دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و ششم، خرداد و تیر ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

# روشی جدید برای حل معادلات دیفرانسیل فازی از مرتبه nام با استفاده از چند جمله‌ای درونیاب

الهام احمدی*، نازنین احمدی

[۱] گروه ریاضی، واحد شهر قدس، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
[۲] گروه ریاضی، واحد ورامین-پیشوا، دانشگاه آزاد اسلامی، ورامین، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۴/۱۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۶/۱۹

**چکیده**

با توجه به اهمیت نقش معادلات دیفرانسیل فازی در علوم و مهندسی در این مقاله ما روشی عددی برای حل معادله دیفرانسیل فازی از مرتبه nام تحت مشتق تعمیم یافته را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این روش جواب معادله دیفرانسیل فازی توسط چندجمله‌ای فازی که به فرم یک قطعه‌ای چند جمله‌ای است در هر زیر بازه از بازه جواب تقریب زده می‌شود. در حالت خاص برای حل معادله دیفرانسیل فازی از مرتبه دوم با توجه به نوع مشتق پذیری چهار حالت در نظر گرفته می‌شود و سپس چند جمله‌ای فازی برای هر حالت ساخته می‌شود. درجه قطعه‌ای چندجمله‌ای‌ها در هر یک از زیر بازه‌های جواب از درجه ۲ می‌باشد. این روش توسط دو مثال از معادله دیفرانسیل فازی مرتبه ۲ تحت مشتق تعمیم یافته شرح داده شده است.

**واژه‌های کلیدی:** معادلات دیفرانسیل فازی، مشتق تعمیم یافته، روش عددی، چند جمله‌ای درونیاب.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: e.ahmadi@qodsiau.ac.ir

## ۱- مقدمه

در جهان واقعی سیستم‌های غیرخطی نامشخص می‌توانند با معادلات دیفرانسیل فازی مدل‌بندی شوند. مشتق فازی یک مساله خیلی مهم در معادلات دیفرانسیل فازی هست که اولین بار توسط زاده و چنگ[۱] معرفی شد و بعد از آن مشتق سیکالا، دبیوس و پراید، مشتق گوچسل وکسمن، پوری و رالسکیو و مشتق هاکوهارا توسط محققین مورد بحث و بررسی قرار گرفت[۲،۳،۴،۵،۶]. در بیشتر مقالات، معادلات دیفرانسیل فازی تحت مشتق هاکوهارا بیان گردیده است و روش‌های عددی مانند روش اویلر، روش پیشگو-اصلاحگر، روش پیشگو- اصلاحگر بهبود یافته، روش تیلور و... برای حل معادلات دیفرانسیل فازی از مفهوم مشتق هاکوهارا استفاده شده‌است[۷،۸،۹،۱۰،۱۱]. تحقیقات انجام شده نشان داده که جواب معادلات دیفرانسیل فازی تحت مشتق هاکوهارا دارای یک نقص بزرگ می‌باشد که زمانی t افزایش پیدا می‌کرد، مقدار ابهام در جواب افزایش می‌یافت. بده و گال با تعریف مشتق تعمیم یافته قوی این نقص را برطرف کردند [۱۲] و خواص مشتق تعریف شده را مورد بحث و بررسی قرار دادند[۱۳،۱۴،۱۵]. نیتو و همکاران[۱۶] با به کارگیری مشتق تعمیم یافته، جواب معادلات دیفرانسیل مرتبه اول فازی را با تبدیل معادله دیفرانسیل فازی به دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول قطعی به دست آوردند. همچنین خواستان و همکاران[۱۷] با یک روش تحلیلی جواب‌های معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه $n$ام تحت مشتق تعمیم یافته بررسی کردند. آنها تعریف‌های جدیدی از جواب معادلات دیفرانسیل فازی با انتخاب انواع مختلفی از مشتق معرفی، سپس جواب‌های مختلفی برای معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه دوم به دست آورند. در این مقاله روشی عددی برای به دست آوردن جواب‌های معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه دوم تحت مشتق تعمیم یافته معرفی می‌کنیم و با معرفی سری تیلور فازی، چندجمله‌ای قطعه‌ای فازی برای تقریب‌زدن جواب چندگانه معادلات دیفرانسیل فازی می‌سازیم. این تحقیق به صورت زیر سازماندهی گردیده است. در فصل ۲، تعاریف اساسی مورد نیاز آورده شده است، است، در فصل ۳ چهار قضیه اثبات شده است، در فصل ۴ روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه دوم معرفی شده است و در فصل ۵ روش ارائه شده توسط مثال‌های عددی مورد ارزیابی قرار گرفته شده است.

## ۲- تعاریف اولیه

در این بخش تعاریف و نمادهای اولیه معرفی می‌شوند.

مجموعه تمام اعداد فازی که نرمال، محدب، نیم پیوسته بالایی و دارای تکیه‌گاه فشرده هستند، روی مجموعه اعداد حقیقی با نشان داده می‌شود.

برش‌های اعداد فازی برای $0 < \alpha \leq 1$ مجموعه‌هایی به فرم

$[u]^{\alpha} = \{t \in \ \ |u(t) \geq \alpha\}$ و

$[u]^{0} = cl\{t \in \ \ |u(t) > 0\}.$

می‌باشند. در این تحقیق برش‌های $u \in$ به فرم $[u]^{\alpha} = [u^{-}(\alpha), u^{+}(\alpha)]$ نمایش داده می‌شود.

برای $u, v \in$ دلخواه و $k \in$ جمع و ضرب اسکالر به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[u + v]^{\alpha} = [u]^{\alpha} + [v]^{\alpha}\,, [ku]^{\alpha} = k[u]^{\alpha}$$

**تعریف۱-۲:** [۱۸] فرض کنید $u, v \in$ آنگاه تفاضل تعمیم یافته هاکوهارا u و v به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u \quad v = w$$
$$\begin{cases} (a).\, u = v + w; \\ or\ (b).\, v = u + (\ \ 1)w. \end{cases}$$

**تعریف۲-۲:** [۱۹] تابع $D: \quad \times \quad {}^{+} \cup \{0\}$ را که به صورت

$$D(u,v) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \max\{|u^{-}(\alpha) \quad v^{-}(\alpha)|, |u^{+}(\alpha) \quad v^{+}(\alpha)|\}.$$

تعریف می‌شود را فاصله هاسدورف بین دو عدد فازی می‌گوییم.

با در نظر گرفتن $u,v,w,z \in$ خواص زیر برای متر $D$ برقرار است:

- $D(u \oplus w, v \oplus w) = D(u,v);$
- $D(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| D(u,v);$
- $D(u \oplus v, w \oplus z) \leq D(u,w) + D(v,z);$
- $D(u \quad v, w \quad z) \leq (u,w) + D(v,z)$ .

