دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
دوره ششم، شماره بیست و سوم، فروردین و اردیبهشت ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

عدد احاطه‌ای هم-رومی در درخت‌ها

رعنا خوئیلر[1]* و مرضیه سرودی[1]

[(1)] گروه ریاضی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۱۱/۰۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۱۰/۱۹

چکیده

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف و $f: V(G) \rightarrow \{0,1,2\}$ یک تابع باشد. رأس v نسبت به تابع f محافظت شده است هرگاه $f(v) > 0$ یا $f(v) = 0$ و v با رأسی به وزن مثبت مجاور باشد. تابع f، یک تابع احاطه‌گر هم-رومی (به اختصار CRDF) است هرگاه: (1) هر رأس در V محافظت شده باشد، و (2) هر رأس $u \in V$ با وزن مثبت همسایه‌ای همچون $v \in V$ با $f(v) = 0$ داشته‌باشد به طوری‌که تابع $f_{uv}: V \rightarrow \{0,1,2\}$ تعریف شده به‌صورت $f_{uv}(v) = 1$، $f_{uv}(u) = f(u) - 1$ و برای $x \in V - \{v, u\}$ به‌صورت $f_{uv}(x) = f(x)$، هیچ رأس محافظت نشده‌ای نداشته باشد. وزن f به‌صورت $\omega(f) = \sum_{v \in V} f(v)$ تعریف می‌شود. عدد احاطه‌ای هم-رومی گراف G که با نماد $\gamma_{cr}(G)$ نمایش داده می‌شود، کمترین وزن در بین تمامی توابع احاطه‌گر هم-رومی گراف G می‌باشد. در این مقاله،ابتدا یک کران بالا برای عدد احاطه‌ای هم-رومی درخت‌ها برحسب تعداد رئوس، تعداد برگ‌ها و تعداد رئوس تکیه‌گاه درخت T ارائه می‌کنیم. سپس کران‌هایی برای عدد احاطه‌ای هم-رومی یک درخت برحسب مرتبه و سایر پارامترهای احاطه‌ای آن به‌دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: تابع احاطه‌گر رومی، تابع احاطه‌گر هم-رومی، عدد احاطه‌ای رومی، عدد احاطه‌ای هم-رومی.

---

*عهده دار مکاتبات: Email:khoeilar@azaruniv.ac.ir

۱- مقدمه

برای آشنایی با اصطلاحات و نکاتی از نظریه گراف که در این‌جا به آن‌ها اشاره نشده‌است به [16،12،11] مراجعه کنید. در سراسر این مقاله، G گرافی ساده با مجموعه رأسی $V = V(G)$ و مجموعه یالی $E = E(G)$ است.

مرتبه‌ی گراف G، $|V|$ با نماد $n = n(G)$ و اندازه‌ی گراف G، $|E|$ با نماد $m = m(G)$ نمایش داده می‌شوند.

تعریف1: به ازای هر رأس $v \in V$، مجموعه‌ی $N(v) = \{u \in V | uv \in E\}$ را همسایگی باز و مجموعه‌ی $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ را همسایگی بسته‌ی رأس v گویند. دو رأس v و u از $V(G)$ را مجاور گوئیم هرگاه v و u دو انتهای یالی از G باشند. برای هر رأس v از $V(G)$، درجه‌ی رأس v بصورت $\deg_G(v) = \deg(v) = |N(v)|$ تعریف می‌شود. می‌نیمم و ماکسیمم درجه‌ی گراف به‌ترتیب با نمادهای $\delta = \delta(G)$ و $\Delta = \Delta(G)$ نمایش داده می‌شوند. رأسی از درجه‌ی یک را برگ و رأس مجاور به آن را رأس تکیه‌گاه می‌نامند. همچنین رأس تکیه‌گاهی که مجاور به حداقل دو برگ باشد، رأس تکیه‌گاه قوی نامیده می‌شود. مجموعه‌ی برگ‌ها و رئوس تکیه‌گاه گراف G را به‌ترتیب با نمادهای $L(G)$ و $S(G)$ نمایش می‌دهند. همچنین، مجموعه‌ی تمام برگ‌های مجاور به رأس تکیه‌گاه v را با L_v نمایش می‌دهیم. همسایگی باز مجموعه $S \subseteq V$ عبارت است از $N(S) = \cup_{v \in S} N(v)$ و همسایگی بسته آن برابر است با $N[S] = N(S) \cup S$. فرض کنید $v \in S \subseteq V$. رأس u را همسایه‌ی خصوصی v نسبت به S می‌نامند هرگاه $u \in N[v] - N[S - \{v\}]$. یک مسیر از مرتبه‌ی n را با P_n و یک دور از مرتبه‌ی n را با C_n نشان می‌دهیم. گراف کامل، گراف ساده‌ای است که هر دو رأس آن با هم مجاورند. گراف کامل از مرتبه‌ی n را با K_n نشان می‌دهند. فاصله بین دو رأس u و v در گراف همبند G، طول کوتاهترین uv—مسیر در G می‌باشد که با نماد $d_G(u, v)$ نمایش داده می‌شود. به فاصله‌ی رأس v از دورترین رأس نسبت به v را خروج از مرکز v گویند. قطر گراف G، $diam(G)$، بیشترین خروج از مرکز در بین رئوس گراف G می‌باشد.

تعریف2: گراف دوبخشی $G = G(X, Y)$ گرافی است که مجموعه رأس‌ها را بتوان به دو زیرمجموعه X و Y به‌طوری افراز کرد که هر یال دارای یک انتها در X و یک انتها در Y باشد. گراف دوبخشی کامل، گراف ساده دوبخشی است که در آن هر رأس در یک بخش با هر رأس در بخش دیگر مجاور باشد. گراف دوبخشی کاملی که m رأس در یک بخش و n رأس در بخش دیگر داشته باشد را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهند. گراف $K_{1,n-1}$ را یک ستاره نامیده و رأس از درجه $n - 1$ را مرکز آن گویند. همچنین دو ستاره $DS_{p,q}$، که در آن $(q \geq p \geq 1)$، درختی‌است که از اتصال دو رأس مرکزی ستاره‌های $K_{1,p}$ و $K_{1,q}$ بدست می‌آید.

تعریف3: فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ناتهی از $V(G)$ باشد. در این‌صورت، زیرگراف القاءشده توسط S که با نماد $G[S]$ نمایش داده می‌شود، گرافی است با مجموعه رأسی S که مجموعه یالهایش، مجموعه‌ای از یال‌های G است که هر دو انتهایشان در S است.

تعریف4: گراف همبند بی‌دور، درخت نامیده می‌شود. درختی که در آن یک رأس به‌عنوان ریشه انتخاب شود، یک درخت ریشه‌دار نامیده می‌شود.فرض کنید T درختی باشد که در رأس دلخواه v ریشه‌دار شده‌است. در اینصورت رأس w را که روی مسیر از v به w قرار دارد، نواده‌ی رأس v می‌نامند که در صورت مجاورت با v، فرزند v نامیده می‌شود. $C(v)$ و $D(v)$، بترتیب نمایانگر مجموعه فرزندان و مجموعه نوادگان v می‌باشند و $D[v] = D(v) \cup \{v\}$. زیردرخت ماکسیمال در v، زیردرختی در T است که توسط $D(v)$ القا شده و با نماد T_v نمایش داده می‌شود. عمق رأس v که با نماد $depth(v)$ نشان داده می‌شود، بیشترین فاصله از رأس v تا رأسی از $D(v)$ است. مسیر آویز از گراف G، مسیر القاشده‌ای است که یکی از نقاط پایانی آن از درجه‌ی یک باشد و نقطه انتهایی دیگرش، از درجه حداقل 3 بوده و مجاور با برخی رئوس در $G - P$ است.

تعریف 5: یک زیرمجموعه‌ی D از $V(G)$ را یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای G گوئیم هرگاه هر رأس از $V(G) - D$ با رأسی از D مجاور باشد. عدد احاطه‌گر $\gamma(G)$، کمترین اندازه‌ی مجموعه‌ی احاطه‌گرهای G تعریف می‌شود. مفهوم احاطه‌گر در گرافها دارای انواع بسیاری است که در نظریه گرافها مورد مطالعه قرار گرفته‌است که بخش قابل توجهی از آنها در دو کتابی که توسط هاینس[1]و هدتنیمی[2] و اسلاتر[3] تألیف شده، بیان شده است.

