲. مجموع مقادیر تخصیص داده شده در هر ستون، با مقدار تقاضای آن برابر باشد.
۳. مجموع عرضه و تقاضا، برابر با مجموع اختصاص داده شده باشد.
۴. تعداد متغیرهای اساسی برابر $(m + n - 1)$ باشد.

تعریف ۳-۴: یک جواب موجه خاکستری، جواب بهینه خاکستری نامیده می‌شود هرگاه مجموع هزینه‌های مساله حمل و نقل خاکستری را می‌نیمم کند.

حال، قضیه زیر رابطه‌ای بین جواب بهینه یک مسئله حمل و نقل خاکستری و یک جفت از مساله حمل و نقل ناشی از آن را بیان می‌کند.

قضیه ۳.۱: [۳۶] اگر مجموعه $\{\otimes_c x_{ij}^0, \text{ for all } i = 1, 2, \dots, m \text{ and } j = 1, 2, \dots, n\}$ جواب بهینه مساله حمل و نقل مرکزی بدست آمده از مساله حمل و نقل خاکستری به فرم زیر باشد

$$\begin{aligned}
 \text{Minimiz } \otimes_c Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \otimes_c c_{ij} \times \otimes_c x_{ij} \\
 \text{subject to } \sum_{j=1}^n \otimes_c x_{ij} &= \otimes_c s_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 \sum_{i=1}^m \otimes_c x_{ij} &= \otimes_c d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 \otimes_c x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{۷}$$

و مجموعه $\{\otimes_w x_{ij}^0, \text{ for all } i = 1, 2, \dots, m \text{ and } j = 1, 2, \dots, n\}$ جواب بهینه مساله حمل و نقل عرضی بدست آمده از مساله حمل و نقل خاکستری به فرم زیر باشد.

$$\begin{aligned}
 \text{Minimiz } \otimes_w Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \otimes_w c_{ij} \times \otimes_w x_{ij} \\
 \text{subject to } \sum_{j=1}^n \otimes_w x_{ij} &= \otimes_w s_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 \sum_{i=1}^m \otimes_w x_{ij} &= \otimes_w d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 \otimes_w x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{۸}$$

در این صورت مجموعه $\{[\otimes_c x_{ij}^0 - \otimes_w x_{ij}^0, \otimes_c x_{ij}^0 + \otimes_w x_{ij}^0], \text{ for all } i = 1, 2, \dots, m \text{ and } j = 1, 2, \dots, n\}$ جواب بهینه مساله حمل و نقل خاکستری خواهد بود.
اثبات:

فرض کنید $\{[\underline{x}_{ij}, \bar{x}_{ij}], \text{ for all } i = 1, 2, \dots, m \text{ and } j = 1, 2, \dots, n\}$ یک جواب شدنی مساله حمل و نقل خاکستری باشد. با تبدیل مساله حمل و نقل خاکستری به مساله حمل و نقل بازه‌ای داریم:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimiz } [Z_l, Z_r] &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [\underline{c}_{ij}, \bar{c}_{ij}] \times [\underline{x}_{ij}, \bar{x}_{ij}] \\
 \text{subject to } \sum_{j=1}^n [\underline{x}_{ij}, \bar{x}_{ij}] &= [a_i, \bar{a}_i], \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 \sum_{i=1}^m [\underline{x}_{ij}, \bar{x}_{ij}] &= [b_j, \bar{b}_j], \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 \underline{x}_{ij} &\geq 0, \quad \bar{x}_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

مجموعه $\{[\hat{x}_{ij}^0 + x_{ij}^{r0}], \text{ for all } i = 1, 2, \dots, m \text{ and } j = 1, 2, \dots, n\}$ یک جواب بهینه مساله حمل و نقل کران بالا است. مجموعه $\{[\hat{x}_{ij}^0 - x_{ij}^{r0}], \text{ for all } i = 1, 2, \dots, m \text{ and } j = 1, 2, \dots, n\}$ یک جواب بهینه مساله حمل و نقل کران پایین است.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} (\hat{x}_{ij}^0 - x_{ij}^{r0}) \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