**خاصیت ۱-۲:** [۱۸] فرض کنید $A,B \in K_n^C$ دو مجموعه فشرده و محدب باشند، در این صورت

۱. اگر $A \sim_h B$ موجود باشد، $\mathrm{A} \quad \mathrm{B} = \mathrm{A} \sim_{\mathrm{h}} \mathrm{B}$

۲. $\mathrm{A} \quad A = 0$

۳. اگر $A \quad B$، بنابر رابطه $(a)$ تعریف (۱-۲) موجود باشد، آنگاه $B \quad A$ بنابر رابطه $(b)$ تعریف (۱-۲) موجود است و بالعکس.

۴. $\{0\} \quad (A \quad B) = (\ B) \quad (\ A)$

۵. $(A \quad B) = (B \quad A) = C$ اگر و فقط اگر $C = \{0\}$ و $A = B$ .

**تعریف۳-۲:** [۱۲] فرض کنید $F: I \to$ و $t_0 \in I$ می‌گوییم F در نقطه $t_0$ دارای مشتق‌پذیر تعمیم یافته است، اگر $F'(t_0) \in$ موجود باشد به طوری که

۱. برای هر $0 <$ به اندازه کافی نزدیک به صفر تفاضل $\mathrm{F}(\mathrm{t}_0 + \mathrm{h}) \quad \mathrm{F}(\mathrm{t}_0)$ و $\mathrm{F}(\mathrm{t}_0) \quad \mathrm{F}(\mathrm{t}_0 \quad \mathrm{h})$ موجود و داشته باشیم (بر حسب متر $D$):

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(t_0+h) \quad F(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(t_0) \quad F(t_0-h)}{h} = F'(t_0)$$

یا

۲. برای هر $0 <$ به اندازه کافی نزدیک به صفر تفاضل $\mathrm{F}(\mathrm{t}_0) \quad \mathrm{F}(\mathrm{t}_0 + \mathrm{h})$ و $\mathrm{F}(\mathrm{t}_0 \quad \mathrm{h}) \quad \mathrm{F}(\mathrm{t}_0)$ موجود و داشته باشیم (بر حسب متر $D$):

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(t_0) \quad F(t_0+h)}{-h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(t_0-h) \quad F(t_0)}{-h} = F'(t_0)$$

یا

۳. برای هر $0 <$ به اندازه کافی نزدیک به صفر تفاضل $\mathrm{F}(\mathrm{t}_0 + \mathrm{h}) \quad \mathrm{F}(\mathrm{t}_0)$ و $\mathrm{F}(\mathrm{t}_0) \quad \mathrm{F}(\mathrm{t}_0 \quad \mathrm{h})$ موجود و داشته باشیم (بر حسب متر D):

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(t_0+h) \quad F(t_0)}{h} \lim_{h\to 0^+} \frac{F(t_0-h) \quad F(t_0)}{-h} F'(t_0)$$

یا

۴. برای هر $0 <$ به اندازه کافی نزدیک به صفر تفاضل $\mathrm{F}(\mathrm{t}_0 + \mathrm{h}) \quad \mathrm{F}(\mathrm{t}_0)$ و $\mathrm{F}(\mathrm{t}_0 \quad \mathrm{h}) \quad \mathrm{F}(\mathrm{t}_0)$ موجود و داشته باشیم (بر حسب متر D):

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(t_0) \quad F(t_0+h)}{-h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(t_0) \quad F(t_0-h)}{h} = F'(t_0)$$

**تعریف۴-۲:** [۲۰] فرض کنید $F: I \to \ _F$ باشد، گوییم F روی بازه I، (1) مشتق‌پذیر است، هرگاه در شرط (۱) تعریف (۳-۲) صدق کند و به صورت $D_1F$ نشان داده می‌شود و به‌طور مشابهه اگر در شرط (۲) تعریف (۳-۲) صدق کند، F، (2) مشتق‌پذیر است و به صورت $D_2F$ نشان داده می‌شود.

**قضیه ۱-۲:** [۲۰] فرض کنید $F: I \to \ _F$ و برای هر $\alpha \in [0,1]$ داشته باشیم $[F(t)]^{\alpha} = [f_{\alpha}, g_{\alpha}]$ در این صورت

- اگر $F$، (1) مشتق‌پذیر باشد در این صورت توابع مشتق‌پذیر $f_{\alpha}$ و $g_{\alpha}$ مشتق‌پذیر هستند و $[D_1F(t)]^{\alpha} = [f'_{\alpha}, g'_{\alpha}]$ .

- اگر $F$،(2) مشتق‌پذیر باشد در این صورت توابع مشتق پذیر $f_{\alpha}$ و $g_{\alpha}$ مشتق‌پذیر هستند و $D_2F(t)]^{\alpha} = [g'_{\alpha}, f'_{\alpha}]$ .

**قضیه ۲-۲:** [۱۷] فرض کنید $D_1^{(1)}F: I \rightarrow \ _F$ و $D_2^{(1)}F: I \rightarrow \ _F$ دو تابع فازی باشند به‌طوری که $[F(t)]^\alpha = [f_\alpha, g_\alpha]$ در این صورت

۱. اگر $D_1^{(1)}F$، $(1)$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $f'_\alpha$ و $g'_\alpha$ توابع مشتق‌پذیر هستند و

$$[D_{1,1}^{(2)}F(t)]^\alpha = [f''_\alpha(t), g''_\alpha(t)]$$

۲. اگر $D_1^{(1)}F$، $(2)$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $f'_\alpha$ و $g'_\alpha$ توابع مشتق‌پذیر هستند و

$$[D_{1,2}^{(2)}F(t)]^\alpha = [g''_\alpha(t), f''_\alpha(t)]$$

۳. اگر $D_2^{(1)}F$، $(1)$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $f'_\alpha$ و $g'_\alpha$ توابع مشتق‌پذیر هستند و

$$[D_{2,1}^{(2)}F(t)]^\alpha = [g''_\alpha(t), f''_\alpha(t)]$$

۴. اگر $D_2^{(1)}F$، $(2)$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $f'_\alpha$ و $g'_\alpha$ توابع مشتق‌پذیر هستند و

$$[D_{2,2,}^{(2)}F(t)]^\alpha = [f''_\alpha(t), g''_\alpha(t)]$$

**تعریف ۵-۲:** [۱۶] فرض کنید $F: I \rightarrow \ _F$ و $n, m = 1,2$، گوییم $F$ در $t_0$ ، $(n, m)$ مشتق پذیر است هرگاه تابع فازی $D_n^{(1)}F$ در همسایگی نقطه $t_0$ موجود باشد و در نقطه $t_0$، $(m)$ مشتق پذیر باشد. مشتقات دوم تابع $F$ برای $n, m = 1,2$ به صورت $D_{n,m}^{(2)}F(t_0)$ نمادگذاری می‌شود.