---

[1] -Haynes
[2] -Hedetniemi
[3] -Slater

تعریف 6: به ازای زیرمجموعه‌ی $S \subseteq V(G)$ از رئوس گراف G و تابع $f: V(G) \to \mathbb{R}$، $f(S)$ را به‌صورت $f(S) = \sum_{x\in S} f(x)$ تعریف می‌کنیم. تابع $f: V \to \{0,1,2\}$، یک تابع احاطه‌گر رومی (به اختصار RDF) روی G نامیده می‌شود هرگاه هر رأس u با $f(u) = 0$ با حداقل یک رأس v از G با $f(v) = 2$ مجاور باشد. وزن f، $\omega(f)$، به‌صورت $f(V(G))$ تعریف می‌شود. عدد احاطه‌ای رومی گراف G، $\gamma_R(G)$، می‌نیمم وزن یک تابع احاطه‌گر رومی در G است. یک تابع احاطه‌گر رومی با می‌نیمم وزن $\gamma_R(G)$ در گراف G، یک $\gamma_R(G)-$تابع نامیده می‌شود[8].

تعریف 7: تابع $f: V \to \{0,1,2\}$، یک تابع $\{2\}$-احاطه‌گر رومی روی G نامیده می‌شود هرگاه هر رأس u با $f(u) = 0$ با حداقل یک رأس v از G با $f(v) = 2$ یا با حداقل دو رأس w و z از G با $f(w) = f(z) = 1$ مجاور باشد. عدد $\{2\}$-احاطه‌ای رومی گراف G، $\gamma_{\{R2\}}(G)$، می‌نیمم وزن یک تابع $\{2\}$-احاطه‌گر رومی در G است. یک تابع $\{2\}$-احاطه‌گر رومی با می‌نیمم وزن $\gamma_{\{R2\}}(G)$در گراف G، یک $\gamma_{\{R2\}}(G)-$تابع نامیده می‌شود [۷].

تعریف 8: تابع $f: V \to \mathcal{P}(\{1,2\})$، از مجموعه رئوس G به مجموعه توانی $\{1,2\}$ یک تابع احاطه‌گر 2-رنگین‌کمانی روی G نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر رأس u با $f(u) = \emptyset$ داشته‌باشیم $\bigcup_{v\in N(u)} f(v) = \{1,2\}$ و عدد احاطه‌ای 2-رنگین‌کمانی گراف G، $\gamma_{r2}(G)$، می‌نیمم مقدار $\sum_{v\in V(G)} |f(v)|$ در بین تمامی توابع احاطه‌گر 2-رنگین‌کمانی در G است. یک تابع احاطه‌گر 2-رنگین‌کمانی با می‌نیمم وزن $\gamma_{r2}(G)$ در گراف G، یک $\gamma_{r2}(G)-$تابع نامیده می‌شود.

تعریف 9: رأس v نسبت به f محافظت‌شده است هرگاه $f(v) > 0$ یا $f(v) = 0$ و v با رأسی به وزن مثبت مجاور باشد.

تعریف10: تابع $f: V \to \{0,1,2\}$، یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف (به اختصار WRDF) روی G نامیده می‌شود هرگاه هر رأس u با $f(u) = 0$ با حداقل یک رأس v از G با $f(v) \geq 1$ مجاور باشد به طوری‌که در تابع $f': V \to \{0,1,2\}$ تعریف شده با ضابطه $f'(v) = f(v) - 1$، $f'(u) = 1$ و به ازای هر $x \in V - \{u, v\}$ به‌صورت $f'(x) = f(x)$، هر رأس نسبت به f' محافظت‌شده باشد. عدد احاطه‌ای رومی ضعیف گراف G، $\gamma_r(G)$، می‌نیمم وزن یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف در G است [14]. همچنین عدد احاطه‌ای رومی ضعیف در [6، 15] نیز مورد مطالعه قرار گرفته است.

تعریف 11: تابع $f: V \to \{0,1,2\}$ یک تابع احاطه‌گر هم-رومی (به اختصار CRDF) روی G نامیده می‌شود هرگاه هر رأس v با $f(v) = 0$، با رأسی با وزن مثبت مجاور باشد و همچنین هر رأس u با $f(u) \geq 1$ ، همسایه ای چون v با $f(v) = 0$ داشته باشد به‌طوری که تابع $f_{uv}: V \to \{0,1,2\}$ که به‌صورت

$$f_{uv}(x) = \begin{cases} 1 & x = v \\ f(x) - 1 & x = u \\ f(x) & x \in V - \{u, v\} \end{cases}$$

تعریف می‌شود، هیچ رأس محافظت نشده ای نداشته باشد. عدد احاطه‌ای هم-رومی گراف G، $\gamma_{cr}(G)$، می‌نیمم وزن یک تابع احاطه‌گر هم-رومی در G است [2]. همچنین شائو[4]و همکاران [16] و دهگردی[5] و همکاران [9] مطالعه‌ی تابع احاطه‌گر هم-رومی را ادامه داده‌اند.

تعریف12: تابع $f: V \to \{0,1,2,3\}$ یک تابع احاطه‌گر رومی مضاعف (به اختصار DRDF) روی G نامیده می‌شود هرگاه شرایط زیر برقرار باشند.

فرض کنید V_i که $i = 0,1,2,3$، نشان‌دهنده‌ی مجموعه رئوسی باشد که تحت تابع f به آن‌ها وزن i اختصاص یافته است.

(الف) اگر $f(v) = 0$ آنگاه رأس v باید حداقل دو همسایه در V_2 یا یک همسایه در V_3 داشته باشد.

(ب) اگر $f(v) = 1$ آنگاه رأس v باید حداقل یک همسایه در $V_2 \cup V_3$ داشته باشد.

عدد احاطه‌ای رومی مضاعف گراف G، $\gamma_{dR}(G)$، می‌نیمم وزن یک تابع احاطه‌گر رومی مضاعف روی G است. یک تابع احاطه‌گر رومی مضاعف روی G با وزن $\gamma_{dR}(G)$ یک $\gamma_{dR}(G)-$تابع از G نامیده می‌شود.

قضیه 1. [2] به ازای دور C_n با $n \geq 4$ و به ازای مسیر P_n،

$$\gamma_{cr}(C_n) = \gamma_{cr}(P_n) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil.$$

قضیه 2. [14] به ازای دور C_n با $n \geq 4$ و به ازای مسیر P_n،

[4] -Zehui Shao
[5] -Dehgardi

$$\gamma_r(P_n) = \gamma_r(C_n) = \left\lceil \frac{3n}{7} \right\rceil.$$

قضیه 3.[8] به ازای مسیرهای P_n و دورهای C_n،

$$\gamma_R(P_n) = \gamma_R(C_n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil.$$

قضیه 4.[4] به ازای $n \geq 1$،

$$\gamma_{r2}(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1.$$

قضیه 5. [1] به ازای $n \geq 1$،

$$\gamma_{dR}(P_n) = \begin{cases} n & n \equiv 0 \quad (mod\ 3) \\ n+1 & n \equiv 1 \text{ یا } 2\ (mod\ 3). \end{cases}$$

قضیه 6. [2] به ازای G ، روابط زیر برقرارند:

(الف) $\gamma \leq \gamma_{cr} \leq \gamma_r \leq \gamma_R \leq 2\gamma$

(ب) $\gamma \leq \gamma_{cr} \leq \gamma_r$

(ج) $\gamma \leq \gamma_{cr}$.

قضیه 7. [2] اگر T یک درخت باشد، آن‌گاه $\gamma_{cr}(T) \leq \frac{2n}{3}$.

قضیه 8. [5] اگر T درختی از مرتبه $n \geq 3$، آن‌گاه $\gamma_R(T) \leq \frac{4n}{5}$.

قضیه 9. [18] اگر T درختی از مرتبه $n \geq 3$، آن‌گاه $\gamma_{r2}(T) \leq \frac{3n}{4}$.

قضیه 10. [7] به ازای هر درخت T، $\gamma_{\{R2\}}(T) = \gamma_{r2}(T)$.