،

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{c}_{ij} (\hat{x}_{ij}^0 + x_{ij}^{r0}) \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{c}_{ij} \bar{x}_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

9

$$(\hat{x}_{ij}^0 - x_{ij}^{r0}) \leq (\hat{x}_{ij}^0 + x_{ij}^{r0}) \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ and } j = 1, 2, \dots, n$$

این بدین معنی است که:

$$\left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} (\hat{x}_{ij}^0 - x_{ij}^{r0}), \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{c}_{ij} (\hat{x}_{ij}^0 + x_{ij}^{r0}) \right] \leq \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{c}_{ij} \bar{x}_{ij} \right]$$

یعنی:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [c_{ij}, \bar{c}_{ij}] [\hat{x}_{ij}^0 - x_{ij}^{r0}, \hat{x}_{ij}^0 + x_{ij}^{r0}] \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [c_{ij}, \bar{c}_{ij}] [x_{ij}, \bar{x}_{ij}]$$

بنابراین، مجموعه $\{[\hat{x}_{ij}^0 - x_{ij}^{r0}, \hat{x}_{ij}^0 + x_{ij}^{r0}], \text{ for all } i = 1, 2, \dots, m \text{ and } j = 1, 2, \dots, n\}$ یک جواب بهینه مساله حمل و نقل خاکستری می‌باشد.

۴. تحلیل حساسیت

بررسی تغییرات انجام شده، پس از حل مدل و رسیدن به جواب بهینه که شامل تحلیل مجزا و منفرد تغییرات مقادیر پارامترهای مدل می‌باشد را تحلیل حساسیت می‌گویند. در بیشتر برنامه‌های کاربردی، برخی از داده‌های مساله دقیقاً مشخص نیستند و از این رو تا حد ممکن تخمین زده می‌شوند. مهم این است که بتوانید جواب جدید و بهینه مساله را بدون اینکه کار سخت حل مسئله از ابتدا انجام شود پیدا کنید.

۴.۱ تجزیه و تحلیل حساسیت برای پارامترهای عرضه و تقاضای مساله حمل و نقل خاکستری

طبق قضیه ۳.۱، برای تجزیه و تحلیل حساسیت پارامترهای عرضه و تقاضا یک مساله حمل و نقل خاکستری، نیازمند تجزیه و تحلیل حساسیت پارامترهای عرضه و تقاضا برای مساله حمل و نقل مرکزی و مساله حمل و نقل عرضی متناظر آن هستیم.

اکنون، برای تجزیه و تحلیل حساسیت مقادیر عرضه و تقاضا در مسئله حمل و نقل مرکزی، جدول تخصیص برای مسئله حمل و نقل مرکزی را که با روش نقطه صفر بدست آمده در نظر می‌گیریم.

فرض کنید $\otimes_c d_k = \max \{\otimes_c d_1, \otimes_c d_2, \dots, \otimes_c d_n\}$ و $\otimes_c s_t = \max \{\otimes_c s_1, \otimes_c s_2, \dots, \otimes_c s_m\}$ باشد که در آنها $\otimes_c s_t$ مرکز عرضه خاکستری t ام و $\otimes_c d_k$ مرکز تقاضای خاکستری k ام می‌باشد.

اکنون $\otimes_c s_i$ ها را با $\otimes_c s_t, i \neq t$ و $\otimes_c s_i + \alpha_i, i = 1, 2, \dots, m, i \neq t$ را با $\otimes_c s_t$ ، $\otimes_c d_j$ ها را با $\otimes_c d_k - \sum_{i=1}^m \alpha_i$ ، $i \neq k$ جایگزین می‌کنیم.

$\otimes_c d_k - \sum_{j=1}^n \lambda_j$ ، $j \neq k$ را با $\otimes_c d_k$ و $\otimes_c d_j + \lambda_j, j = 1, 2, \dots, n, j \neq k$ جایگزین می‌کنیم.

مقادیر α_i, λ_j برای هر i و j را بدون تغییر جواب بهینه محاسبه می‌کنیم. یعنی شرایط تخصیص روش نقطه صفر باید برآورده شود. بنابراین، با استفاده از شرایط تخصیص روش نقطه صفر، می‌توان دامنه‌های هر یک از مقادیر $\otimes_c d_j, \otimes_c s_i$ را برای هر i و j طوری محاسبه کرد که جواب بهینه فعلی را حفظ کرد.