**قضیه ۳-۲:** [۲۱] فرض کنید تابع f روی I، $(1)$ مشتق‌پذیر و $f'$ روی I انتگرال‌پذیر باشد، در این صورت

$$f(s) = f(a) \oplus \int_a^s D_1 f(s_1) ds_1.$$

**قضیه ۴-۲:** [۲۱] فرض کنید تابع f روی I، $(2)$ مشتق پذیر و $f'$ روی I انتگرال‌پذیر باشد، در این صورت

$$f(s) = f(a) \quad (\quad 1) \int_a^s D_2 f(s_1) ds_1.$$

## ۳- روش پیشنهادی

در این بخش ابتدا چهار قضیه ثابت می‌کنیم که در آن چهار جمله از سری تیلور فازی را با توجه به نوع مشتق تابع f معرفی می‌گردد.

**قضیه ۱-۳:** فرض کنید $f$، $f'$ و $f''$ روی I، $(1)$ مشتق‌پذیر و مشتقات $f'$، $f''$ و $f'''$ روی I انتگرال‌پذیر باشند، در این صورت

$$f(s) = f(a) \oplus (s \quad a) \odot D_1 f(a) \oplus \frac{(s-a)^2}{2} \odot D_{1,1}^2 f(a) \oplus R, \qquad (۱)$$

به طوری که

$$R = \int_a^s \int_a^{s_1} \int_a^{s_2} D_1(D_{1,1}^2 f(s_3)) ds_3 ds_2 ds_1$$

**اثبات:** چون تابع $f$، $(1)$ مشتق‌پذیر است بنابر قضیه (۳-۲) داریم:

$$f(s) = f(a) \oplus \int_a^s D_1 f(s_1) ds_1 \qquad (۲)$$

چون $D_1 f(s_1)$، $(1)$ مشتق‌پذیر است بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$D_1 f(s_1) = D_1 f(a) \oplus \int_a^{s_1} D_{1,1}^2 f(s_2) ds_2,$$

سپس با انتگرال‌گیری داریم:

$$\int_a^s D_1 f(s_1) ds_1 = (s \quad a) \odot D_1 f(a) \oplus \int_a^s \int_a^{s_1} D_{1,1}^2 f(s_2) ds_2 ds_1, \qquad (۳)$$

با قرار دادن رابطه (۳) در (۲) بدست می‌آوریم:

$$f(s) = f(a) \oplus [(s \quad a) \odot D_1 f(a) \oplus \int_a^s \int_a^{s_1} D_{1,1}^2 f(s_2) ds_2 ds_1], \qquad (۴)$$

با تکرار فرایند بالا برای $D_{1,1}^2 f(s_2)$ و با توجه به $(1)$ مشتق‌پذیر بودن آن داریم:

$$D_{1,1}^2 f(s_2) = D_{1,1}^2 f(a) \oplus \int_a^{s_2} D_1(D_{1,1}^2 f(s_3)) ds_3$$

مجددا با انتگرال‌گیری از رابطه فوق بدست می‌آوریم:

$$\int_a^s\int_a^{s_1} D_{1,1}^2 f(s_2)ds_2ds_1 = \frac{(s-a)^2}{2}\odot D_{1,1}^2 f(a)\oplus \int_a^s\int_a^{s_1}\int_a^{s_2} D_1(D_{1,1}^2 f(s_3))ds_3ds_2ds_1, \qquad (۵)$$

با قرار دادن رابطه (۵) در (۴) بدست می‌آوریم:

$$f(s) = f(a)\oplus[(s\quad a)\odot D_1 f(a) \oplus [\frac{(s-a)^2}{2}\odot D_{1,1}^2 f(a)\oplus R]],$$

به طوری که

$$R = \int_a^s\int_a^{s_1}\int_a^{s_2} D_1(D_{1,1}^2 f(s_3))ds_3ds_2ds_1.$$

**قضیه ۲-۳**: فرض کنید $f$، $f'$ و $f''$ روی I، (2) مشتق‌پذیر و مشتق توابع $f'$، $f''$ و $f'''$ روی I انتگرال‌پذیر باشند، در این صورت

$$f(s) = f(a)\quad(\ \ 1)[(s\quad a)\odot D_2 f(a)\quad(\ \ 1)[\frac{(s-a)^2}{2}\odot D_{2,2}^2 f(a)\quad(\ \ 1)R]] \qquad (۶)$$

به طوری که

$$R = \int_a^s\int_a^{s_1}\int_a^{s_2} D_2(D_{2,2}^2 f(s_3))ds_3ds_2ds_1$$

**اثبات**: چون تابع $f$، (2) مشتق‌پذیر است بنا بر قضیه (۴-۲) داریم:

$$f(s) = f(a)\quad(\ \ 1)\int_a^s D_2 f(s_1)ds_1. \qquad (۷)$$

چون $D_2 f(s_1)$، (2) مشتق‌پذیر است بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$D_2 f(s_1) = D_2 f(a)\oplus\int_a^{s_1} D_{2,2}^2 f(s_2)ds_2,$$

سپس با انتگرال‌گیری از رابطه فوق داریم:

$$\int_a^s D_2 f(s_1)ds_1 = (s\quad a)\odot D_2 f(a)\quad(\ \ 1)\int_a^s\int_a^{s_1} D_{2,2}^2 f(s_2)ds_2ds_1, \qquad (۸)$$

با قرار دادن رابطه (۸) در (۷) بدست می‌آوریم:

$$f(s) = f(a)\quad(\ \ 1)[(s\quad a)\odot D_2 f(a)\quad(\ \ 1)\int_a^s\int_a^{s_1} D_{2,2}^2 f(s_2)ds_2ds_1], \qquad (۹)$$

با تکرار فرایند بالا برای $D_{2,2}^2 f(s_2)$ و با توجه به (2) مشتق‌پذیر بودن آن داریم:

$$D_{2,2}^2 f(s_2) = D_{2,2}^2 f(a)\quad(\ \ 1)\int_a^{s_2} D_2(D_{2,2}^2 f(s_3))ds_3,$$

مجددا با انتگرال‌گیری از رابطه فوق بدست می‌آوریم:

$$\int_a^s\int_a^{s_1} D_{2,2}^2 f(s_2)ds_2ds_1 = \frac{(s-a)^2}{2}\odot D_{2,2}^2 f(a)\quad(\ \ 1)\int_a^s\int_a^{s_1}\int_a^{s_2} D_2(D_{2,2}^2 f(s_3))ds_3ds_2ds_1, \qquad (۱۰)$$

با قرار دادن رابطه (۱۰) در (۹) بدست می‌آوریم:

$$f(s) = f(a)\quad(\ \ 1)[(s\quad a)\odot D_2 f(a)\quad(\ \ 1)[\frac{(s-a)^2}{2}\odot D_{2,2}^2 f(a)\quad(\ \ 1)R]],$$

به طوری که

$$\mathrm{R} = \int_a^s\int_a^{s_1}\int_a^{s_2} D_2(D_{2,2}^2 f(s_3))ds_3ds_2ds_1.$$

**قضیه ۳-۳**: فرض کنید $f$ و $f''$ روی I، (1) مشتق‌پذیر و $f'$ روی I، (2) مشتق‌پذیر باشد، همچنین توابع $f'$، $f''$ و f''' روی I انتگرال پذیر باشند، در این صورت

$$f(s) = f(a)\oplus(s\quad a)\odot D_1 f(a)\quad(\ \ 1)[\frac{(s-a)^2}{2}\odot D_{1,2}^2 f(a)\oplus R]] \qquad (۱۱)$$