قضیه 11. [3] اگر T درختی از مرتبه $n \geq 3$، آن‌گاه $\gamma_{dR}(T) \leq \frac{5n}{4}$.

گراف‌هایی با کوچکترین عدد احاطه‌ای هم-رومی

در این بخش، گراف‌هایی را تعیین می‌کنیم که کوچکترین عدد احاطه‌ای هم-رومی را دارند.

گزاره 12. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه $n \geq 3$ باشد. در این‌صورت

(1) $\gamma_{cr}(G) = 2$ اگر و فقط اگر G دقیقاً یک رأس از درجه $n-1$ یا دقیقاً دو رأس از درجه $n-2$ داشته باشد.

(2) $\gamma_{cr}(G) = 3$ اگر و فقط اگر G دارای رأس v از درجه $n-2$ باشد به طوری‌که به ازای هر رأس $u \notin N(v)$، $N(u) \subset N(v)$ یا G دارای سه رأس v_1, v_2, v_3 با درجه‌ی کمتر از $n-2$ باشد به طوری‌که برای هر $1 \leq i \leq 3$, i،

$$N(v_i) \subseteq \cup_{i \neq j} N(v_j).$$

برهان. فرض کنید $f = (V_0, V_1, V_2)$ یک γ_{cr}−تابع از G باشد.

(1) اگر G دقیقاً یک رأس از درجه $n-1$ یا دقیقاً دو رأس از درجه $n-2$ داشته باشد،آن‌گاه $\gamma_{cr}(G) = 2$. برعکس، فرض کنید $\gamma_{cr}(G) = 2$. از این‌که $|V_1| + 2|V_2| = 2$ نتیجه می‌شود که $|V_1| = 0, |V_2| = 1$ یا $|V_1| = 2, |V_2| = 0$. اگر $|V_1| = 0, |V_2| = 1$، آن‌گاه $V_2 = \{v\}$ و v باید با تمام رئوس $V(G)$ مجاور باشد. بنابراین G دقیقاً یک رأس از درجه $n-1$ دارد. حال فرض کنید که $|V_1| = 2, |V_2| = 0$ دراین‌صورت $V_1 = \{u, w\}$ به طوری‌که تمام رئوس G به‌جز یک رأس، همگی با هر دو رأس u, w مجاور هستند و این دو رأس هر کدام دقیقاً یک همسایه خصوصی دارند. بنابراین G دقیقاً دو رأس از درجه $n-2$ دارد.

(2) اگر G دارای رأس v از درجه $n-2$ باشد به طوری‌که برای هررأس $u \notin N(v)$، $N(u) \subset N(v)$ یا G دارای سه رأس v_1, v_2, v_3 با درجه‌ی کمتر از $n-2$ باشد به طوری‌که به ازای هر i , $1 \leq i \leq 3$، $N(v_i) \subseteq \cup_{i \neq j} N(v_j)$ از قسمت (1) نتیجه می‌شود که $\gamma_{cr}(G) \geq 3$. از طرف دیگر اختصاص وزن 2 به رأس v از درجه $n-2$ و وزن 1 به رأس $u \notin N(v)$، منجر به $\gamma_{cr}(G) \leq 3$ می شود. بنابراین $\gamma_{cr}(G) = 3$.

برعکس، فرض کنید $\gamma_{cr}(G) = 3$.

از این‌که $|V_1| + 2|V_2| = 3$ نتیجه می‌شود $|V_1| = |V_2| = 1$ یا $|V_1| = 3, |V_2| = 0$. اگر $|V_1| = |V_2| = 1$، آن‌گاه فرض کنید $V_1 = \{u\}$ و $V_2 = \{v\}$ و با استفاده از تعریف f، باید داشته باشیم $N(u) \subset N(v)$. بنابراین G دارای رأس v از درجه $n-2$ به طوری‌که $N(v) \cap (V - n[v]) \neq \emptyset$. حال، فرض کنید $|V_1| = 3, |V_2| = 0$. در این‌صورت فرض کنید $V_1 = \{u, v, w\}$. بنا به تعریف f باید داشته باشیم $N(v) \subseteq N(u) \cup N(w)$ و $N(u) \subseteq N(v) \cup N(w)$ و همان‌طور که مطلوب است داریم $N(w) \subseteq N(u) \cup N(v)$.

درخت‌ها

در این بخش، کران بالائی روی عدد احاطه‌ای هم-رومی درخت T بر حسب مرتبه، $n(T)$ و تعداد برگ‌ها، $l(T)$ و تعداد رئوس تکیه‌گاه، $s(T)$ به‌صورت $\gamma_{cr}(T) \leq \frac{3n(T)+2l(T)-s(T)}{6}$ ارائه می‌کنیم و درخت‌های اکسترمال را دسته‌بندی می‌کنیم.

به منظور دسته‌بندی درخت‌های اکسترمال که این کران بالا برای آن‌ها قابل حصول است، خانواده‌ی $\mathcal{T}$ متشکل از تمام

درخت‌های T را معرفی می‌کنیم که می‌توانند از دنباله $T_1, T_2, \dots, T_k (k \geq 1)$ از درخت‌ها به‌دست آیند به طوری‌که T_1 مسیر P_3 است و برای $i = 1, 2, \dots, k-1$، T_{i+1} به طور متوالی و با انجام عملگر زیر روی T_i به‌دست می‌آید.

عملگر $\mathcal{O}$: اگر $u \in V(T_i)$ یک رأس تکیه‌گاه یا مجاور به یک رأس تکیه‌گاه قوی باشد، آنگاه عملگر $\mathcal{O}$ یک مسیر $P_3 = x_1x_2x_3$ و یال ux_2 را می‌افزاید تا T_{i+1} به‌دست آید.

لم 13. اگر T_i درختی با $\gamma_{cr}(T_i) = \frac{3n(T_i)+2l(T_i)-s(T_i)}{6}$ باشد و T_{i+1} درختی باشد که با انجام عملگر $\mathcal{O}$ روی T_i به‌دست آمده‌است،آن‌گاه $\gamma_{cr}(T_{i+1}) \leq \frac{3n(T_{i+1})+2l(T_{i+1})-s(T_{i+1})}{6}$.

برهان. به‌وضوح هر $\gamma_{cr}(T_i)$–تابع می‌تواند با تخصیص وزن 2 به x_2، به یک CRDF از T_{i+1} توسیع یابد که نتیجه می‌دهد $\gamma_{cr}(T_{i+1}) \leq \gamma_{cr}(T_i) + 2$. از طرف دیگر فرض کنید f یک $\gamma_{cr}(T_{i+1})$–تابع باشد.فرض کنید $w \in L_u$ ، در این‌صورت‌پ $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3) \geq 2$، $f(u)+f(w) \geq 1$ و وزن واقع در u یا w می‌تواند روی یال uw جابجا شود. بنابراین تحدید f به T_i یک CRDF از T_i است که نتیجه می‌دهد$\gamma_{cr}(T_i) \leq$\ $\omega(f|T_i) = \gamma_{cr}(T_{i+1}) - 2$. بنابراین $\gamma_{cr}(T_{i+1}) = \gamma_{cr}(T_i) + 2$، و بنا به فرض داریم

$$\begin{aligned}\gamma_{cr}(T_{i+1}) &= \gamma_{cr}(T_i) + 2\\ &= \frac{3n(T_i)+2l(T_i)-s(T_i)}{6} + 2\\ &= \frac{3(n(T_{i+1})-3)+2(l(T_{i+1})-2)-(s(T_{i+1})-1)}{6} + 2\\ &= \frac{3n(T_{i+1})+2l(T_{i+1})-s(T_{i+1})}{6}.\end{aligned}$$

لم 14. اگر $T \in \mathrm{T}$، آنگاه
$$\gamma_{cr}(T) = \frac{3n(T)+2l(T)-s(T)}{6}.$$

برهان. فرض کنید $T \in \mathrm{T}$.در این‌صورت دنباله‌ای از درخت‌های $T_1, T_2, \dots, T_k (k \geq 1)$ وجود دارد به طوری‌که T_1 مسیر P_3 است و برای $i = 1, 2, \dots, k-1$، T_{i+1} به‌طور متوالی با انجام عملگر $\mathcal{O}$ فوق روی T_i به‌دست می‌آید .