به طور مشابه، ما می‌توانیم دامنه تمام مقادیر عرضه و تقاضا را در مساله حمل و نقل عرضی تعیین کنیم تا جواب بهینه فعلی را حفظ کنیم. سرانجام، ما دامنه تمام مقادیر عرضه و تقاضای مسایل حمل و نقل خاکستری برای حفظ جواب بهینه فعلی را با پیوستن نتایج مساله حمل و نقل مرکزی و مساله حمل و نقل عرضی بهم بدست می‌آوریم.

۲.۴ الگوریتم مرکز - عرض

اکنون یک روش جدید، یعنی روش مرکز-عرض برای مطالعه تجزیه و تحلیل حساسیت عرضه و تقاضا در مسائل حمل و نقل خاکستری معرفی می‌کنیم. این روش شامل مراحل زیر است:

۱. مسائل حمل و نقل مرکزی و حمل و نقل عرضی را برای مساله حمل و نقل خاکستری تشکیل دهید.

۲. جواب بهینه مسئله حمل و نقل مرکزی را تعیین کنید.

۳. اکنون برای تجزیه و تحلیل حساسیت مقادیر عرضه و تقاضا در مسئله حمل و نقل مرکزی، جدول تخصیص را که با روش نقطه صفر بدست آمده در نظر بگیرید.

فرض کنید $\otimes_c d_k = \max\{\otimes_c d_1, \otimes_c d_2, \dots, \otimes_c d_n\}$ و $\otimes_c s_t = \max\{\otimes_c s_1, \otimes_c s_2, \dots, \otimes_c s_m\}$ باشد.

اکنون $\otimes_c s_i$ ها را با $\otimes_c s_t, \otimes_c s_i + \alpha_i, i = 1, 2, \dots, m, i \neq t$ را با $\otimes_c s_t - \sum_{i=1}^m \alpha_i, i \neq t$ و $\otimes_c d_j$ ها را با $\otimes_c d_k - \sum_{j=1}^n \lambda_j, j \neq k$ جایگزین کنید.

۴. حداقل و حداکثر مقادیر α_i, λ_j را برای هر i و j محاسبه کرده و با استفاده شرایط روش نقطه صفر برای حفظ جواب بهینه فعلی، محدوده مقادیر عرضه و تقاضا را در مسئله حمل و نقل مرکزی پیدا کنید.

۵. مرحله ۲ تا ۴ را برای مساله حمل و نقل عرضی بکار بگیرید و دامنه مقادیر عرضه و تقاضا را در مساله حمل و نقل عرضی با شرط حفظ جواب بهینه فعلی محاسبه کنید.

۶. با استفاده از نتایج بدست آمده از مرحله ۴ و مرحله ۵ و قضیه ۳.۱، دامنه مقادیر عرضه و تقاضا برای مساله حمل و نقل خاکستری بدست می‌آید.

۵. مثال عددی

در این بخش، عملکرد الگوریتم پیشنهادی با ارائه یک مثال نشان داده شده است.

مثال ۵.۱: یک شرکت حمل و نقل می‌خواهد نیازهای غذایی اولیه مردم سه شهر گرفتار در حوادث غیرمترقبه و بلایای طبیعی (همچون زلزله، ...) از دو شهر همجوار تامین کند. هزینه‌های حمل و نقل به ازای هر واحد کالا، میزان عرضه و تقاضای غذا برای هر شهر را نمی‌توان به طور دقیق تعیین کرد، اما با توجه به خسارت ایجاد شده توسط بلای طبیعی، ارزش آنها به اعداد خاکستری در جدول ۲ ارائه شده است. مساله را طوری حل کنید، که ضمن تأمین نیازهای شهرها، هزینه حمل و نقل به حداقل برسد.