به طوری که

$$R = \int_a^s\int_a^{s_1}\int_a^{s_2} D_1(D_{1,2}^2 f(s_3))ds_3ds_2ds_1$$

**اثبات**: چون تابع $f$، (1) مشتق‌پذیر است بنا بر قضیه (۳-۲) داریم:

$$f(s) = f(a)\oplus\int_a^s D_1 f(s_1)ds_1 \qquad (۱۲)$$

چون $D_1 f(s_1)$، (2) مشتق‌پذیر است بنابراین

می‌توانیم بنویسیم:

$$D_1 f(s_1) = D_1 f(a) \quad ( \quad 1) \int_a^{s_1} D_{1,2}^2 f(s_2) ds_2,$$

سپس با انتگرال‌گیری از رابطه فوق داریم:

$$\int_a^s D_1 f(s_1) ds_1 = (s \quad a) \odot D_1 f(a) \quad ( \quad 1) \int_a^s \int_a^{s_1} D_{1,2}^2 f(s_2) ds_2 ds_1, \qquad (۱۳)$$

با قرار دادن رابطه (۱۳) در (۱۲) بدست می‌آوریم:

$$f(s) = f(a) \oplus [(s \quad a) \odot D_1 f(a) \quad ( \quad 1) \int_a^s \int_a^{s_1} D_{1,2}^2 f(s_2) ds_2 ds_1], \qquad (۱۴)$$

با تکرار فرایند بالا برای $D_{1,2}^2 f(s_2)$ و با توجه به $(1)$ مشتق‌پذیر بودن آن داریم:

$$D_{1,2}^2 f(s_2) = D_{1,2}^2 f(a) \oplus \int_a^{s_2} D_1(D_{1,2}^2 f(s_3)) ds_3,$$

مجددا با انتگرال‌گیری از رابطه فوق بدست می‌آوریم:

$$\int_a^s \int_a^{s_1} D_{1,2}^2 f(s_2) ds_2 ds_1 = \frac{(s-a)^2}{2} \odot D_{1,2}^2 f(a) \oplus \int_a^s \int_a^{s_1} \int_a^{s_2} D_1(D_{1,2}^2 f(s_3)) ds_3 ds_2 ds_1, \qquad (۱۵)$$

با قرار دادن رابطه (۱۵) در (۱۴) بدست می‌آوریم:

$$f(s) = f(a) \oplus [(s \quad a) \odot D_1 f(a) \quad ( \quad 1)[\frac{(s-a)^2}{2} \odot D_{1,2}^2 f(a) \oplus R],$$

به طوری که

$$\int_a^s \int_a^{s_1} \int_a^{s_2} D_1(D_{1,2}^2 f(s_3)) ds_3 ds_2 ds_1.$$

**قضیه ۴-۳:** فرض کنید $f$ و $f''$ روی I، $(2)$ مشتق‌پذیر و $f'$ روی I، $(1)$ مشتق‌پذیر باشد، همچنین توابع $f'$، $f''$ و $f'''$ روی I انتگرال پذیر باشند، در این صورت

$$f(s) = f(a) \quad ( \quad 1)[(s \quad a) \odot D_2 f(a) \oplus [\frac{(s-a)^2}{2} \odot D_{2,1}^2 f(a) \quad ( \quad 1)R]]$$

به طوری که

$$R = \int_a^s \int_a^{s_1} \int_a^{s_2} D_2(D_{2,1}^2 f(s_3)) ds_3 ds_2 ds_1$$

**اثبات:** چون تابع $f$، $(2)$ مشتق‌پذیر است بنابر قضیه (۴-۲) داریم:

$$f(s) = f(a) \quad ( \quad 1) \int_a^s D_2 f(s_1) ds_1 \qquad (۱۶)$$

چون $D_2 f(s_1)$، $(1)$ مشتق‌پذیر است بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$D_2 f(s_1) = D_2 f(a) \oplus \int_a^{s_1} D_{2,1}^2 f(s_2) ds_2,$$

سپس با انتگرال‌گیری از رابطه فوق داریم:

$$\int_a^s D_2 f(s_1) ds_1 = (s \quad a) \odot D_2 f(a) \oplus \int_a^s \int_a^{s_1} D_{2,1}^2 f(s_2) ds_2 ds_1, \qquad (۱۷)$$

با قرار دادن رابطه (۱۷) در (۱۶) بدست می‌آوریم:

$$f(s) = f(a) \quad ( \quad 1)\big[(s \quad a) \odot D_2 f(a) \oplus \int_a^s \int_a^{s_1} D_{2,1}^2 f(s_2) ds_2 ds_1\big], \qquad (۱۸)$$

با تکرار فرایند بالا برای $D_{2,1}^2 f(s_2)$ و با توجه به $(2)$ -مشتق‌پذیر بودن آن داریم:

$$D_{2,1}^2 f(s_2) = D_{2,1}^2 f(a) \quad ( \quad 1) \int_a^{s_2} D_2(D_{2,1}^2 f(s_3)) ds_3,$$

مجددا با انتگرال‌گیری از رابطه فوق بدست می‌آوریم:

$$\int_a^s \int_a^{s_1} D_{2,1}^2 f(s_2) ds_2 ds_1 = \frac{(s-a)^2}{2} \odot D_{2,1}^2 f(a) \quad ( \quad 1) \int_a^s \int_a^{s_1} \int_a^{s_2} D_2(D_{2,1}^2 f(s_3)) ds_3 ds_2 ds_1, \qquad (۱۹)$$

با قرار دادن رابطه (۱۹) در (۱۸) بدست می‌آوریم:

$$f(s) = f(a) \quad ( \quad 1)[(s \quad a) \odot D_2 f(a) \oplus [\frac{(s-a)^2}{2} \odot D_{2,1}^2 f(a) \quad ( \quad 1)R],$$

به طوری که

$$R = \int_a^s \int_a^{s_1} \int_a^{s_2} D_1\left(D_{1,1}^2 f(s_3)\right) ds_3 ds_2 ds_1$$

## ۴- معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه دوم

در این بخش، روشی عددی برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم فازی ارائه می‌کنیم.
معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), t \in I \\ y(0) = \gamma_0, y'(0) = \gamma_1, \end{cases} \quad (۲۰)$$

به‌طوری که $\gamma_0, \gamma_1 \in \ _F$ و $f: I \to \ _F$ تابع فازی پیوسته روی I باشد.
در این مقاله از روش تقریب قطعه‌ای[۲۲]، برای حل معادله دیفرانسیل (۲۰)، استفاده می‌شود. فرض کنید $y: I \to \ _F$ یک تابع فازی و $n, m \in \{1,2\}$ باشد، با به کارگیری تعریف (۵-۲)، $y$ یک $(n,m)$ جواب روی I برای مساله (۲۰) است، اگر $D_n^1 y$ و $D_{n,m}^2 y$ روی I موجود باشند و

$$D_{n,m}^2 y(t) = f(t, y(t), D_n^1(t)),$$
$$y(0) = \gamma_0, D_n^1 y(0) = \gamma_1.$$