به استقرا روی تعداد عملگرهایی که برای ساخت T به کار می‌روند، پیش می‌رویم. اگر $k = 1$، آن‌گاه $P_3 \in \mathrm{T}$، $\gamma_{cr}(P_3) = 2$ و تساوی برقرار است. فرض کنید که قضیه برای هر درخت $T \in \mathrm{T}$ که می‌تواند با دنباله‌ای از عملگرها به طول $k-1$ به دست آید، برقرار باشد و فرض کنید $T' = T_{k-1}$. بنا به فرض استقرا داریم
$$\gamma_{cr}(T') = \frac{3n(T')+2l(T')-s(T')}{6},$$
چون $T = T_k$ با انجام عملگر فوق روی T' به‌دست آمده‌است، از لم 13 نتیجه می‌گیریم که
$$\gamma_{cr}(T) = \frac{3n(T)+2l(T)-s(T)}{6}.$$

قضیه 15. فرض کنید Tدرختی از مرتبه $n(T) \geq 3$ با $l(T)$ برگ و $s(T)$ رأس تکیه‌گاه باشد. دراین‌صورت
$$\gamma_{cr}(T) \leq \frac{3n(T)+2l(T)-s(T)}{6}$$
و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $T \in \mathrm{T}$.

برهان. با توجه به لم 14، لزوم را ثابت می‌کنیم. برهان به استقرا روی $n(T)$ است. فرض کنید $n(T) \geq 3$ و فرض کنید برای هر درخت T' از مرتبه $3 \leq n(T') \leq n(T)$ با $l(T')$ برگ و $s(T')$ رأس تکیه‌گاه، قضیه برقرار باشد. فرض کنید T درختی از مرتبه $n \geq 3$ باشد. اگر $diam(T) = 2$، آنگاه T ستاره است که نتیجه می‌دهد $\gamma_{cr}(T) = 2 \leq \frac{5n(T)-3}{6}$ ، این کران برای $T = P_3 \in \mathrm{T}$ قابل حصول است. اگر $diam(T) = 3$، آن‌گاه T یک دو ستاره است. اگر $p = q = 1$، آن‌گاه $T = P_4$ و $\gamma_{cr}(T) = 2 < \frac{15}{6}$. اگر $T = DS_{1,q}$ که در آن $q \geq 2$، آن‌گاه داریم $\gamma_{cr}(T) = 3 < \frac{5q+9}{6}$.

اگر $T = DS_{p,q} (q \geq p \geq 2)$ آن‌گاه $\gamma_{cr}(T) = 4 \leq \frac{5p+5q+4}{6}$ و این کران برای $T = DS_{2,2}$ قابل حصول است که می‌تواند از P_3 و با انجام عملگر $\mathcal{O}$ به‌دست آید و لذا $T \in \mathrm{T}$. از این پس، فرض می‌کنیم $diam(T) \geq 4$ و فرض کنید $v_1v_2 \dots v_{d+1}$ یک مسیر قطری در T باشد به طوری‌که $deg(v_2)$ تا حد ممکن بزرگ است. T را در v_{d+1} ریشه‌دار کنید. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

(حالت 1) $deg_T(v_2) = k \geq 3$.

زیرحالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

(زیر حالت 1.1) $deg_T(v_3) \geq 3$.

قرار دهید $T' = T - T_{v_2}$. در این‌صورت $n(T') = n(T) - k$، $l(T') \leq l(T) - (k-1)$ و $s(T') \geq s(T) - 1$. فرض کنید که g یک $\gamma_{cr}(T')$–تابع باشد. در این‌صورت تابع g می‌تواند با تخصیص وزن 2 به v_2 و وزن صفر به تمام برگ‌های v_2 به یک CRDF از T توسیع یابد. بنابراین $\gamma_{cr}(T) \leq \gamma_{cr}(T') + 2$ و بنا به فرض استقرا داریم

$\gamma_{cr}(T) \leq \gamma_{cr}(T') + 2 \leq \frac{3(n(T)-k)+2(l(T)-k+1)-(s(T)-1)}{6} + 2 \leq \frac{3n(T)+2l(T)-s(T)}{6}$.

اگر تساوی برقرار باشد، آن‌گاه $k = 3$ و تمامی نامساوی‌ها باید به تساوی تبدیل شوند. به‌ویژه $\gamma_{cr}(T) = \gamma_{cr}(T') + 2$، $\gamma_{cr}(T') = \frac{3(n(T)-k)+2(l(T)-k+1)-(s(T)-1)}{6}$ به طوری‌که $n(T') = n(T) - 3$، $l(T') = l(T) - 2$ و $s(T') = s(T) - 1$ و بنا به فرض استقرا $T' \in \mathrm{T}$. حال، ثابت می‌کنیم v_3 یک رأس تکیه‌گاه یا مجاور به یک رأس تکیه‌گاه قوی است. به برهان خلف، فرض کنید که v_3 یک رأس تکیه‌گاه نباشد و مجاور به یک رأس تکیه‌گاه قوی نباشد. از فرض $deg_T(v_3) \geq 3$ نتیجه می‌شود که v_3 فرزندی مانند z_2 با عمق 1 دارد و فرض کنید $v_3z_2z_1$ یک مسیر در T باشد. قرار دهید $T' = T - T_{z_2}$. در این‌صورت هر $\gamma_{cr}(T')$–تابع می‌تواند با تخصیص وزن 1 به z_2 و وزن صفر به z_1 به یک CRDF از T توسیع یابد که نتیجه می‌دهد $\gamma_{cr}(T) \leq \gamma_{cr}(T') + 1$، بنابراین بنا به فرض استقرا داریم

$$\begin{aligned}\gamma_{cr}(T) &\leq \gamma_{cr}(T') + 1 \leq \frac{3n(T')+2l(T')-s(T')}{6} + 1\\ &= \frac{3(n(T)-2)+2(l(T)-1)-(s(T)-1)}{6} + 1\\ &< \frac{3n(T)+2l(T)-s(T)}{6}\end{aligned}$$

که یک تناقض است. بنابراین v_3 یک رأس تکیه‌گاه یا مجاور به یک رأس تکیه‌گاه قوی است و T می‌تواند از T' و با انجام عملگر $\mathcal{O}$ به‌دست آید که نتیجه می‌دهد $T \in \mathrm{T}$.

(زیر حالت 1.2) $deg_T(v_3) = 2$.

قرار دهید $T' = T - T_{v_3}$. در این صورت $n(T') = n(T) - (k + 1)$، $l(T') \leq l(T) - (k - 2)$ و $s(T') \geq s(T) - 1$.

فرض کنید که g یک $\gamma_{cr}(T')$–تابع باشد.در این صورت g می‌تواند با تخصیص وزن 2 به v_2 و وزن صفر به تمامی همسایه‌های v_2 به یک CRDF از T توسیع یابد. بنابراین، $\gamma_{cr}(T) \leq \gamma_{cr}(T') + 2$ و بنا به فرض استقرا داریم

$$\gamma_{cr}(T) \leq \gamma_{cr}(T') + 2 \leq \frac{3(n(T)-k-1)+2(l(T)-k+2)-(s(T)-1)}{6} + 2 < \frac{3n(T)+2l(T)-s(T)}{6}$$

از این پس، فرض کنید $deg_T(v_2) = 2$.

(حالت 2) $deg_T(v_3) \geq 3$.

قرار دهید $T' = T' - T_{v_2}$. در این‌صورت $n(T') = n(T) - 2$، $l(T') \leq l(T) - 1$ و $s(T') \geq s(T) - 1$.

فرض کنید که g یک $\gamma_{cr}(T')$–تابع باشد. در این‌صورت g می‌تواند با تخصیص وزن 1 به v_2 و وزن صفر به v_1 به یک CRDF از T توسیع یابد. بنابراین، $\gamma_{cr}(T) \leq \gamma_{cr}(T') + 1$ و بنا به فرض استقرا داریم

$$\gamma_{cr}(T) \leq \gamma_{cr}(T') + 1 \leq \frac{3(n(T)-2)+2(l(T)-1)-(s(T)-1)}{6} + 1 < \frac{3n(T)+2l(T)-s(T)}{6}.$$

(حالت 3) $deg_T(v_2) = 2$.

زیرحالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

(زیر حالت 1.3) $deg_T(v_4) \geq 3$

فرض کنید $w_1, \ldots, w_p$ همسایه‌های برگ v_4 باشند و $x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^t (t \geq 0)$ را فرزندان v_4 به عمق 1 در نظر بگیرید و فرض کنید $v_4x_1^ix_2^i$ به ازای $1 \leq i \leq t$، مسیری در T باشد و $y_1^1, y_1^2, \ldots, y_1^k (k \geq 1)$ را فرزندان v_4 به عمق 2 و $v_4y_1^jy_2^jy_3^j$ را به ازای $1 \leq j \leq k$، مسیری در T در نظر بگیرید. قرار دهید $T' = T - T_{v_4}$، در این‌صورت $n(T') = n(T) - 3k - 2t - p - 1$. فرض کنید g یک $\gamma_{cr}(T')$–تابع باشد.

موارد زیر را در نظر می‌گیریم.

(الف) $p \geq 2$. در این‌صورت $l(T') \leq l(T) - k - t - p + 1$ و $s(T') \geq s(T) - k - t$ و تابع g می‌تواند با تخصیص وزن 2 به v_4 ، وزن 1 به x_1^i و y_2^j به ازای $1 \leq i \leq t$ و $1 \leq j \leq k$ و وزن صفر به تمامی رئوس $u \in L_{v_4} - \{x_1^i, y_2^j\}$، $1 \leq i \leq t$ و $1 \leq j \leq k$، به یک CRDF از T توسیع یابد. بنابراین $\gamma_{cr}(T) \leq \gamma_{cr}(T') + 2 + k + t$ و بنا به فرض استقرا داریم

$$\begin{aligned}\gamma_{cr}(T) &\leq \gamma_{cr}(T') + 2 + k + t\\ &\leq \frac{3(n(T)-3k-2t-p-1)+2(l(T)-k-t-p+1)}{6} - \frac{(s(T)+k+t)}{6} + 2 + k + t\\ &\leq \frac{(3n(T)+2l(T)-s(T))-4k-t-5p+11}{6}\\ &< \frac{3n(T)+2l(T)-s(T)}{6}\end{aligned}$$

(ب) $p \leq 1$.

در این‌صورت $l(T') \le l(T) - k - t$، $s(T') \ge s(T)$ و تابع g می‌تواند با تخصیص وزن 1 به v_4، x_1^i و y_2^j به ازای $1 \le i \le t$ ، $1 \le j \le k$ و وزن صفر به تمامی رئوس $u \in L_{v_4} - \{x_1^i, y_2^j\}$، $1 \le i \le t$ و $1 \le j \le k$، به یک CRDF از T توسیع یابد. بنابراین $\gamma_{cr}(T) \le \gamma_{cr}(T') + 1 + k + t$ و بنا به فرض استقرا داریم

$$\begin{aligned}\gamma_{cr}(T) &\le \gamma_{cr}(T') + 1 + k + t\\ &\le \frac{3(n(T)-3k-2t-p-1)+2(l(T)-k-t-p+1)-(s(T)-k-t)}{6} + 1 + k + t\\ &\le \frac{(3n(T)+2l(T)-s(T))-4k-t-5p+5}{6}\\ &\le \frac{3n(T)+2l(T)-s(T)}{6}.\end{aligned}$$

اگر $k = t = 1$, $p = 0$ آنگاه نامساوی برقرار است زیرا قرار دهید $T' = T - T_{x_1^1}$ در این‌صورت $n(T') = n(T) - 2$، $l(T') = l(T) - 1$ و $s(T') = s(T) - 1$. و لذا تابع g می‌تواند با تخصیص وزن 1 به x_1^1 و وزن صفر به x_2^1 به یک CRDF از T توسیع یابد که نتیجه می‌دهد $\gamma_{cr}(T) \le \gamma_{cr}(T') + 1$. بنا به فرض استقرا داریم

$$\begin{aligned}\gamma_{cr}(T) &\le \gamma_{cr}(T') + 1\\ &\le \frac{3(n(T)-2)+2(l(T)-1)-(s(T)-1)}{6} + 1\\ &\le \frac{(3n(T)+2l(T)-s(T))-4k-t-5p+5}{6}\\ &< \frac{3n(T)+2l(T)-s(T)}{6}.\end{aligned}$$

زیر حالت 3.2: $deg_T(v_4) = 2$.

موارد زیر را در نظر می‌گیریم.

(1.2.3) $deg_T(v_5) \ge 3$.

قرار دهید $T' = T - T_{v_4}$. در این‌صورت $n(T') = n(T) - 4$، $l(T') \le l(T) - 1$ و $s(T') \ge s(T) - 1$. بنابراین، تابع g می‌تواند با تخصیص وزن 1 به v_4, v_1 و وزن صفر به v_3, v_2 به یک CRDF از T توسیع یابد که نتیجه می‌دهد $\gamma_{cr}(T) \le \gamma_{cr}(T') + 2$ و لذا بنا به فرض استقرا داریم

$$\begin{aligned}\gamma_{cr}(T) &\le \gamma_{cr}(T') + 2\\ &\le \frac{3(n(T)-4)+2(l(T)-1)-(s(T)-1)}{6} + 2\\ &< \frac{3n(T)+2l(T)-s(T)}{6}.\end{aligned}$$

(2.2.3) $deg_T(v_5) = 2$.

قرار دهید $T' = T - T_{v_5}$. در این‌صورت $n(T') = n(T) - 4$، $l(T') \le l(T)$ و $s(T') \ge s(T)$. بنابراین، تابع g می‌تواند با تخصیص وزن 1 به v_4, v_2 و وزن صفر به v_5, v_3, v_1 به یک CRDF از T توسیع یابد که نتیجه می‌دهد $\gamma_{cr}(T) \le \gamma_{cr}(T') + 2$ و لذا بنا به فرض استقرا داریم

$$\begin{aligned}\gamma_{cr}(T) &\le \gamma_{cr}(T') + 2\\ &\le \frac{3(n(T)-4)+2l(T)-s(T)}{6} + 2\\ &< \frac{3n(T)+2l(T)-s(T)}{6}.\end{aligned}$$

این برهان را کامل می‌کند.

کران‌هایی روی مجموع عدد احاطه‌ای هم-رومی و سایر پارامترهای احاطه‌ای

در این بخش، کران‌های بالائی روی مجموع عدد احاطه‌ای هم-رومی و سایر پارامترهای احاطه‌ای گراف، به‌دست می‌آوریم. برهان مشابه برهان قضیه‌ای از [۱۰] است.

قضیه16. فرض کنید T درختی از مرتبه $n \ge 3$ باشد. در این‌صورت، $\frac{\gamma_{r2}(T) + \gamma_R(T)}{2} \le \frac{3n}{4}$.

با در نظر گرفتن قضیه 7 و قضیه 11، قضیه زیر حائز اهمیت است.

قضیه17. فرض کنید T درختی از مرتبه $n \ge 3$ باشد. در این‌صورت، $\frac{\gamma_{cr}(T) + \gamma_{dR}(T)}{2} \le \frac{11n}{12}$.

برهان. برهان به استقرا روی n است. اگر $n = 3$، آنگاه تنها درخت از مرتبه 3، P_3 است و بنا به قضیه 1 و قضیه 5 داریم $\frac{\gamma_{cr}(T) + \gamma_{dR}(T)}{2} = \frac{5}{2} \le \frac{11n}{12}$. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم $n \ge 4$. فرض کنید $v_0 v_1 \dots v_{diam(T)}$، یک مسیر قطری در T باشد که $deg_T(v_1) \ge deg_T(v_{diam(T)} - 1)$. اگر $diam(T) = 2$، آنگاه T ستاره است و کران مطلوب از $\gamma_{cr}(T) = 2, \gamma_{dR}(T) = 3$ به‌دست می‌آید. حال، فرض کنید $diam(T) = 3$، در این‌صورت T یک دو ستاره است. اگر $T = DS_{1,1}$ آن‌گاه $T = P_4$ و بنا به قضیه 1، و قضیه 5، $\frac{2+5}{2} < \frac{11}{3}$.