جدول ۲: ماتریس مساله حمل و نقل خاکستری

مقصد مبدا	$\otimes d_1$	$\otimes d_2$	$\otimes d_3$	عرضه
$\otimes S_1$	$\otimes [4, 8]$	$\otimes [2, 8]$	$\otimes [2, 6]$	$\otimes [20, 100]$
$\otimes S_2$	$\otimes [2, 4]$	$\otimes [3, 9]$	$\otimes [2, 6]$	$\otimes [10, 60]$
تقاضا	$\otimes 10, 50$	$\otimes 10, 40$	$\otimes 10, 70$	$\otimes 30, 160$

حل: فرض کنید مساله را به صورت زیر فرموله کنیم:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimiz } \otimes Z &= \otimes [4, 8] \times \otimes X_{11} + \otimes [2, 8] \times \otimes X_{12} + \otimes [2, 6] \times \otimes X_{13} \\
 &+ \otimes [2, 4] \times \otimes X_{21} + \otimes [3, 9] \times \otimes X_{22} + \otimes [2, 6] \times \otimes X_{23} \\
 \text{subject to } \sum_{j=1}^3 \otimes X_{1j} &= \otimes [20, 100] \\
 \sum_{j=1}^3 \otimes X_{2j} &= \otimes [10, 60] \\
 \sum_{i=1}^2 \otimes X_{i1} &= \otimes [10, 50] \\
 \sum_{i=1}^2 \otimes X_{i2} &= \otimes [10, 40] \\
 \sum_{i=1}^2 \otimes X_{i3} &= \otimes [10, 70] \\
 \otimes X_{ij} &\geq \otimes 0, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3.
 \end{aligned} \tag{9}$$

اکنون، مساله حمل و نقل مرکزی متناظر با مساله حمل و نقل خاکستری داده شده در زیر آورده شده است:

جدول ۳: ماتریس مساله حمل و نقل مرکزی

مقصد مبدا	$\otimes_c d_1$	$\otimes_c d_2$	$\otimes_c d_3$	عرضه
$\otimes_c S_1$	۶	۵	۴	۶۰
$\otimes_c S_2$	۳	۶	۴	۳۵
تقاضا	۳۰	۲۵	۴۰	۹۵

با استفاده از روش نقطه صفر، جواب بهینه مساله حمل و نقل مرکزی به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\otimes_c X_{12} = 25, \quad \otimes_c X_{13} = 35, \quad \otimes_c X_{21} = 30, \quad \otimes_c X_{23} = 5.$$

اکنون، مساله حمل و نقل عرضی متناظر با مساله حمل و نقل خاکستری داده شده در زیر آورده شده است:

جدول ۴: ماتریس مساله حمل و نقل عرضی

مقصد \ مبدا	$\otimes_w d_1$	$\otimes_w d_2$	$\otimes_w d_3$	عرضه
$\otimes_w s_1$	۲	۳	۲	۴۰
$\otimes_w s_2$	۱	۳	۲	۲۵
تقاضا	۲۰	۱۵	۳۰	۶۵

با استفاده از روش نقطه صفر، جواب بهینه مساله حمل و نقل عرضی به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\otimes_w x_{12} = 15, \otimes_w x_{13} = 25, \otimes_w x_{21} = 20, \otimes_w x_{23} = 5.$$

بنابراین، جواب مساله حمل و نقل خاکستری داده شده با استفاده از تذکر ۱.۲ به صورت زیر خواهد بود.

$$\otimes x_{12} \in \otimes [10, 40], \otimes x_{13} \in \otimes [10, 60]$$

$$, \otimes x_{21} \in \otimes [10, 50], \otimes x_{23} \in \otimes [0, 10].$$

اکنون، حساسیت پارامترهای عرضه و تقاضا در مسئله حمل و نقل مرکزی را بررسی می‌کنیم. جدول تخصیص برای مساله حمل و نقل مرکزی در زیر آورده شده است.

جدول ۵: ماتریس مساله حمل و نقل مرکزی

مقصد \ مبدا	$\otimes_c d_1$	$\otimes_c d_2$	$\otimes_c d_3$	عرضه
$\otimes_c s_1$	۳	۰	۰	۶۰
$\otimes_c s_2$	۰	۱	۰	۳۵
تقاضا	۳۰	۲۵	۴۰	۹۵

اکنون با استفاده از مرحله سوم الگوریتم جدول زیر را در نظر بگیرید.