برای پیدا کردن $(n,m)$ جواب عددی معادله (۲۰) از روش ارائه شده در [۱۶] استفاده می‌کنیم و معادله را تبدیل به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم می‌کنیم، سپس از چند جمله‌ای قطعه‌ای $p(t)$ به جای $y$ در هر $(n,m)$ سیستم متناظر، مطابق با نوع مشتق به کار رفته (۲۰) استفاده می‌کنیم.
برای ساختن چندجمله‌ای قطعه‌ای $p(t)$ ابتدا بازه $[0, T]$ توسط طول گام به زیر بازه‌های

$[0, \ ], [\ , 2\ ], \ \ , [(n \ \ 1)\ , n\ ],$

تقسیم می‌کنیم به‌طوری که $T = n$. سپس چندجمله‌ای قطعه‌ای $p(t)$ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$p(t) = \begin{cases} p_0(t), & t \in [0, \ ], \\ p_1(t), & t \in [\ , 2\ ], \\ \\ p_{n-1}(t), & t \in [(n \ \ 1)\ , n\ ], \end{cases}$$

به طوری که $p_i(t)$ به ازای $i = 0, \ \ , n \ \ 1$ چندجمله‌هایی از درجه ۲ هستند.
اکنون چهار حالت برای دستگاه معادلات دیفرانسیل در نظر می‌گیریم:

### (۱-۱)- دستگاه

اگر $y$، $(1,1)$ جواب معادله دیفرانسیل (۲۰) باشد، با به‌کارگیری قضیه (۱-۳) می‌توانیم چندجمله‌ای $p_0(t)$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$p_0(t) = y(0) \oplus t \odot D_1 y(t) \oplus \frac{t^2}{2} \odot D_{1,1}^2 y(\eta_0), \quad (۲۱)$$

به‌طوری که $D_{1,1}^2 y(\eta_0)$ نامشخص است. فرض کنید $a_0 = D_{1,1}^2 y(\eta_0)$ آنگاه با قرار دادن $p_0(t)$، در (۱-۱)-دستگاه معرفی شده در [۱۷] بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} &\underline{p}_0''(t;\alpha) = \underline{f}(t, p_0(t;\alpha), D_1^1 p_0(t;\alpha)), \\ &\overline{p}_0''(t;\alpha) = \overline{f}(t, p_0(t;\alpha), D_1^1 p_0(t;\alpha)), \\ &\underline{y}(0;\alpha) = \underline{\gamma}_0, \overline{y}(0;\alpha) = \overline{\gamma}_0, \\ &\underline{y}'(0;\alpha) = \underline{\gamma}_1, \overline{y}'(0;\alpha) = \overline{\gamma}_1, \end{aligned} \quad (۲۲)$$

با قرار دادن $p_0(t)$ در دستگاه فوق و $t = \ $، عدد فازی $a_0$ بدست می‌آید و چندجمله‌ای $p_0(t)$ به ازای $t \in [0, \ ]$ ساخته می‌شود. همچنین جواب تقریبی $p_\nu(t)$ به ازای $\nu = 1, \ \ , n \ \ 1$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\underline{p}_\nu(t;\alpha) = \underline{p}_{\nu-1}(\nu t;\alpha) + (t \ \ \nu\ )\underline{p}_{\nu-1}'(\nu t;\alpha) + \frac{(t-\nu h)^2}{2}\underline{a}_\nu, \quad (۲۳)$$
$$\overline{p}_\nu(t;\alpha) = \overline{p}_{\nu-1}(\nu t;\alpha) + (t \ \ \nu\ )\overline{p}_{\nu-1}'(\nu t;\alpha) + \frac{(t \ \ \nu\ )^2}{2}\overline{a}_\nu,$$

به‌طوری که $a_\nu = D_{1,1}^2 y(\eta_\nu)$ به ازای $\nu = 1, \ \ , n \ \ 1$ نامشخص هستند که از دستگاه زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&\underline{p}_\nu''(t;\alpha)=\underline{f}(t,p_\nu(t;\alpha),p_\nu'(t;\alpha)),\\
&\overline{p}_\nu''(t;\alpha)=\overline{f}(t,p_\nu(t;\alpha),p_\nu'(t;\alpha)),\\
&\underline{p}_{\nu-1}(\nu\ \ ;\alpha)=\underline{\zeta}_{0,\nu},\overline{p}_{\nu-1}(\nu\ \ ;\alpha)=\overline{\zeta}_{0,\nu},\\
&\underline{p}'_{\nu-1}(\nu\ \ ;\alpha)=\underline{\zeta}_{1,\nu},\overline{p}'_{\nu-1}(\nu\ \ ;\alpha)=\overline{\zeta}_{1,\nu},
\end{aligned} \tag{۲۴}$$

همچنین $\underline{\zeta}_{1,\nu},\overline{\zeta}_{0,\nu},\underline{\zeta}_{0,\nu}$ و $\overline{\zeta}_{1,\nu}$ از گام‌های قبلی بدست می‌آیند و $p_{\nu-1}(t)$ ساخته می‌شود.

**(۲-۱)- دستگاه**

اگر $y$، $(1,2)$ جواب معادله دیفرانسیل (۲۰) باشد، با به‌کارگیری قضیه (۱-۳) می‌توانیم چندجمله‌ای $p_0(t)$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$p_0(t)=y(0)\oplus t\odot D_1y(t) \quad (\ \ 1)\frac{t^2}{2}\odot D^2_{1,2}y(\eta), \tag{۲۵}$$

به طوری که $D^2_{1,2}y(\eta_0)$ نامشخص است.
فرض کنید $b_0=D^2_{1,2}y(\eta_0)$ آنگاه با قرار دادن $p_0(t)$، در (۲-۱)-دستگاه معرفی شده در [۱۷] بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
&\overline{p}_0''(t;\alpha)=\underline{f}(t,p_0(t;\alpha),D_1^1p_0(t;\alpha)),\\
&\underline{p}_0''(t;\alpha)=\overline{f}(t,p_0(t;\alpha),D_1^1p_0(t;\alpha)),\\
&\underline{y}(0;\alpha)=\underline{\gamma}_0,\overline{y}(0;\alpha)=\overline{\gamma}_0,\\
&\underline{y}'(0;\alpha)=\underline{\gamma}_1,\overline{y}'(0;\alpha)=\overline{\gamma}_1,
\end{aligned} \tag{۲۶}$$