فرض کنید $T = DS_{1,q}, q \ge 2$. در این‌صورت $\gamma_{cr}(T) = 3, \gamma_{dR}(T) = 6$ و لذا $\frac{3+6}{2} < \frac{11n}{12}$. فرض کنید $T = DS_{p,q}, q \ge p \ge 2$. در این‌صورت $n \ge 6$ و $\gamma_{cr}(T) = 4$، $\gamma_{dR}(T) = 6$ و در نتیجه $\frac{4+6}{2} < \frac{11n}{12}$.

اکنون، فرض کنید که $diam(T) \ge 5$. در این‌صورت $T - v_2 v_3$ دو مولفه‌ی T_1 و T_2 از مرتبه حداقل 3 دارد و لذا بنا به فرض استقرا به ازای $i = 1,2$ داریم

. $\frac{(\gamma_{cr}(T_i)+\gamma_{dR}(T_i))}{2} \le \frac{11|V(T_i)|}{12}$

چون

$\gamma_{cr}(T) \le \gamma_{cr}(T_1) + \gamma_{cr}(T_2)$

و $\gamma_{dR}(T) \le \gamma_{dR}(T_1) + \gamma_{dR}(T_2)$ پس همان‌طور که مطلوب است، داریم

$$\begin{aligned}
\frac{(\gamma_{cr}(T)+\gamma_{dR}(T))}{2} &\le \frac{(\gamma_{cr}(T_1)+\gamma_{cr}(T_2))}{2} + \frac{(\gamma_{dR}(T_1)+\gamma_{dR}(T_2))}{2}\\
&= \frac{(\gamma_{cr}(T_1)+\gamma_{dR}(T_1))}{2} + \frac{(\gamma_{cr}(T_2)+\gamma_{dR}(T_2))}{2}\\
&\le \frac{11|V(T_1)|}{12} + \frac{11|V(T_2)|}{12}\\
&= \frac{11(|V(T_1)|+|V(T_2)|)}{12}\\
&= \frac{11n}{12}
\end{aligned}$$

از این پس فرض کنید $diam(T) = 4$. چون به ازای هر $w \in N_T(v_2)$ مولفه‌ی $T - v_2w$ شامل v_2 از مرتبه‌ی حداقل 3 است، پس بنا به حالت قبل ($diam(T) \ge 5$)، مولفه‌ی $T - v_2w$ شامل w مرتبه‌ی حداکثر دو دارد. به‌ویژه، Tدرختی است که از یک ستاره با مرکز v_2 وبا حداکثر یک‌بار زیرتقسیم هر یال، به‌دست آمده است. قرار دهید $W = \{v \in V(T) | d(v_2, v) = 2\}$.

چون $v_0, v_4 \in W$، پس $|W| \ge 2$.

در این‌صورت هر رأس از W در T درجه یک دارد و$|W| \le deg_T(v_2)$ و $n = 1 + |W| + deg_T(v_2)$. در این صورت، تابع $g: V(T) \to \{0,1,2\}$ که به ازای $u \in W$ به‌صورت $g(v_2) = g(u) = 1$ و برای $z \in V - \{u, v_2\}$ به‌صورت $g(z) = 0$ تعریف می‌شود،یک CRDF از T با $\omega(h) \le |W| + 1$ است و تابع $h: V(T) \to \{0,1,2,3\}$ که به ازای $u \in W$ به‌صورت $h(v_2) = h(u) = 2$ و برای $z \in V - \{u, v_2\}$ با $h(z) = 0$ تعریف می‌شود، یک DRDF از T با $\omega(h) \le 2|W| + 2$ است. بنابراین

$$\frac{\gamma_{cr}(T)+\gamma_{dR}(T)}{2} \le \frac{(|W|+1)+(2|W|+2)}{2} = \frac{3|W|+3}{2deg_T(v_2)+2|W|+2}n.$$

اگر $\frac{3|W|+3}{2deg_T(v_2)+2|W|+2} \le \frac{11}{12}$، در این‌صورت کران مطلوب حاصل می‌شود. بنابراین فرض کنید $\frac{3|W|+3}{2deg_T(v_2)+2|W|+2} > \frac{11}{12}$. در این‌صورت $4|W| + 14 > 22deg_T(v_2) \ge 22|W|$ و لذا $|W| < \frac{14}{8} < 2$ که یک تناقض است. این برهان را کامل می‌کند.

نتیجه 18. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه $n \ge 3$ باشد.

دراین‌صورت $\frac{\gamma_{cr}(G) + \gamma_{dR}(G)}{2} \le \frac{11n}{12}$.

بنا به قضیه 7 و قضیه 9، قضیه بعدی قابل توجه است.

قضیه 19. فرض کنید T درختی از مرتبه$n \ge 3$ باشد. در این‌صورت $\frac{\gamma_{cr}(T) + \gamma_{r2}(T)}{2} \le \left\lceil \frac{5n}{9} \right\rceil$.

برهان. برهان به استقرا روی n است. اگر $n = 3$، آنگاه تنها درخت از مرتبه 3، P_3 است و بنا به قضیه 1 و قضیه 4 داریم $\frac{\gamma_{cr}(T) + \gamma_{r2}(T)}{2} = 2 = \left\lceil \frac{5n}{9} \right\rceil$ و در این حالت کران مطلوب، قابل حصول است. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم $n \ge 4$. $v_0v_1 \dots v_{diam(T)}$ را یک مسیر قطری در T با $deg_T(v_1) \ge deg_T(v_{diam(T)} - 1)$ در نظر بگیرید. اگر $diam(T) = 2$، آنگاه T ستاره است و کران مطلوب از $\gamma_{cr}(T) = \gamma_{r2}(T) = 2$ به‌دست می‌آید. حال، فرض کنید $diam(T) = 3$، در این‌صورت T یک دو ستاره است.

اگر $T = DS_{1,1}$ آن‌گاه $T = P_4$ و بنا به قضیه 1 و قضیه4، $4\frac{2+3}{2} < \left\lceil \frac{20}{9} \right\rceil$.

فرض کنید $T = DS_{1,q}, q \ge 2$. در این‌صورت $\gamma_{cr}(T) = \gamma_{r2}(T) = 3$ و لذا $\frac{3+3}{2} < \left\lceil \frac{5n}{9} \right\rceil$. فرض کنید $T = DS_{p,q}, q \ge p \ge 2$. در این‌صورت $n \ge 6$ و $\gamma_{cr}(T) = \gamma_{r2}(T) = 4$ و لذا$\frac{4+4}{2} < \left\lceil \frac{5n}{9} \right\rceil$. به ازای $n = 6,7$ این کران، قابل حصول است. اکنون، فرض کنید که $diam(T) \ge 5$. در این‌صورت $T - v_2v_3$ دو مولفه‌ی T_1 و T_2 از مرتبه حداقل 3 دارد و لذا بنا به فرض استقرا به ازای $i = 1,2$ داریم

. $\frac{(\gamma_{cr}(T_i)+\gamma_{r2}(T_i))}{2} \le \left\lceil \frac{5|V(T_i)|}{9} \right\rceil$

چون

$\gamma_{cr}(T) \le \gamma_{cr}(T_1) + \gamma_{cr}(T_2)$

و $\gamma_{r2}(T) \le \gamma_{r2}(T_1) + \gamma_{r2}(T_2)$، داریم

$$\begin{aligned}
\frac{(\gamma_{cr}(T)+\gamma_{r2}(T))}{2} &\le \frac{(\gamma_{cr}(T_1)+\gamma_{cr}(T_2))}{2} + \frac{(\gamma_{r2}(T_1)+\gamma_{r2}(T_2))}{2}\\
&= \frac{(\gamma_{cr}(T_1)+\gamma_{r2}(T_1))}{2} + \frac{(\gamma_{cr}(T_2)+\gamma_{r2}(T_2))}{2}\\
&\le \left\lceil \frac{5|V(T_1)|}{9} \right\rceil + \left\lceil \frac{5|V(T_2)|}{9} \right\rceil\\
&= \left\lceil \frac{5(|V(T_1)|+|V(T_2)|)}{9} \right\rceil\\
&= \left\lceil \frac{5n}{9} \right\rceil
\end{aligned}$$

از این پس فرض کنید $diam(T) = 4$. چون به ازای هر $w \in N_T(v_2)$ مولفه‌ی $T - v_2w$ شامل v_2 از مرتبه‌ی حداقل 3 است، پس بنا به حالت قبل ($diam(T) \geq 5$)، مولفه‌ی $T - v_2w$ شامل w مرتبه‌ی حداکثر دو دارد. به‌ویژه، T درختی است که از یک ستاره با مرکز v_2 و با حداکثر یک‌بار زیرتقسیم هر یال، به‌دست آمده است.