جدول ۶: ماتریس مساله حمل و نقل مرکزی با استفاده از مرحله سوم الگوریتم

مقصد \ مبدا	$\otimes_c d_1$	$\otimes_c d_2$	$\otimes_c d_3$	عرضه
$\otimes_c s_1$	۳	۰	۰	$60 - \alpha_1$
$\otimes_c s_2$	۰	۱	۰	$35 + \alpha_1$
تقاضا	$30 + \beta_1$	$25 + \beta_2$	$40 - \beta_1 - \beta_2$	۹۵

اکنون، با استفاده از شرایط تخصیص روش نقطه صفر مربوط به عرضه و تقاضا روابط زیر را خواهیم داشت:

$$60 - \alpha_1 \leq 65 - \beta_1 \text{ و } 35 + \alpha_1 \leq 70 - \beta_1 \quad (10)$$

$$30 + \beta_1 \leq 35 + \alpha_1, 25 + \beta_1 \leq 60 - \alpha_1 \text{ و } 40 - \beta_1 - \beta_2 \leq 95 \quad (11)$$

از روابط بالا، داریم:

$$\beta_1 - \alpha_1 \leq 5, \beta_1 + \alpha_1 \leq 35, -55 \leq \beta_1 + \beta_2 \leq 40 \quad (12)$$

اکنون، از آنجا که میزان عرضه در هر مبدا و میزان تقاضا در هر مقصد غیر منفی است، موارد زیر را خواهیم داشت:

$$\left. \begin{array}{l} 60 - \alpha_1 \geq 0 \Rightarrow \alpha_1 \leq 60 \\ 35 + \alpha_1 \geq 0 \Rightarrow -35 \leq \alpha_1 \end{array} \right\} \Rightarrow -35 \leq \alpha_1 \leq 60 \quad (13)$$

$$30 + \beta_1 \geq 0 \Rightarrow -30 \leq \beta_1 \quad (14)$$

$$25 + \beta_2 \geq 0 \Rightarrow -25 \leq \beta_2 \quad (15)$$

$$40 - \beta_1 - \beta_2 \geq 0 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 \leq 40 \quad (16)$$

از معادله (۱۲)، (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) داریم؛

$$\left. \begin{array}{l} 30 + \beta_1 \geq 0 \Rightarrow -30 \leq \beta_1 \\ \beta_1 - \alpha_1 \leq 5 \Rightarrow \beta_1 \leq 5 + \alpha_1 \\ \alpha_1 \leq 60 \end{array} \right\} \Rightarrow \beta_1 \leq 65 \quad (17)$$

$$\left. \begin{array}{l} 25 + \beta_2 \geq 0 \Rightarrow -25 \leq \beta_2 \\ \beta_2 + \alpha_1 \leq 35 \Rightarrow \beta_2 \leq 35 - \alpha_1 \\ -\alpha_1 \leq 35 \end{array} \right\} \Rightarrow -25 \leq \beta_2 \leq 70 \quad (18)$$

از (۱۳) داریم:

$$0 \leq \otimes_c S_1 \leq 95 \text{ و } 0 \leq \otimes_c S_2 \leq 95$$

از (۱۷) و (۱۸) داریم؛

$$0 \leq \otimes_c d_1 \leq 95, 0 \leq \otimes_c d_2 \leq 95, 0 \leq \otimes_c d_3 \leq 95$$

جدول تخصیص برای مساله حمل و نقل عرضی در زیر آورده شده است.

جدول ۷: ماتریس مساله حمل و نقل عرضی

مقصد \ مبدا	$\otimes_w d_1$	$\otimes_w d_2$	$\otimes_w d_3$	عرضه
$\otimes_w S_1$	۱	۰	۰	۴۰
$\otimes_w S_2$	۰	۱	۰	۲۵
تقاضا	۲۰	۱۵	۳۰	۶۵

اکنون با استفاده از مرحله سوم الگوریتم مرکز- عرض جدول زیر را در نظر بگیرید.