با قرار دادن $p_0(t)$ در دستگاه فوق و $t=\ \ $، عدد فازی $b_0$ بدست می‌آید و چندجمله‌ای $p_0(t)$ به ازای $t\in[0,\ \ ]$ ساخته می‌شود. همچنین جواب تقریبی $p_\nu(t)$ برای
$[\nu\ \ ,(\nu+1)\ \ ],\ \nu=1,\ \ \ ,(n\ \ \ 1)$
به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\underline{p}_\nu(t;\alpha)=\underline{p}_{\nu-1}(\nu t;\alpha)+(t\ \ \nu\ \ )\underline{p}'_{\nu\ \ 1}(\nu t;\alpha)+\frac{(t\ \ \nu\ \ )^2}{2}\underline{b}_\nu \tag{۲۷}$$

$$\overline{p}_\nu(t;\alpha)=\overline{p}_{\nu-1}(\nu t;\alpha)+(t\ \ \nu\ \ )\overline{p}'_{\nu-1}(\nu t;\alpha)+\frac{(t-\nu h)^2}{2}\overline{b}_\nu \tag{۲۸}$$

به طوری که $b_\nu=D^2_{1,2}y(\eta_\nu)$ به ازای $\nu=1,\ \ \ ,n\ \ \ 1$ نامشخص هستند که از دستگاه زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&\overline{p}_\nu''(t;\alpha)=\underline{f}(t,p_\nu(t;\alpha),p_\nu'(t;\alpha)),\\
&\underline{p}_\nu''(t;\alpha)=\overline{f}(t,p_\nu(t;\alpha),p_\nu'(t;\alpha)),\\
&\underline{p}_{\nu-1}(\nu\ \ ;\alpha)=\underline{\beta}_{0,\nu},\overline{p}_{\nu-1}(\nu\ \ ;\alpha)=\overline{\beta}_{0,\nu},\\
&\underline{p}'_{\nu-1}(\nu\ \ ;\alpha)=\underline{\beta}_{1,\nu},\overline{p}'_{\nu-1}(\nu\ \ ;\alpha)=\overline{\beta}_{1,\nu},
\end{aligned}$$

همچنین $\underline{\beta}_{1,\nu},\overline{\beta}_{0,\nu},\underline{\beta}_{0,\nu}$ و $\overline{\beta}_{1,\nu}$ از گام‌های قبلی بدست می‌آیند و $p_{\nu-1}(t)$ ساخته می‌شود.

**(۱-۲)- دستگاه**

اگر $y$، $(2,1)$ جواب معادله دیفرانسیل (۲۰) باشد، با به‌کارگیری قضیه (۱-۳) می‌توانیم چندجمله‌ای $p_0(t)$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$p_0(t)=y(0)\quad (\ \ 1)[t\odot D_2y(t)\oplus \frac{t^2}{2}\odot D^2_{2,1}y(\eta_0)], \tag{۲۹}$$

به طوری که $D^2_{2,1}y(\eta_0)$ نامشخص است.
فرض کنید $c_0=D^2_{2,1}y(\eta_0)$ آنگاه با قرار دادن $p_0(t)$، در (۱-۲)-دستگاه معرفی شده در [۱۷] بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
&\overline{p}_0''(t;\alpha)=\underline{f}(t,p_0(t;\alpha),D_2^1p_0(t;\alpha)),\\
&\underline{p}_0''(t;\alpha)=\overline{f}(t,p_0(t;\alpha),D_2^1p_0(t;\alpha)),\\
&\underline{y}(0;\alpha)=\underline{\gamma}_0,\overline{y}(0;\alpha)=\overline{\gamma}_0,\\
&\underline{y}'(0;\alpha)=\underline{\gamma}_1,\overline{y}'(0;\alpha)=\overline{\gamma}_1,
\end{aligned} \tag{۳۰}$$

با قرار دادن $p_0(t)$ در دستگاه فوق و $t=\ \ $، عدد فازی $c_0$ بدست می‌آید و چندجمله‌ای $p_0(t)$ به ازای $t\in[0,\ \ ]$ ساخته می‌شود. همچنین جواب تقریبی $p_\nu(t)$ برای
$[\nu\ \ ,(\nu+1)\ \ ],\nu=1,\ \ \ ,(n\ \ \ 1)$
به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\underline{p}_\nu(t;\alpha)=\underline{p}_{\nu-1}(\nu t;\alpha) \tag{۳۱}$$

$+(t \quad \nu \ )\underline{p}'_{\nu-1}(\nu t;\alpha)+\frac{(t-\nu h)^2}{2}\underline{c}_\nu,$

$\overline{p}_\nu(t;\alpha)=\overline{p}_{\nu-1}(\nu t;\alpha)$ (۳۲)

$+(t \quad \nu \ )\overline{p}'_{\nu-1}(\nu t;\alpha)+\frac{(t-\nu h)^2}{2}\overline{c}_\nu,$

$\nu=1, \quad ,n \quad 1$

به طوری که $c_\nu=D^2_{2,1}y(\eta_\nu)$ به ازای نامشخص هستند که از دستگاه زیر بدست می‌آیند:

$$\overline{p}''_\nu(t;\alpha)=\underline{f}(t,p_\nu(t;\alpha),p'_\nu(t;\alpha)),$$
$$\underline{p}''_\nu(t;\alpha)=\overline{f}(t,p_\nu(t;\alpha),p'_\nu(t;\alpha)),$$
$$\underline{p}_{\nu-1}(\nu \ ;\alpha)=\underline{\rho}_{0,\nu},\overline{p}_{\nu-1}(\nu \ ;\alpha)=\overline{\rho}_{0,\nu},$$
$$\underline{p}'_{\nu-1}(\nu \ ;\alpha)=\underline{\rho}_{1,\nu},\overline{p}'_{\nu-1}(\nu \ ;\alpha)=\overline{\rho}_{1,\nu},$$

همچنین $\underline{\rho}_{0,\nu},\overline{\rho}_{0,\nu},\underline{\rho}_{1,\nu}$ و $\overline{\rho}_{1,\nu}$ از گام‌های قبلی بدست می‌آیند و $p_{\nu-1}(t)$ ساخته می‌شود.

**(۲-۲)- دستگاه**

اگر $y$، $(2,2)$ جواب معادله دیفرانسیل (۲۰) باشد، با به‌کارگیری قضیه (۱-۳) می‌توانیم چندجمله‌ای $p_0(t)$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$p_0(t)=y(0) \quad ( \quad 1)[t\odot D_1y(t)$$
$$( \quad 1)[\frac{t^2}{2}\odot D^2_{2,2}y(\eta_0)]], \qquad (۳۳)$$

به‌طوری که $D^2_{2,2}y(\eta_0)$ نامشخص است.