فرض کنید $W = \{v \in V(T) | d(v_2, v) = 2\}$ در این‌صورت هر رأس از W در T درجه یک دارد و $n = 1 + |W| + deg_T(v_2)$.

در این‌صورت، تابع $g: V(T) \to \mathcal{P}(\{1,2\})$ که با $g(v_2) = \{2\}$ و به ازای $u \in W$ به‌صورت $g(u) = 1$ و برای $z \in V - \{u, v_2\}$ به‌صورت $g(z) = \emptyset$ تعریف می‌شود، یک تابع احاطه‌گر 2-رنگین‌کمانی از T با $\omega(g) \leq |W| + 1$ است. بنابراین

$$\frac{(\gamma_{cr}(T) + \gamma_{r2}(T))}{2} \leq \gamma_{r2}(T) \leq |W| + 1 = \frac{|W|+1}{deg_T(v_2) + |W| + 1} n.$$

اگر $\frac{|W|+1}{deg_T(v_2)+|W|+1} \leq \left\lceil \frac{5}{9} \right\rceil$، در این‌صورت کران مطلوب حاصل می‌شود. بنابراین فرض کنید $\frac{|W|+1}{deg_T(v_2)+|W|+1} > \left\lceil \frac{5}{9} \right\rceil$. در این‌صورت $4|W| + 4 > 5deg_T(v_2) \geq 5|W|$ و لذا $|W| < 4$. چون $v_0, v_4 \in W$ پس $|W| = 2$ یا $|W| = 3$. اگر $|W| = 2$ آن‌گاه $deg_T(v_2) = 2$ و لذا $T = P_5$. بنابراین طبق قضیه‌های 1و 4 کران مطلوب واضح است. حال فرض کنید $|W| = 3$. در این‌صورت T یا ستاره زیرتقسیم‌شده‌ی حاصل از $K_{1,3}$ است و $\gamma_{cr}(T) = 4$،$\gamma_{r2}(T) = 4$ و داریم $\frac{8}{2} < \left\lceil \frac{35}{9} \right\rceil$ و برهان کامل می‌شود.

نتیجه 20. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه $n \geq 3$ باشد . دراین‌صورت

$$\frac{\gamma_{cr}(G) + \gamma_{r2}(G)}{2} \leq \left\lceil \frac{5n}{9} \right\rceil.$$

بنا به قضیه 10، نتیجه‌ی بعدی، واضح است.

نتیجه 21. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه $n \geq 3$ باشد . دراین‌صورت $\frac{\gamma_{cr}(G) + \gamma_{R2}(G)}{2} \leq \left\lceil \frac{5n}{9} \right\rceil$.

گزاره 22. فرض کنید T درختی از مرتبه $n \geq 2$ باشد . دراین‌صورت $\gamma_r(G) \leq \left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor$.

برهان به استقرا روی n است. به‌وضوح قضیه برای $n = 2$ برقرار است. بنابراین فرض کنید $n \geq 3$.اگر $diam(T) = 2$، در این‌صورت T یک ستاره است و $\gamma_r(T) = 2 \leq \left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor$ و این کران به ازای $n = 3,4$ قابل حصول است. اگر $diam(T) = 3$، آن‌گاه T یک دوستاره‌ی $DS_{p,q}(q \geq p \geq 1)$ است. اگر $T = DS_{1,1}$، آنگاه $T = P_4$ و $\gamma_r(T) = 2 = \left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor$.

اگر $T = DS_{1,q}(q \geq 2)$ ، آن‌گاه $\gamma_r(T) = 3 \leq \left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor$ و این کران به ازای $n = 5$ قابل حصول است. حال فرض کنید $T = DS_{p,q}(q \geq p \geq 2)$. در این‌صورت $\gamma_r(T) = 4 \leq \left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor$ و این کران به ازای $n = 6,7$ قابل حصول است. بنابراین می‌توان فرض کرد $diam(T) \geq 4$ و قضیه برای تمام درخت‌های از مرتبه کمتر از n برقرار باشد. فرض کنید در بین طولانی‌ترین مسیرها در T، P مسیری باشد که درجه‌ی رأس v که مجاور به آخرین رأس این مسیر است، ماکسیمم باشد. T را در برگی که در فاصله‌ی $diam(T) - 1$ از v قرار دارد، ریشه‌دار کنید. فرض کنید u جد v باشد، یعنی u همسایه‌ی غیر برگ vاست. همچنین w را همسایه‌ی برگ v در نظر بگیرید. با توجه به انتخاب v هر فرزند v برگ است. سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

(حالت 1) $deg_T(v) \geq 3$.

قرار دهید $T' = T - T_v$و فرض کنید f یک $\gamma_r(T')$-تابع باشد. در این‌صورت تابع $g: V(T) \to \{0,1,2\}$ که به‌صورت $g(v) = 2$ و به ازای $x \in L_v$ به‌صورت $g(x) = 0$ و برای سایر رئوس به‌صورت $g(z) = f(z)$ تعریف می‌شود، یک WRDF از T است و بنا به فرض استقرا داریم

$$\gamma_r(T) \leq \gamma_r(T') + 2 \leq \left\lfloor \frac{7(n-3)}{10} \right\rfloor + 2 \leq \left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor.$$

حالت 2: $deg_T(v) = deg_T(u) = 2$.

قرار دهید $T' = T - N_T[v]$ و فرض کنید f یک $\gamma_r(T')$-تابع باشد. در این‌صورت تابع $g: V(T) \to \{0,1,2\}$ که به‌صورت $g(v) = 2$ و به ازای $x \in N_T(v)$ به‌صورت $g(x) = 0$ و برای سایر رئوس به‌صورت $g(z) = f(z)$ تعریف می‌شود، یک WRDFاز T است و بنا به فرض استقرا داریم

$$\gamma_r(T) \leq \gamma_r(T') + 2 \leq \left\lfloor \frac{7(n-3)}{10} \right\rfloor + 2$$

$$\le \left\lceil \frac{7n}{10} \right\rceil$$

(حالت 3) $deg_T(u) \ge 3$.

قرار دهید $T' = T - T_v$ و فرض کنید f یک $\gamma_r(T')$-تابع باشد. در این‌صورت تابع $g: V(T) \to \{0,1,2\}$ که به‌صورت $g(v) = 1$ و به ازای $x \in L_v$ به‌صورت $g(x) = 0$ و برای سایر رئوس به‌صورت $g(z) = f(z)$ تعریف می‌شود، یک WRDF از T است و بنا به فرض استقرا داریم

$$\gamma_r(T) \le \gamma_r(T') + 1 \le \left\lceil\frac{7(n-2)}{10}\right\rceil + 1 \le \left\lceil\frac{7n}{10}\right\rceil$$

این برهان را کامل می‌کند.

با استفاده از قضیه 7 و گزاره 22، قضیه زیر حائز اهمیت است.

قضیه 23. فرض کنید T درختی از مرتبه $n \ge 3$ باشد. در این‌صورت $\frac{\gamma_{cr}(T)+ \gamma_r(T)}{2} \le \left\lceil\frac{14n}{27}\right\rceil$.

برهان. برهان به استقرا روی n است. اگر $n = 3$، آنگاه تنها درخت از مرتبه 3، P_3 است و بنا به قضیه‌های1 و 2 داریم $\frac{\gamma_{cr}(T)+ \gamma_r(T)}{2} = 2 = \left\lceil\frac{14n}{27}\right\rceil$ و در این حالت کران مطلوب، قابل حصول است. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم $n \ge 4$. $v_0v_1 \dots v_{diam(T)}$ را یک مسیر قطری در T با $deg_T(v_1) \ge deg_T(v_{diam(T)} - 1)$ در نظر بگیرید. اگر $diam(T) = 2$، آنگاه T ستاره است و کران مطلوب از $\gamma_{cr}(T) = \gamma_r(T) = 2 < \left\lceil\frac{14n}{27}\right\rceil$ به‌دست می‌آید. حال، فرض کنید $diam(T) = 3$، در این‌صورت T یک دو ستاره است.اگر $T = DS_{1,1}$ آن‌گاه $T = P_4$ و بنا به قضیه‌های1 و 2، $\frac{2+2}{2} < \left\lceil\frac{56}{27}\right\rceil$. فرض کنید $T = DS_{1,q}, q \ge 2$.