جدول ۸: ماتریس مساله حمل و نقل عرضی با استفاده از مرحله سوم الگوریتم

مقصد مبدا	$\otimes_w d_1$	$\otimes_w d_2$	$\otimes_w d_3$	عرضه
$\otimes_w s_1$	۱	۰	۰	$40 - \alpha_1$
$\otimes_w s_2$	۰	۱	۰	$25 + \alpha_1$
تقاضا	$20 + \beta_1$	$15 + \beta_2$	$30 - \beta_1 - \beta_2$	۶۵

اکنون، از آنجا که میزان عرضه در هر مبدا و میزان تقاضا در هر مقصد غیر منفی است، موارد زیر را داریم:

$$-25 \leq \alpha_1 \leq 40$$

$$-20 \leq \beta_1 \leq 30$$

$$-15 \leq \beta_2 \leq 30$$

$$-35 \leq \beta_1 + \beta_2 \leq 30$$

این نشان می‌دهد که:

$$0 \leq \otimes_w s_1 \leq 65, \quad 0 \leq \otimes_w s_2 \leq 65, \quad 0 \leq \otimes_w d_1 \leq 50$$

$$, \quad 0 \leq \otimes_w d_2 \leq 45, \quad 0 \leq \otimes_w d_3 \leq 65$$

اکنون، در جدول زیر دامنه‌های کل عرضه و تقاضا در مسئله حمل و نقل خاکستری به گونه‌ای آورده شده، که اساس پهنه آن تغییر نکند:

جدول ۹: دامنه‌های میزان عرضه و تقاضا

	کران پایین	کران داده شده	کران بالا
عرضه	$[0, 0]$	$\otimes 20, 100$	$\otimes 30, 160$
عرضه	$[0, 0]$	$\otimes 10, 60$	$\otimes 30, 160$
تقاضا	$[0, 0]$	$\otimes 10, 50$	$\otimes 45, 145$
تقاضا	$[0, 0]$	$\otimes 10, 40$	$\otimes 50, 140$
تقاضا	$[0, 0]$	$\otimes 10, 70$	$\otimes 30, 160$

بنابراین هر تغییری در محدوده‌های بدست آمده برای عرضه و تقاضا بر جواب بهینه تأثیر نمی‌گذارد، در حالی که، هر تغییری در خارج از دامنه آنها بر جواب اساسی بهینه تأثیر گذار خواهد بود.

۶. نتیجه‌گیری

مساله حمل و نقل کاربردهای عملی گسترده‌ای در سیستم‌های لجستیک، برنامه‌ریزی نیروی انسانی، تخصیص پرسنل، کنترل موجودی، برنامه‌ریزی تولید و غیره دارد و هدف آن یافتن بهترین راه برای تأمین تقاضای n مقصد با استفاده از ظرفیت‌های m مبدا است به طوریکه مجموع هزینه حمل می‌نیم شود. روش‌های مختلف و کارآمدی برای حل مسائل حمل و نقل با فرض داشتن میزان دقیق عرضه هر مبدا و میزان تقاضای دقیق هر مقصد ارائه شده است. در مسائل زندگی واقعی، این شرایط ممکن است همیشه برآورده نشود. لذا به حل مساله حمل و نقل با استفاده داده‌های نادقیق نیاز داریم، که یکی از این روش‌ها استفاده از مساله حمل و نقل خاکستری می‌باشد. در این مقاله با استفاده از مرکز و عرض اعداد خاکستری بازه‌ای، روشی برای تحلیل حساسیت عرضه و تقاضا در مسئله حمل و نقل خاکستری ارائه شده است. با این روش یک محدوده مهم برای پارامترهای عرضه و تقاضا پیدا می‌شوند که هر تغییری در آن محدوده بر جواب بهینه تأثیر نمی‌گذارد، در حالی که، هر تغییری در خارج از دامنه آنها بر جواب اساسی بهینه تأثیر می‌گذارد. به طور کلی، اطلاعات مربوط به تجزیه و تحلیل حساسیت در یک مسئله حمل و نقل معمولاً مهمتر از خود جواب بهینه است. تجزیه و تحلیل حساسیت پارامترهای عرضه و تقاضا در یک مسئله حمل و نقل با استفاده از روش پیشنهادی می‌تواند به تصمیم‌گیرندگان کمک کند تا بدانند در چه دامنه‌ای از تغییر منابع در بازار می‌توانند خطوط تولید نصب شده را فعال نگه دارند و فقط با تغییر سطح تولید آنها با داشتن پارامترهای نادقیق مشکلات توزیع را کنترل کنند.