فرض کنید $d_0=D^2_{2,1}y(\eta_0)$ آنگاه با قرار دادن $p_0(t)$، در (۲-۲)-دستگاه [۱۷] بدست می‌آوریم:

$$\underline{p}''_0(t;\alpha)=\underline{f}(t,p_0(t;\alpha),D^1_2p_0(t;\alpha)),$$
$$\overline{p}''_0(t;\alpha)=\overline{f}(t,p_0(t;\alpha),D^1_2p_0(t;\alpha)), \qquad (۳۴)$$
$$\underline{y}(0;\alpha)=\underline{\gamma}_0,\overline{y}(0;\alpha)=\overline{\gamma}_0,$$
$$\underline{y}'(0;\alpha)=\underline{\gamma}_1,\overline{y}'(0;\alpha)=\overline{\gamma}_1,$$

با قرار دادن $p_0(t)$ در دستگاه فوق و $t=$ ، عدد فازی $d_0$ بدست می‌آید و چندجمله‌ای $p_0(t)$ به ازای $t\in[0, \ ]$ ساخته می‌شود. همچنین جواب تقریبی $p_\nu(t)$ برای

$[\nu \ ,(\nu+1) \ ]$

به صورت زیر بدست می‌آید:

$\underline{p}_\nu(t;\alpha)=\underline{p}_{\nu-1}(\nu t;\alpha)$ (۳۵)

$+(t \quad \nu \ )\underline{p}'_{\nu-1}(\nu t;\alpha)+\frac{(t-\nu h)^2}{2}\underline{d}_\nu,$

$\overline{p}_\nu(t;\alpha)=\overline{p}_{\nu-1}(\nu t;\alpha)$ (۳۶)

$+(t \quad \nu \ )\overline{p}'_{\nu-1}(\nu t;\alpha)+\frac{(t-\nu h)^2}{2}\overline{d}_\nu,$

به‌طوری که $d_\nu=D^2_{2,2}y(\eta_\nu)$ به ازای $\nu=1, \quad ,n \quad 1$ نامشخص هستند که از دستگاه زیر بدست می‌آیند:

$$\underline{p}''_\nu(t;\alpha)=\underline{f}(t,p_\nu(t;\alpha),p'_\nu(t;\alpha)),$$
$$\overline{p}''_\nu(t;\alpha)=\overline{f}(t,p_\nu(t;\alpha),p'_\nu(t;\alpha)),$$
$$\underline{p}_{\nu-1}(\nu \ ;\alpha)=\underline{\lambda}_{0,\nu},\overline{p}_{\nu-1}(\nu \ ;\alpha)=\overline{\lambda}_{0,\nu},$$
$$\underline{p}'_{\nu-1}(\nu \ ;\alpha)=\underline{\lambda}_{1,\nu},\overline{p}'_{\nu-1}(\nu \ ;\alpha)=\overline{\lambda}_{1,\nu},$$

همچنین $\underline{\lambda}_{0,\nu},\overline{\lambda}_{0,\nu},\underline{\lambda}_{1,\nu}$ و $\overline{\lambda}_{1,\nu}$ از گام‌های قبلی بدست می‌آیند و $p_{\nu-1}(t)$ ساخته می‌شود.

## ۵- مثال‌های عددی

**مثال ۱:** [۱۷] معادله دیفرانسیل فازی مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$y''(t)=\sigma_0,y(0)=\gamma_0,y'(0)=\gamma_1,t\geq 0$$

به طوری که $\sigma_0=\gamma_0=\gamma_1$ اعداد فازی مثلثی با $\alpha$ تراز به‌صورت $[\alpha \quad 1{,}1 \quad \alpha]$ می‌باشند.

اگر y، $(1,1)$ جواب باشد، با استفاده ار روابط (۲۱) و (۲۲) جواب معادله به ازای $t\in[0,T]$ به صورت زیر می‌باشد:

$$[y(t)]^\alpha=[\alpha \quad 1{,}1 \quad \alpha](\frac{t^2}{2}+t+1)$$

که برای $t\geq 0$ جواب معتبر است.

اگر y، $(1,2)$ جواب باشد، با استفاده ار روابط (۲۵) و (۲۶) جواب به صورت زیر می‌باشد:

$$[y(t)]^\alpha=[\alpha \quad 1{,}1 \quad \alpha](\frac{-t^2}{2}+t+1),$$

که برای $t\in[0{,}1]$ جواب معتبر است.

اگر y، (2,1) جواب باشد، با استفاده ار روابط (۲۹) و (۳۰) جواب به صورت زیر می‌باشد:

$$[y(t)]^{\alpha} = [\alpha \quad 1,1 \quad \alpha](\frac{-t^2}{2} \quad t+1),$$

در این حالت جواب برای $t \in [0,\sqrt{3} \quad 1]$ معتبر است و در انتها (2,2) جواب با به کارگیری روابط (۳۳) و (۳۴) به صورت زیر می‌باشد:

$$[y(t)]^{\alpha} = [\alpha \quad 1,1 \quad \alpha](\frac{t^2}{2} \quad t+1),$$

که برای $t \in [0,1]$ جواب معتبر است.

در این مثال دیده می‌شود که جوابهای هر ۴ حالت با جواب‌های روش تحلیلی [۱۷] یکسان است.

**مثال ۲**: [۱۷] مساله مقدار اولیه فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$y''(t) + y(t) = \sigma_0,$$
$$y(0) = \gamma_0, \quad y'(0) = \gamma_1, \quad \forall t \geq 0,$$

به طوری که

$$\sigma_0 = [\alpha, 2 \quad \alpha]$$
$$[\gamma_0]^{\alpha} = [\gamma_1]^{\alpha} = [\alpha \quad 1,1 \quad \alpha].$$

در این مثال فقط (2,2) جواب را بدست می‌آوریم، زیرا (1,1) جواب و (2,1) جواب به‌طور مشابه بدست می‌آیند و در مقاله خواستان نشان داده شد که (1,2) جواب نیز وجود ندارد. برای پیدا کردن (2,2) جواب، ابتدا توسط روابط (۳۳) و (۳۴) ، $p_0(t)$ را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\underline{p}_0(t) = (\alpha \quad 1) + t(1 \quad \alpha) + (\frac{t^2}{2})(0.09950248756\alpha + 0.8955223880)$$
$$\overline{p}_0(t) = (1 \quad \alpha) + t(\alpha \quad 1) + \left(\frac{t^2}{2}\right)( \quad 0.09950248756\alpha + 1.094527363),$$
$$t \in [0,1],$$

و دیگر جواب‌های تقریبی به صورت زیر به دست می‌آید:

برای $t \in [0.1,0.2]$

$$\underline{p}_1(t) = (0.900497512\alpha \quad 0.8955223881) + (t \quad 0.1)(1.089552239 \quad 0.9900497512\alpha) + \frac{(t-0.1)^2}{2}(.197519864\alpha \quad 0.7826538947),$$
$$\overline{p}_1(t) = (.9054726368 \quad .900497512\alpha) + (t \quad 0.1)(0.9900497512\alpha \quad .8905472637) + \frac{(t-0.1)^2}{2}(1.177693621 \quad 0.1975198638\alpha),$$

برای $t \in [0.2,0.3]$

$$\underline{p}_2(t) = (0.8024801362\alpha \quad 0.7826538947) + (t \quad 0.2)(1.167817628 \quad 0.9702977648\alpha) + \frac{(t-0.0.2)^2}{2}(0.2930842192\alpha + 0.6625593352),$$
$$\overline{p}_2(t) = (0.8223063785 \quad 0.8024801362\alpha) + (t \quad 0.2)(.9702977648\alpha \quad 0.7727779016) + \frac{(t-0.2)^2}{2}(1.248727773 \quad 0.2930842192\alpha),$$