در این‌صورت $\gamma_{cr}(T) = \gamma_r(T) = 3$ و لذا $\frac{3+3}{2} < \left\lceil\frac{14n}{27}\right\rceil$ و در این حالت کران به ازای $n = 5$ قابل حصول است. فرض کنید $T = DS_{p,q}, q \ge p \ge 2$. در این‌صورت $n \ge 6$ و $\gamma_{cr}(T) = \gamma_r(T) = 4$ و لذا $\frac{4+4}{2} < \left\lceil\frac{14n}{27}\right\rceil$. به ازای $n = 6,7$ این کران، قابل حصول است. اکنون، فرض کنید که $diam(T) \ge 5$. در این‌صورت $T - v_2v_3$ دو مولفه‌ی T_1 و T_2 از مرتبه حداقل 3 دارد و لذا بنا به فرض استقرا به ازای $i = 1,2$ داریم $\frac{(\gamma_{cr}(T_i)+\gamma_r(T_i))}{2} \le \left\lceil\frac{14|V(T_i)|}{27}\right\rceil$. چون

$$\gamma_{cr}(T) \le \gamma_{cr}(T_1) + \gamma_{cr}(T_2)$$

و $\gamma_r(T) \le \gamma_r(T_1) + \gamma_r(T_2)$، داریم

$$\begin{aligned}
\frac{(\gamma_{cr}(T)+\gamma_r(T))}{2} &\le \frac{(\gamma_{cr}(T_1)+\gamma_{cr}(T_2))}{2} + \frac{(\gamma_r(T_1)+\gamma_r(T_2))}{2}\\
&= \frac{(\gamma_{cr}(T_1)+\gamma_r(T_1))}{2} + \frac{(\gamma_{cr}(T_2)+\gamma_r(T_2))}{2}\\
&\le \left\lceil\frac{14|V(T_1)|}{27}\right\rceil + \left\lceil\frac{14|V(T_2)|}{27}\right\rceil\\
&= \left\lceil\frac{14(|V(T_1)|+|V(T_2)|)}{27}\right\rceil\\
&= \left\lceil\frac{14n}{27}\right\rceil.
\end{aligned}$$

از این پس فرض کنید $diam(T) = 4$. چون به ازای هر $w \in N_T(v_2)$ مولفه‌ی $T - v_2w$ شامل v_2 از مرتبه‌ی حداقل 3 است، پس بنا به حالت قبل ($diam(T) \ge 5$)، مولفه‌ی $T - v_2w$ شامل w مرتبه‌ی حداکثر دو دارد . به‌ویژه، T درختی است که از یک ستاره با مرکز v_2 و با حداکثر یک‌بار زیرتقسیم هر یال، به‌دست آمده است. قرار دهید

$$W = \{v \in V(T) | d(v_2, v) = 2\}.$$

در این‌صورت هر رأس از W در T درجه یک دارد، $|W| \le deg_T(v_2)$ و $n = 1 + |W| + deg_T(v_2)$.

لذا، تابع $g: V(T) \to \{0,1,2\}$ که به ازای $u \in W$ به‌صورت $g(u) = g(v_2) = 1$ و برای $z \in V - \{u, v_2\}$ به‌صورت $g(z) = 0$ تعریف می‌شود، یک WRDF از T با $\omega(g) \le |W| + 1$ است. بنابراین

$$\frac{(\gamma_{cr}(T)+\gamma_r(T))}{2} \le \gamma_r(T) \le |W| + 1 = \frac{|W|+1}{deg_T(v_2)+|W|+1} n.$$

اگر $\frac{|W|+1}{deg_T(v_2)+|W|+1} \le \left\lceil\frac{14}{27}\right\rceil$، در این‌صورت کران مطلوب حاصل می‌شود.

بنابراین فرض کنید $\frac{|W|+1}{deg_T(v_2)+|W|+1} > \left\lceil\frac{14}{27}\right\rceil$.

دراین‌صورت $13|W| + 13 > 14deg_T(v_2) \ge 14|w|$

و لذا $|W| < 13$. چون $v_0, v_4 \in W$ پس $2 \le |W| \le 12$. اگر $|W| = 2$ آن‌گاه $deg_T(v_2) = 2$ و لذا $T = P_5$. بنابراین طبق قضیه‌های 1و 2 کران مطلوب واضح است. حال فرض کنید $3 \le |W| \le 12$. در این‌صورت T یا ستاره زیرتقسیم‌شده‌ی حاصل از $K_{1,3}$ است و با یک بررسی ساده دیده می‌شود که $\frac{\gamma_{cr}(T)+\gamma_r(T)}{2} \le \left\lceil\frac{14n}{27}\right\rceil$.

نتیجه24. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه $n \ge 3$ باشد دراین‌صورت $\frac{\gamma_{cr}(G)+ \gamma_r(G)}{2} \le \left\lceil\frac{14n}{27}\right\rceil$.

فهرست منابع

[1] H. Abdollahzadeh Ahangar, M. Chellali and S.M. Sheikholeslami, "On the double Roman domination ingraphs", Discrete. Appl. Math. ۲۳۲ (۲۰۱۷) 1-7.

[2] S. Arumugam, K. Ebadi, M. anrique, "Co-Roman dominaton in graphs", Indian Acad. Sci.(Math. Sci) (۲۰۱٤).

[3] R.A. Beeler, T.W. Haynes and S.T. Hedetniemi, "Double Roman domination", Discrete Appl. Math. ۲۱۱ (۲۰۱٦) 23-29.

[٤] B. Brešar, T. K. Šumenjak, "Onthe ۲-rainbow domination in graphs", Discrete Appl. Math. ۱٥٥ (۲۰۰۷)۲۳۹٤-۲٤۰۰.

[5] E. W. Chambers, B. Kinnersley, N. Prince and D. B. West, "Extremal problems for Roman domination", SIAM J. Discreter. Math 23 (2009)1575-1586.

[6] M. Chellali and T. W. Haynes andS. T. Hedetniemi, " Bounds on weak Roman and ۲-rainbow domination numbers", Discrete. Appl. Math. ۱۷۸ (۲۰۱٤) 27-32.

[7] M. Chellali, T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi and A. MacRae, "Roman {۲}-domination", Discrete Appl. Math. ۲۰٤ (۲۰۱٦) 22-28.

[8] E. J. Cockayne, P. A. Dreyer Jr., S. M. Hedetniemi and S. T. Hedetniemi, "Roman domination in graphs", Discrete Math. ۲۷۸ (۲۰۰٤) 11-22.

[9] N. Dehgardi, S.M. Sheikholeslami, M. Soroudi and L. Volkmann,"Bounds on the co-Roman domination number in graphs", Asian-Eur. J. Math. (to appear).

[10] S. Fujita and M. Furuya, "Difference between ۲-rainbow domination and Roman domination in graphs", Discete. Appl. Math **161** (2013) 806-812.

[11]T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, "Fundamentals of Domination in Graphs", Marcel Dekker, Inc, New York, (۱۹۹۸).

[12] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, "Dominatin in Graphs: Advanced Topics", Marcel Dekker, Inc, New York, (۱۹۸۸).

[13] M. A. Henning, "Defending the Roman Empire-A new strategy", Discrete Math. 266(۲۰۰۳) ۲۳۹-۲٥۱.

[۱٤] P. Roushini Leely Pushpam, "Weak Roman domination in graphs", Discuss. Math. Graph Theory ۳۱ (۲۰۱۱)۱۱٥-۱۲۸.

[15] Z. Shao, S.M. Sheikholeslami, M. Soroudi, L. Volkmann and X. Liu, "On the co-Roman domination in graphs", Discuss. Math. Graph Theory (to appear).

[16] D. B. West, "Introduction to Graph Theory (second edition)" , Prentice Hall, USA, (۲۰۰۱).

[17] Y. Wu and N. Jafari Rad, "Bounds on the 2- ", Graphs Combin. ۲۹ (۲۰۱۳)1125-1133.