منابع

- [1] Kavitha, K. and Pandian, P. (2012). Sensitivity analysis of supply and demand in a fully interval transportation problem, *International Journal of Engineering Research and Applications*, 2(3), 1900-1910.
- [2] Goodarzian, F., Abraham, A. and Fathollahi-Fard, A.M. (2021). A biobjective home health care logistics considering the working time and route balancing: a self-adaptive social engineering optimizer, *J. Comput. Desi. Eng.* 8(1), 452–474.
- [3] Goodarzian, F., Taleizadeh, A.A., Ghasemi, P. and Abraham, A. (2021). An integrated sustainable medical supply chain network during COVID-19, *Eng. Appl. Artif. Intell.* 100, 104188.
- [4] Goodarzian, F., Shishebori, D., Nasser, H. and Dadvar, F. (2021). A bi-objective production-distribution problem in a supply chain network under grey flexible conditions, *RAIRO-Oper. Res.* 55, S1287–S1316.
- [5] Sahebjamnia, N., Goodarzian, F. and Hajiaghaei-Keshteli, M. (2020). Optimization of multi-period three-echelon citrus supply chain problem, *J. Optim. Ind. Eng.* 13(1), 39–53.
- [6] Fakhrzad, M.B. and Goodarzian, F. (2021). A new multi-objective mathematical model for a Citrus supply chain network design: metaheuristic algorithms, *J. Optim. Ind. Eng.* 14(2), 127–144.
- [7] Fathollahi-Fard, A.M., Ahmadi, A., Goodarzian, F. and Cheikhrouhou, N. (2020). A bi-objective home healthcare routing and scheduling problem considering patients' satisfaction in a fuzzy environment, *Appl. Soft Comput.* 93, 106385.
- [8] Damci, K.P., Dey, S.S. and Kücükayvuz, S. (2015). On the transportation problem with market choice. *Discret Appld Mathematics*, 181:54–77.
- [9] Sharma, A., Verma, V., Kaur, P. and Dahiya, K. (2015). An iterative algorithm for two level hierarchical time minimization transportation problem, *European Journal Operation Research*, 246(3), 700–707.
- [10] Maity, G. and Roy, S.K. (2015). Solving multi-objective transportation problem with interval goal using utility function approach, *International Journal of Operational Research*, 27(4), 513–529.
- [11] Roy, S.K. and Mahapatra, D.R. (2011). Multi-objective interval valued transportation probabilistic problem involving log-normal, *International Journal of Mathematics and Scientific Computing*, 1(2), 14-21.
- [12] Ghasemi, P., Khalili-Damghani, K., Hafezalkotob, A. and Raissi, S. (2020). Stochastic optimization model for distribution and evacuation planning (A case study of Tehran earthquake), *Socioecon. Plan. Sci.* 71, 100745.
- [13] Goodarzian, F., Hoseini-Nasab, H., Toloo, M. and Fakhrzad, M.B. (2021). Designing a new Medicine Supply Chain Network considering production technology policy using two novel heuristic algorithms, *RAIRO – Oper. Res.* 55(2), 1015–1042.