برای $t \in [0.3,0.4]$

$$\underline{p}_3(t) = (0.7069157808\alpha \quad 0.6625593352) + (t \quad 0.3)(1.234073562 \quad 0.9409893429\alpha) + \frac{(t-0.3)^2}{2}(0.3852568692\alpha + 0.5364696308),$$
$$\overline{p}_3(t) = (0.7512722272 \quad 0.7069157808\alpha) + (t \quad 0.3)(0.9409893429\alpha \quad 0.6479051243)$$

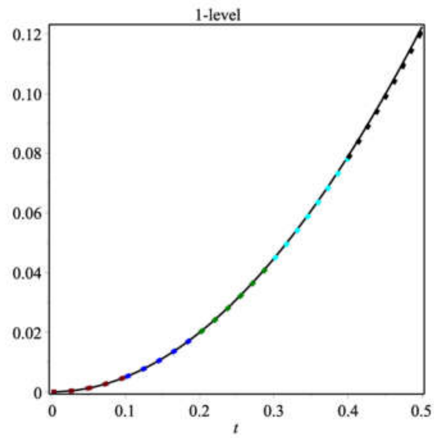
$+\frac{(t-0.3)^2}{2}(1.306983368$
$0.3852568692\alpha),$

برای $t \in [0.4,0.5]$

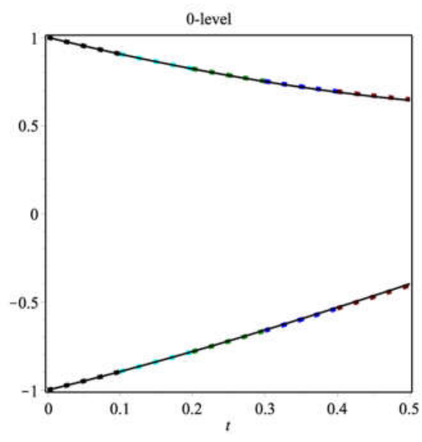
$\underline{p}_4(t) = (0.6147431308\alpha$
$0.5364696308) +$
$(t \quad 0.4)(1.287720525$
$0.9024636560\alpha)$
$+\frac{(t-0.4)^2}{2}(0.4731375471\alpha +$
$0.4056692321),$
$\overline{p}_4(t) = (0.6930166316$
$0.6147431308\alpha)$
$+(t \quad 0.4)(0.9024636560\alpha$
$0.5172067875)$
$+\frac{(t-0.4)^2}{2}(1.351944326$
$0.4731375471\alpha).$

## نتیجه‌گیری

در این مقاله روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه تحت مشتق تعمیم یافته معرفی شد. مطابق با نوع مشتق، چهار حالت برای معادله دیفرانسیل فازی مرتبه دوم در نظر گرفته و سپس تقریب قطعه‌ای در هر زیر بازه از جواب به دست آورده شد. این روش را می‌توان با چندجمله ای‌های فازی از درجات بالاتر و با دقت بالاتر جهت تقریب جواب معادلات دیفرانسیل فازی تعمیم داد.




**شکل ۱. جواب تقریبی در یک تراز در هر زیر بازه به صورت نقطه و جواب واقعی به صورت خط ممتد مربوط به مثال۲**




**شکل۲. جواب تقریبی در صفر تراز در هر زیر بازه به صورت نقطه و جواب واقعی به صورت خط ممتد مربوط به مثال۲**

## فهرست منابع

[1] S. Chang and L. Zadeh, On fuzzy mapping and control, IEEE, Trans Syst Cybern 2(1972) 30-34.

[2] M. Hukuhara, Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convex, Funkcial. Ekvac. 10 (1967) 205–229.

[3] M. L. Puri, D. A. Ralescu, Differentials of fuzzy functions, J. Math. Anal. Appl. 114(1986) 409-422.

[4] R. Goetschel, W. Voxman, Elementary fuzzy calculus, Fuzzy Sets and Systems 24 (1987) 31-43.

[5] D. Dubois, H. Prade,Toward fuzzy differential calculus: Part 3. Differ, Fuzzy Sets and Systems (1982) 225-233.

[6] S. Seikkala, On the fuzzy initial value problem, Fuzzy Sets and Systems. 24 (1987) 319-330.

[7] T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, N. Ahmady, E. Ahmady, Improved predictor-corrector method for solving fuzzy initial value problems, Information Sciences 179 (2009)945-955.

[8] T. Allahviranloo, N. Ahmady, E. Ahmady, Numerical solution of fuzzy differential equations by predictor-corrector method. Inform Sci 177(7)(2007)1633-1647.

[9] M. Ma, M. Friedman, A. Kandel, Numerical solutions of fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems 105 (1999) 133-138.

[10] S. Abbasbandy,T. Allahviranloo, Numerical solution of fuzzy differential equation by Taylor method, J. Comput Method Appl Math 2 (2002) 113-124.

[11] N. Parandin, Numerical Solution of fuzzy differential equations of nth-order by Adams-Bashforth method, New Researches and Mathematics, 17 (2019) 85-94.

[12] B. Bede, S. G. Gal, Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations, Fuzzy Set and Systems 151(2005)581-599.

[13] B.Bede, L.Stefanini, Generalized differentiability of fuzzy-valued functions, Fuzzy Sets and Systems 230 (2013) 119-141.

[14] B. Bede, S. G. Gal,Remark on the new solutions of fuzzy differential equations, Chaos Solitons Fractals (2006).

[15] B. Bede, L. Stefanini, Solution of Fuzzy Differential Equations with generalized differentiability using LU-parametric representation, EUSFLAT 1(2011)785- 790.

[16] J.J. Nieto, A. Khastan, K. Ivaz, Numerical solution of fuzzy differential equation under generalized differentiability, Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 3 (2009) 700-707. http://dx.doi.org/ 10.1016/j.nahs.2009.06.013.

[17] A. Khastan, F. Bahrami, K. Ivaz, New results on multiple solutions for Nth-order fuzzy differential equation under generalized differentiability, Boundary Value Problem (Hindawi Publishing Corporation)(2009) http://dx.doi.org/10.1155/2009/395714

[18] J. F. Epperson, An Introduction to Numerical Methods and Analysis, John Wiley and Sons 2007.

[19] O. Kaleva, Fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems 24(1987), 301-317.

[20] L. Stefanini, B. Bede, eneralized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations, Nonlinear Analysis 71 (2009) 1311-1328.

[21] A. Khastan, J. J Nieto, R. Rodríguez-López, Variation of constant formula for first order fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems 177(2011),20-33.

[22] T. Allahviranloo, N.Ahmady, E.Ahmadi, Approximated solution of First order Fuzzy Differential Eqations under generalized differentiability, New Researches and Mathematics, 9 (2017) 33-44.