- [14] Deng, J.L. (1982). The control problems of grey systems, *Systems and Control Letters*, 1(5), 288-294.
- [15] Li., Q. X. (2007). The cover solution of grey linear programming. *Journal of Grey System*, 19(4), 309-320.
- [16] Nasser, S. H., Yazdani, A. and Darvishi, D. (2016). A primal simplex algorithm for solving linear programming problem with grey cost coefficients, *Journal of New Researches in Mathematics*, 1(4), 115-135.
- [17] Mahmoudi, A., Liu, S., Ahmed, J.S. and Abbasi, M. (2019). A novel method for solving linear programming with grey parameters, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 36, 161-172.
- [18] Razavi Hajiagha, S.H., Akrami, H. and Hashemi, S.S. (2012). A multi objective programming approach to solve grey linear programming. *Grey Systems: Theory and Application*, 2 (2), 259-271.
- [19] Saffar Ardabili, J., Darvishi, D. and PourOfoghi, F. (2020). Application of center and width concepts to solving grey linear programming, *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 6 (49), 1-12.
- [20] Maity, G. and Roy, S.K. (2016). Solving a multi-objective transportation problem with nonlinear cost and multichoice demand. *International Journal of Management Science and Engineering Management*, 11(1), 62–70.
- [21] Annie Christi, M.S. and Kalpana, I. (2016). Solutions of multi objective fuzzy transportation problem with non-linear membership functions, *International Journal of Engineering Research and Application*, 6(11), 52-57.
- [22] Yeola, M.C. and Jahav, V.A. (2016). Solving multi-objective transportation problem using fuzzy programming technique parallel method, *International Journal of Recent Scientific Research*, 7(1), 8455-8457.
- [23] Abdul Kalam Azad, S.M., Hossain, B. and Rahaman, M. (2017). An algorithmic approach to solve transportation problem with the average total opportunity cost method, *International Journal of Scientific and Research Publications*, 7(2), 262-270.
- [24] Gaurav, S., Abbas, S. H. and Gupta, V. K. (2012). Optimal solution of transportation problem with the help of zero point method, *International Journal of Engineering Research and Technology (IJERT)*, 1(5), 1-6.
- [25] Gupta, A. and Kumar, A. (2012). A new method for solving linear multi objective transportation problems with fuzzy parameters, *Applied Mathematical Modelling*, 36, 1421-1430.
- [26] Jignasha, G.P. and Jayesh, M.D. (2017). Solving multi Objective interval transportation problem using grey situation decision-making theory based on grey numbers, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 113(2), 219-233.
- [27] Kowalski, K., Lev, B., Shen, W. and Tu, Y. (2014). A fast and simple branching algorithm for solving small scale fixed-charge transportation problem. *Operations Research Perspectives*, 1(1), 1-5.

- [28] Murugesan, S. and Ramesh Kumar, B. (2013). New optimal solution to fuzzy interval transportation problem, *International Journal of Engineering Science and Technology*, 3(1), 188-192.
- [29] Nasser, S.H., Darvishi, D. and Yazdani, A. (2017). A new approach for solving grey assignment problems, *Control and Optimization in Applied Mathematics*, 2(1), 15-28.
- [30] Pandian, P., Natarajan, G. and Akilbasha, A. (2016). Fully rough integer interval transportation problems, *International Journal of Pharmacy and Technology*, 8, 13866-13876.
- [31] Pandian, P. and Akilbasha, A. (2018). Fuzzy interval Integer transportation problems, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 111(9), 133-142.
- [32] Palanivel, M. and Suganya, M. (2018). A new method to solve transportation problem harmonic mean approach, *Engineering Technology*, 2(3), 1-3.
- [33] Roy, S.K. and Mahapatra, D.R. (2014). Solving solid transportation problem with multi-choice cost and stochastic supply and demand, *International Journal Strategic Decision Sciences*, 5(3), 1-26.
- [34] Sophia Porchelvi, R. and Anitha, M. (2018). On solving multi objective interval transportation problem using fuzzy programming technique, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 118(6), 483-491.
- [35] Pourofoghi, F., Darvishi, D. and Saffar Ardabili, J. (2021). A New Approach to Find the Solution of Transportation Problem with Grey Parameters, *Journal of Operational Research and its Applications*, 18, 2 (69), 59-73.
- [36] Pour Ofoghi, F., Saffar Ardabili, J. and Darvishi, D. (2019). A new approach for finding an optimal solution for grey transportation problem, *Nonlinear Analysis in Engineering and Sciences*, 10, 83-95.
- [37] Moore, R.E., Kearfott, R.B. and Cloud, M.J. (2009). *Introduction to Interval Analysis*. SIAM Press, Philadelphia.
- [38] Taha, H.A. (1989). *Operations Research*. Macmillan Publishing Company, New York.